同济大学数学辅导系列丛书

高等数学中的典型问题与解法

GAODENG SHUXUE ZHONGDE DIANXING WENTIYUJIEFA

（配同济四版）

西北工业大学高等数学教研室 编

同济大学出版社

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学中的典型问题与解法

（配同济四版）

西北工业大学高等数学教研室　编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学中的典型问题与解法(配同济四版)/西北工业大学高等数学教研室编．—上海:同济大学出版社，2001.6

(同济大学数学辅导系列丛书)

ISBN 7-5608-2268-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．西…　Ⅲ．高等数学-高等学校-解题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 16582 号

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学中的典型问题与解法(配同济四版)

作　者　西北工业大学高等数学教研室　编

责任编辑　李炳钊　责任校对　徐春莲　装帧设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社

(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂印刷

开　本　850mm×1168mm　1/32

印　张　23.5　插页:8

字　数　696000

版　次　2001 年 6 月第 1 版　　2001 年 10 月第 2 次印刷

书　号　ISBN 7-5608-2268-1/O·188

定　价　30.00 元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换

前　言

高等数学是高等工科院校最主要的基础课之一，学生对它掌握的好坏，不仅直接关系到后继课程的学习，而且对今后的提高和发展以及工作中的贡献都有着深远的影响.

许多读者在学习高等数学课的过程中都存在着这样的问题："上课能听懂，课后解题却不知从何下手". 这一问题的产生是由于一方面对基本概念、基本定理理解得不够深入，对定理的条件、结论理解得不够贴切，对各部分知识之间的联系、区别不甚清楚；另一方面的原因则在于做的题目类型较少，并且对做过的题目缺少归纳、总结，因而既不清楚常见的题目都有哪些类型，也不明了各类型题目常常采用哪些解法. 总之，是心中无数.

著名数学家、教育家乔治·波利亚（G·Polya）说过："解题可以认为是人的最富有特征性的活动……假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的问题时，能起到指导的作用."本书就是根据这一思路，将高等数学中常见的题目进行分类——分为 26 个专题. 在每一个专题中，从以下几方面对所学知识进行深化、归纳总结：

一、概念、定理、问题

这一部分对教材中的基本概念、定理作进一步的诠释，帮助读者更深入、贴切地理解这些概念，掌握定理的核心内容、关键点，并回答教学中常见的一些概念性问题.

二、典型例题与解题方法

这一部分通过对精选的典型例题的分析、求解，以小结的形式对各种类型题常用的解题方法、证明方法加以归纳总结，同时，阐明各种解法适用的题目所具有的特征，还用较大的篇幅对教学中的难点作了重点讲解，如中值问题的证明，方程根的证明等. 对计算题，着重于方法的归纳总结，对证明题，则着重于证题思路的分析.

三、常见错误剖析

这部分针对在高等数学教学过程中常遇到的容易忽视或混淆的问题、初学者易犯的概念性错误或解题错误，对其进行剖析，从反面帮助读者搞清基本概念，深入理解基本定理，掌握正确的运算方法.

四、练习题

这部分是为读者检查自己对这部分内容掌握的程度而提供的练习题. 练习题分 A，B 两级. A 级为基本题，B 级为提高题. 书末附有习题答案及解题方法提示.

本书配合同济大学数学教研室编写的《高等数学》(四版)使用，可作为高等工科院校高等数学课程的教学参考书，也可作为考

研的复习资料.

参加本书编写工作的有西北工业大学应用数学系肖亚兰、陆全、孟雅琴、王禧竑、李云珠、刘小冬、王雪芳、杨月茜、符丽珍、方珍珍、郑红婵、周晓莉、林伟、郎荣玲等，最后由肖亚兰教授统纂定稿.

限于编者水平，加之编写时间仓促，因而书中错误、疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2001 年 1 月

目　　录

第 1 讲　求极限的方法与技巧

极限概念与求极限的运算贯穿了高等数学课程的始终，因此，全面掌握求极限的方法与技巧是高等数学课程的基本要求．本讲较为全面地介绍了求数列极限与函数极限的各种方法，并按方法分专题．有些例题给出了多种解法，对同一题目的不同解法以不同题号分别按专题排列，但前后注明，以便对照．

一、概念、定理、问题

（一）数列极限与函数极限

1．关于数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的下列论述正确吗？

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示 n 越大时，$|x_n-a|$越小；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示 n 越大时，$|x_n-a|$越接近于零．

这两种说法均是不正确的．因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示 n 无限增大时，$|x_n-a|$无限接近于零，或 n 无限增大时，x_n 可以任意地接近于 a．但上述两种说法均无法保证这一点．例如，设 $x_n=-\dfrac{1}{n}$，$a=1$，则 n 越大时，$|x_n-a|=\left|-\dfrac{1}{n}-1\right|=1+\dfrac{1}{n}$越小，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0\neq1=a,$$

原因在于说$|x_n-a|$越小是指$|x_n-a|$单调减小，而不能保证$|x_n-a|$无限接近于零．

又如，设 $x_n=2+\frac{1}{n}$，$a=1$，则 n 越大时，$|x_n-a|=1+\frac{1}{n}$ 越接近于零，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2\neq 1=a,$$

原因在于越来越接近于零不等同于无限接近于零.

2. 数列 $\{x_n\}$ 的敛散性与数列 $\{|x_n|\}$ 的敛散性有何关系？

数列 $\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 的关系是：若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{|x_n|\}$ 也收敛，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 证明如下：由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 知，对于任意给定的正数 ε，总存在着正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，从而

$$\big||x_n|-|a|\big|<|x_n-a|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

但若 $\{|x_n|\}$ 收敛，$\{x_n\}$ 却可能收敛，也可能发散. 例如，$\{|(-1)^n|\}$ 是收敛的，但 $\{(-1)^n\}$ 是发散的. 如果 $\{x_n\}$ 恒正或恒负，那么，$\{x_n\}$ 与 $\{|x_n|\}$ 有相同的敛散性. 此外，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 这是今后经常用到的一个结论.

3. 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则一定有 $A>0$（或 $A<0$）吗？

不一定. 例如，$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的去心邻域内大于零，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 即当 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内大于零（或小于零），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，结论仍然是 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

4. 数列极限与函数极限的区别与联系

(1) 数列 $x_n=f(n)$ 的极限与函数 $y=f(x)$ 的极限是有区别的. 它们之间的区别在于：数列 $x_n=f(n)$ 的自变量 n 的变化过程

是间断的（只取正整数），且只有一种变化过程：$n\to\infty$（即 $n\to+\infty$）；而函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有六种：$x\to x_0$，$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

(2) 数列极限与函数极限之间也有一定的联系：

（ⅰ）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 但当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 可以存在；

（ⅱ）（海涅定理）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是对于 $x_n\to x_0$（$n\to\infty$ 时）的任意数列 x_n，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由于数列极限与函数极限有上述关系，因此，可以得到数列极限在讨论函数极限时的下述应用：

(1) 为了说明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，使对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大；或者找出两个收敛于 x_0 的数列 x_n 与 y_n，$(x_n\neq x_0,y_n\neq x_0)$，使数列 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 有不同的极限. 例如，要说明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，可以找出两个收敛的数列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ 与 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{y_n}=1$，所以，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

(2) 为了说明当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 不是无穷大，常用的方法是找出一个数列 $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$，而对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a$（为定数）.

类似地，为了说明函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界，常用的方法是找出数列 $\{x_n\}\subset I$，而对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 为 $n\to\infty$ 时的无

穷大.

例 试证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 无界,但当 $x\to+0$ 时,$f(x)$ 不是无穷大.

证 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\in(0,1]$,则 $f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty,$$

故函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 无界.

但若取 $y_n=\frac{1}{n\pi}$,则当 $n\to\infty$ 时,$y_n\to+0$,而

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}n\pi\sin(n\pi)=0,$$

故当 $x\to+0$ 时,$f(x)$ 不是无穷大.

(3) 为求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,先找一个数列 $x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0)$,求出 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,然后再证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 例如先说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,再用夹逼准则证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

根据函数极限与数列极限的这一关系,有时也利用函数极限的结果去求相应的数列极限.第三章中用洛必达法则求极限时,若遇到数列极限,便常常这样处理.

5. 关于准则Ⅱ:单调有界数列必有极限

这一条重要的极限存在准则在高等数学中一般是不予证明的,并且常常使用与之等价的说法:单调增加有上界的数列必有极限(或单调减少有下界的数列必有极限)来说明某个数列有极限.

6. 夹逼准则的条件可削弱为当 $n>N_0$ 时,有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,$N_0$

为某一确定的正整数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(二) 无穷小与无穷大

1. 无穷小与函数极限的关系

如果函数 $f(x)$ 以 A 为极限，那么，$f(x)-A=\alpha(x)$ 是无穷小，即 $f(x)$ 等于一个常数 A 与无穷小 $\alpha(x)$ 之和；反过来，如果 $f(x)-A=\alpha(x)$ 是无穷小，即 $f(x)$ 等于一个常数 A 与无穷小 $\alpha(x)$ 之和，则 $f(x)$ 以 A 为极限. 由此可以把极限问题转化为无穷小的问题来处理. 这一点可以看成是高等数学中特别要提出无穷小这类特殊变量的原因.

2. 无穷大与无界函数的区别与联系

它们之间的区别是：① 无穷大是指在自变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势(其绝对值无限增大)，即无穷大与自变量的"趋向"相联系；而无界函数是指自变量在某一范围内变化时，对应函数值的变化情况，即无界函数与自变量的变化"范围"相联系. ② 无穷大定义中的不等式 $|f(x)|>M$，要求适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的"一切" x 都要满足；而无界函数定义中的不等式 $|f(x)|>M$ 只要求在相应的变化范围内"有" x 满足即可. 例如，我们说 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，而说 $g(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时为无穷大.

它们之间的联系是：如果 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大，则 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区间上或在以 x_0 为端点的某区间上无界；但反过来，当 $f(x)$ 无界时，$f(x)$ 却不一定是无穷大. 例如，$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上无界，而 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时却不