HZ BOOKS
华章教育

全国研究生入学考试数学复习指导丛书

线性代数

历年真题详解与考点分析

史荣昌 编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

全国研究生入学考试数学复习指导丛书

线性代数

历年真题详解与考点分析

史荣昌 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：历年真题详解与考点分析/史荣昌编著. －北京：机械工业出版社，2002.6
(全国研究生入学考试数学复习指导丛书)
ISBN 7-111-10353-X

Ⅰ.线…　Ⅱ.史…　Ⅲ.线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036033 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
责任编辑：马海宽
北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
787mm × 1092mm　1/16 · 14.25 印张

定　价：21.00 元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“考研复习指导与典型例题分析”、“本科生题库”等共16种将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容,了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下,根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求,并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师,具有丰富的教学经验,多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中,包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》4种。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟,体现了作者们的专业素质,您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中,也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计4种。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析,使考生看后能紧密结合实战,安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序,而是分门别类娓娓道来。

“考研复习指导与典型例题分析”同样分为4种。该系列注重基本概念、基本技能,是考试大纲的教材而非教学大纲的教材,为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材,是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习,便于掌握解题方法与精髓,本书所选的题目打破过去习题集的形式,将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业,特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要,也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信,本系列丛书的出版,必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路,更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法,培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力,并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心,以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们,感谢他们付出的辛勤劳动。同时,欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002年3月

目 录

第一章 行 列 式

一、重点内容简介

了解行列式的概念,掌握行列式的性质,会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式是本章的基本要求.

(一) 行列式

(1) n^2 个元素 a_{ij}(数、字母) 排列成的一个 n 行 n 列,两边界加竖线就成为 n 阶行列式的记号.它表示 n^2 个元素 a_{ij} 按一定法则进行运算的一个计算公式,得到的结果(数字、含字母的代数式) 称为行列式的值.

n^2 个元素 a_{ij} 的 n 阶行列式全部展开出来的结果是一个由 $n!$ 项组成的多项式,多项式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是n 个元素乘积.这 n 个元素取自行列式中不同的行与不同的列(从这 n 个元素的第 1 个足码 $1,2,\cdots,n$ 与第 2 个足码 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都不重复得出).

如果行列式的列向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,则此行列式可表示为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$.

(2) 二阶、三阶行列式的计算公式(对角线法则):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

特别指出,四阶及四阶以上的行列式不可能有类似(记忆) 公式.

(二) 行列式性质

(1) 行列式与其转置行列式值相等.

(2) 对换行列式的两行(列),行列式值改变符号.

(3) 行列式中某行(列) 公因子,可以提到行列式符号外;也即用一个非零数乘以行列式等于用这个非零数乘以该行列式中的任何一行(列).

(4) 若行列式中有两行(列) 完全相同,或有一行(列) 的元素为零,或有两行(列) 的对应

元素成比例,则行列式值等于零.

(5) 若把一个行列式 D 按第 i 行(列)拆成两个行列式之和 D_1+D_2,只要 D,D_1 与 D_2 三个行列式除第 i 行(列)外其余对应的行(列)完全相同,D 中的第 i 行(列)元素是 D_1 与 D_2 中第 i 行(列)对应元素的和.相反地,并不是任何两个 n 阶行列式都能相加成一个 n 阶行列式,只有当两个 n 阶行列式除第 i 行(列)外其余各行(列)对应元素都相同时,才可以相加成一个行列式.

(6) 用一个数(零或非零)乘行列式某一行(列)后加到另一行(列)上去,行列式的值不变.

(三) 行列式按行(列)展开定理

(1) 余子式、代数余子式。在行列式 D 中划去第 i 行与第 j 列的元素后余下的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式,称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 按行(列)展开定理:n 阶行列式 D_n 按第 i 行展开为

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或按第 i 列展开为

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

(四) 计算(或化简)行列式

1. 特殊行列式

(1) 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注 $$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\cdots a_{n1}.$$

(2) 准三角形行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{D}_2 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}_1||\boldsymbol{D}_2|, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{D}_1 & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_2 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{D}_1||\boldsymbol{D}_2|,$$

其中 $\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 分别为 n_1 阶, n_2 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} * & \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{n_1\times n_2}|\boldsymbol{D}_1||\boldsymbol{D}_2|, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 & * \end{vmatrix} = (-1)^{n_1\times n_2}|\boldsymbol{D}_1||\boldsymbol{D}_2|.$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

(4) 爪型行列式

$$\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_2x_3\cdots x_n\left(x - \sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right).$$

这个结果不必记住,但要掌握如何计算.不少 n 阶行列式运用行列式性质后可变成爪型行列式.

2. 计算行列式的基本原则

(1) 运用行列式性质把行列式的某一行(列) 尽可能化简,使得这一行只剩下一个或很少几个不为零,然后按该行(列) 用展开定理计算(化零降阶法).

(2) 运用行列式性质把行列式化成上述特殊行列式或自己熟悉的行列式类型，然后得到结果.

(3) 把 n 阶行列式运用行列式性质得到递推公式，求解.

3．计算行列式常采用的一些方法

(1) 某一行(列) 乘数加到另一行(列) 上去，或某一行(列) 乘数加到其余各行(列) 上去.

(2) 第 $n-1$ 行(列) 乘数加到第 n 行(列) 上，之后再从第 $n-2$ 行(列) 乘数加到第 $n-1$ 行(列) 上，之后继续下去，直到需要为止.

(3) 若干行(列) 加到某一行(列) 上去、或者各行(列) 全加到某一行(列) 上去.

(4) 利用行列式性质把行列式某一行(列) 或按某几行(列) 或按 n 行(列) 拆开计算(称为拆行列法).

(5) 加边法(把 n 阶行列式变成等值的 $n+1$ 阶行列式).

二、历年真题全解

(一) 填空题(1.1 ~ 1.9)

1.1(1987 年数学四、五)　若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为常数，而 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|k\boldsymbol{A}|$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $|k\boldsymbol{A}|$ 的行列式，则 $|k\boldsymbol{A}|=$ ________.

答案是：$k^n|\boldsymbol{A}|$.

分析　$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，故 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

评注　$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|\neq|k|^n|\boldsymbol{A}|$.

1.2(1988 年数学一、二)　设 4×4 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为四维列向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$. 则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ________.

答案是：40.

分析　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)$. 于是根据行列式性质有：

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=|\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+8|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8|\boldsymbol{A}|+8|\boldsymbol{B}|=40.\end{aligned}$$

评注　$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

1.3(1988 年数学四、五) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

答案是：-3.

分析　把行列式第 1 行乘(-1)加到第 2,3,4 行上去后按第 1 列展开得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

又由
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

把第 1,2,3 列全加到第 4 列上去得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

评注　不难用第二种方法可以计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1).$$

1.4(1989 年数学五)　行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1+x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

答案是：x^4.

分析　记原行列式为 $\boldsymbol{\Delta}$.将第 1 行乘(-1)依次加到第 2,3,4 行上去得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\0 & 0 & x & -x\\0 & x & 0 & -x\\x & 0 & 0 & -x\end{vmatrix},$$

将第 1,2,3 列全加到第 4 列上去得

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x\\0 & 0 & x & 0\\0 & x & 0 & 0\\x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{3+2+1}\begin{vmatrix}x & 1 & -1 & 1\\0 & x & 0 & 0\\0 & 0 & x & 0\\0 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}=x^4.$$

1.5(1991 年数学五)　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

答案是：$a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

分析　按第 1 列展开得

$$\text{原式}=a\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

若按第 1 行展开也易求得解.

1.6(1992 年数学四)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=\_\_\_\_\_\_$.

答案是：$(-1)^{mn}ab$.

分析 A 的第1列在 C 中是第 $n+1$ 列. 为了将 A 中第1列(C 中第 $n+1$ 列) 移到 C 中第1列, 把 A 中第1列逐列对换移到 C 中第1列(即 C 中第 $n+1$ 列与第 n 列对换, 然后又与第 $n-1$ 列对换, 再与第 $n-2$ 列对换, 依次继续, 最后与 C 中第1列对换. 这样由 C 中第 $n+1$ 列共 n 次对换到 C 中第1列). 相同方法把 A 中第2列(C 中第 $n+2$ 列) 通过 n 次对换到 C 中第2列, …, 最后把 C 用逐列对换变成

$$C=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix},$$

一共对换了 mn 次, 因此

$$|C|=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|=(-1)^{mn}ab.$$

1.7(1996 年数学五) 五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

答案是: $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

分析 根据第2, 3, 4 行元素之和为零之特点, 将第2, 3, 4, 5 列全加到第1列上去(记原行列式为 D_4), 然后按第1列展开得

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}+(-1)^{5+1}\cdot(-a)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}$$

$$=D_4-a^5.$$

由递推关系, 可得

$$D_5=-a^5+D_4=-a^5+a^4+D_3=\cdots=-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1.$$

再介绍一种递推法计算: 将原行列式按第1列展开得

$$D_5=(1-a)D_4+(-1)^{2+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=(1-a)D_4+aD_3, \tag{1}$$

类似地

$$D_4=(1-a)D_3+aD_2. \tag{2}$$

则

$$D_3=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 \\ -1 & 1-a & a \\ 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=1-a+a^2-a^3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}=1-a+a^2.$$

将 D_3,D_2 代入式(2)得

$$D_4=(1-a)(1-a+a^2-a^3)+a(1-a+a^2)=1-a+a^2-a^3+a^4.$$

将 D_4,D_3 代入式(1)得

$$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

评注　本试题是五阶行列式，现介绍 n 阶行列式的计算.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix},$$

将第 2,3,…,n 列全加到第 1 列上去，然后按第 1 列展开得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot(-a)\begin{vmatrix} a & & & \\ 1-a & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1-a & a \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^n a^n.$$

由递推关系可得

$$D_n = D_{n-1} + (-1)^n a^n = D_{n-2} + (-1)^n a^n + (-1)^{n-1} a^{n-1}$$
$$= \cdots = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^n a^n.$$

另一种解法,按第 1 列展开可得

$$D_n = (1-a) D_{n-1} + a D_{n-2},$$

因此

$$D_n + a D_{n-1} = D_{n-1} + a D_{n-2}$$

反复运用此递推关系可得

$$D_n + a D_{n-1} = \cdots = D_2 + a D_1 = 1$$

故 $$D_n = 1 - a D_{n-1} = 1 - a(1 - a D_{n-2}) = 1 - a + a^2 D_{n-2} = \cdots$$
$$= 1 - a + a^2 - \cdots + (-1)^n a^n.$$

1.8(1997 年数学四) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则 $|A| =$ ________.

答案是:$(-1)^{n-1}(n-1)$.

分析 根据各行元素之和全是 $n-1$ 之特点,将 $|A|$ 的第 2, 3, …, n 列全加到第 1 列上去得

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

将行列式的第 1 行乘(-1)依次加到第 2, 3, …, n 行上去,得

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

评注 本试题中 $|A|$ 是下面 n 阶行列式的特殊情况.

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a\\ a & x & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

现介绍三种解法.

方法一　把行列式 D_n 的第 $2,3,\cdots,n$ 列全加到第 1 列上去得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a\\ 1 & x & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

把行列式的第 1 行乘 (-1) 分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上去得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法二　把行列式的第 1 行乘 (-1) 分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上去得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a\\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0\\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

把第 $2,3,\cdots,n$ 列全加到第 1 列上去得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

方法三　构造与 D_n 等值的 $n+1$ 阶行列式 D_{n+1}