DAXUESHENG ZHI YOU

高等代数解题分析

江苏科学技术出版社

高等代数解题分析

周士藩　王秀和
顾梅英　董张维

江苏科学技术出版社

高等代数解题分析

周士藩　王秀稚
顾梅英　董张维

出版：江苏科学技术出版社
发行：江苏省新华书店
印刷：镇江前进印刷厂

开本787×1092毫米 1/32　印张22.375　字数498,000
1985年11月第1版　1985年11月第1次印刷
印数1—31,420册

书号：13196·205　　定价：4.20元
责任编辑　沈绍绪

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生，包括电视大学、职工大学的学生，在学习过程中往往要演算大量的习题，以加深对课程内容的理解和记忆。但在解题时，经常会遇到各种各样的困难。《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力，熟练演算技巧，牢固地掌握学科知识而出版的。

丛书以解题分析为主。为了便于阅读，每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式。然后，用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析，交代解题的思路，归纳解题的规律，指出必须注意的事项。最后，附以适量的习题，并提供答案或提示。

丛书内容密切配合大学教材，选题以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾各专业课。各书的出版时间，也基本上按此顺序安排，逐步配套。

我们的愿望，想使这套丛书成为大学生喜爱的“朋友”。能否如愿，还有待于广大师生的检验。我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见，使它们成为名副其实的“大学生之友”。

江苏科学技术出版社

前言

高等代数是近代数学的一门基础课。大学理工科的学生在学习这门课的时候，往往感到内容抽象，证题无从下手。针对学生学习这门课时遇到的困难，本书用较多的例题介绍了高等代数中一些最基本的证题方法，重点讲述了证题思路。在此基础上，又归纳了一些证题规律，以期帮助初学者进一步提高证题能力，加深对这门课基本内容的理解。

在编写本书的过程中，南京师范大学杨儒生副教授，认真、仔细地看了全部初稿，提出了许多宝贵的意见，我们在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，再加上时间仓促，定有不少错误和不足之处，诚恳希望读者提出批评指正。

编者

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是讨论线性方程组理论的一个有力工具，本章主要讨论行列式概念、性质及计算中的问题。

第一节 行列式定义

一、内 容 提 要

1. n级排列

由n个数码1，2，…，n组成的一个有序数组，称为一个n级排列。在一个排列中，如果一对数码的前后位置与大小顺序相反，即前面的数字比后面的数字大，则称它们构成一个逆序，一个排列$j_1j_2\cdots j_n$中逆序的总数，称为这个排列的逆序数。用符号$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示，逆序数为偶数的排列叫做偶排列，逆序数为奇数的排列叫做奇排列。

对换　把一个排列中某两个数码互换，其余数码位置不变，得另一个排列，这样的变换叫做一个对换，例如：排列2431经过1，2对换，就变成1432，记为$2431\xrightarrow{(1,\ 2)}(1432)$。

2. n级排列的性质

（1）n个数码的不同排列共有$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$个（"$n!$"读为"$n$阶乘"），例如$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$。

（2）排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数可按下面方法计算：

方法一　先看有多少个数码排在1的前面，设为m_1个，则就有m_1个数码与1构成逆序，然后把1划去，再看有多少个

数码排在 2 前面，设为m_2个，则就有m_2个数码与 2 构成逆序；然后把 2 划去。再看有多少个数码在 3 的前面，依次类推，最后设有m_n个数码与n构成逆序（显然$m_n=0$）于是有$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}$。

方法二

$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_1$后面比$j_1$小的数码的个数

$+j_2$后面比j_2小的数码个数

$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+j_{n-1}$后面比j_{n-1}小的数码个数

或

$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=j_n$前面比$j_n$大的数码个数

$+j_{n-1}$前面比j_{n-1}大的数码个数

$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+j_2$前面比j_2大的数码个数。

（3）如果连续施行两次相同的对换，那么，排列就还原了，例如：4 级排列$2431\xrightarrow{(1,\ 2)}1432\xrightarrow{(1,\ 2)}2431$。

（4）一个对换把全部n级排列两两配对，使每两个配成对的n级排列在这对换下互换。例如：3 级排列共 6 个
$123\xleftrightarrow{(1,2)}213$，$231\xleftrightarrow{(1,2)}132$，$312\xleftrightarrow{(1,2)}321$。

（5）每一个对换都改变排列的奇偶性。

（6）任意一个n级排列与排列$12\cdots n$都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这排列有相同的奇偶性，例如：4 级排列$2431\xleftrightarrow{(1,\ 2)}1432\xleftrightarrow{(2,\ 4)}1234$，或者
$2431\xleftrightarrow{(1,\ 3)}2413\xleftrightarrow{(1,\ 4)}(2143)\xleftrightarrow{(1,\ 2)}(1243)$
$\xleftrightarrow{(3,\ 4)}1234$，总之，排列2431可以经过偶数次对换后变成排列1234。另一方面，因$\tau(2431)=1+2+1=4$是偶数，所

以，排列2431是偶排列。

3. n级行列式定义

用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad ①$$

表示n级行列式，它等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n} \qquad ②$$

的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$是1，2…，n的一个排列，当$j_1j_2\cdots j_n$为偶排列时，②前面带"+"号，当$j_1j_2\cdots j_n$为奇排列时，②前面带"-"号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \times a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad ③$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有$n$级排列求和，$a_{ij}$叫做$n$级行列式的第$i$行第$j$列的元素，$i$叫做$a_{ij}$的行标，$j$叫做$a_{ij}$的列标，③右端称为$n$级行列式的展开式，为了书写方便起见，$n$级行列式常用下列记号表示：$D$，$D_n$，$|a_{ij}|_n$等。

当$n=1$时，$|a_{ij}|_1=a_{11}$，即一级行列式就是数a_{11}。

当$n=2$时，$|a_{ij}|_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$即2级行列式的值等于主对角线（从左上角到右下角的对角线）上两个元素的乘积减去第二对角线（从右上角到左下角的对角

线）上两元素的乘积。

当$n=3$时，

$$|a_{ij}|_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3级行列式的展开式中含有6项，3项带“+”号，3项带“-”号，带正号的3项中，有一项是主对角线上三个元素的乘积，其余两项中的每一项都是位在主对角线的一条平行线上的两个元素与对角上的元素的乘积；带负号的3项中，有一项是第二对角线上三个元素的乘积，其余两项中的每一项都是在第二对角线的一条平行线上的两个元素与对角上的元素的乘积，可用图1-1表示

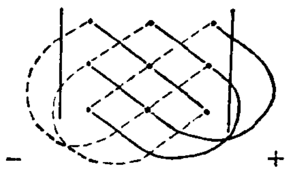

图1-1

这就是所谓对角线法则。

说明 讨论行列式是取一固定的数域① P作为基础，所谈到的数都是指这个数域P中的数，并用字母Q，R，C分别表示有理数域、实数域与复数域。

注①设P是一些数所组成的一个集合，且$0\in P$，$1\in P$，如果任意两个数a，$b\in P$，恒有$a+b\in P$，$a-b\in P$，$a\cdot b\in P$，且当$b\neq 0$时，$\frac{a}{b}\in P$，那末，P就称为一个数域，记号$a\in P$表示a是P中的数。

二、例题分析

例1 确定排列542163的奇偶性。

解法一 利用性质（2）中方法二分别算出数码5，4，2，1，6后面比它小的数码的个数，或算出3，6，1，2，4前面比它大的数码的个数。得

$$\tau(542163)=4+3+1+0+1=9,$$

或

$$\tau(542163)=3+0+3+2+1=9,$$

也可利用性质（2）中方法一得

$$\tau(542163)=3+2+3+1=9.$$

因为9是奇数，所以542163是奇排列。

解法二 利用性质（6），将排列542163通过若干次对换变成排列123456，算出所作对换的次数。

$$542163\xrightarrow{(1,\ 5)}142563\xrightarrow{(2,\ 4)}124563\xrightarrow{(3,\ 4)}$$

$$123564\xrightarrow{(4,\ 5)}123465\xrightarrow{(5,\ 6)}123456.$$ 因为对换次数为5，5是奇数，由性质（6）知，排列542163是奇排列。

分析 （1）由于本例的两种解法都是利用排列的性质，故只要熟悉排列性质，就可确定排列的奇偶性。

（2）利用性质（6）也可将排列542163中数码1与它前面的数码逐个对换位置，换到第一个位置，将2与它前面的数码逐个对换，换到第二个位置，依次类推。最后成排列123456，不难算出其经过对换次数为9是奇数，故原排列为奇排列。

例2 计算$2n$级排列$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$的逆序数，并确定奇偶性。

分析 利用排列性质（2），用例1中的解法一同样可以处

理，这里只要注意到给定排列中前n个数码$1,3,5,\cdots(2n-1)$之间不构成逆序，后n个数码$2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，只有前n个数码与后n个数码之间才构成逆序。

解 $\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))$

$$=0+1+2+\cdots+(n-1)$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

由于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需根据n而定，故必须对n进行讨论，

当$n=4k$时，$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$，对$k$是任意非负整数，$2k(4k-1)$总是偶数。同理可证，

当$n=4k+1$时

$$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1) \quad \text{是偶数}$$

当$n=4k+2$时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$　是奇数

$n=4k+3$时，$\frac{n(n-1)}{2}=(4k+3)(2k+1)$　是奇数

综上所述，当$n=4k$，$4k+1$时，其中k为任意非负整数原排列为偶排列。

当$n=4k+2$，$4k+3$时，其中k为任意非负整数，原排列为奇排列。

例3 下列各乘积是否是四级行列式中的项？若是，则应取什么符号？

(1) $a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$；　　(2) $a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$。

分析 据n级行列式定义，n级行列式的展开式中的每一

项应是n级行列式中不同行不同列的n个元素的乘积，所以，如果发现n个元素的乘积中有两个元素取自同一行或同一列，则就可断定此乘积不是n级行列式中的项，而要判断乘积中是否有同行或同列的元素，只要看这n个元素中是否有相同的行标或相同的列标，如果有两个元素的行标（列标）相同，那么这两个元素就在同一行（或列）中，它就不是n级行列式中的项。

解 （1）因为乘积$a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$中，元素a_{11}与a_{14}都是四级行列式$|a_{ij}|_4$中第一行的元素，所以，$a_{11}a_{23}a_{14}a_{42}$不是四级行列式中的项。

（2）因乘积$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$中，每个元素的行标互不相同，列标也互不相同，所以$a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$是四级行列式$|a_{ij}|_4$中不同行不同列的四个元素的乘积，故它是四级行列式中的项。

$\because a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}=a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$，$\tau(2143)=2$。

$\therefore a_{34}a_{12}a_{43}a_{21}$前面应取“+”号。

例4 用行列式定义计算

$$(1)\quad D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$(2)\quad D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 D_n的项的一般形式为$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$，如果项中有一元素为0，则这一项就为0。

（1）因为在D_4中，$j_1\neq1$，4时，$a_{1j_1}=0$，$j_2\neq2$，3时，$a_{2j_2}=0$，$j_3\neq2$，3时，$a_{3j_3}=0$，$j_4\neq1$，4时，$a_{4j_4}=0$，所以，在D_4中除$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$四项外，其余的项都是零，而$\tau(1234)=0$，$\tau(1324)=1$，$\tau(4321)=6$，$\tau(4231)=5$，

故$D_4=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$
$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$。

（2）因为在D_n中，当$j_n\neq n$时，$a_{nj_n}=0$，所以只要考虑$j_n=n$的那些项，即$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1\,j_{n-1}}a_{nn}$。

又因$j_{n-1}\neq n-1$，n时，$a_{n-1\,j_{n-1}}=0$，所以只要考虑$j_{n-1}=n-1$或n的那些项，但因已有$j_n=n$，所以j_{n-1}不能再取n，从而只有$j_{n-1}=n-1$，同理可得$j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2$，$j_1=1$。即在D_n中除去$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项以外，其余的项全为零，而$\tau(12\cdots n)=0$，故$D_n=(-1)^{\tau(12\cdots\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$
$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

说明　（1）计算本例，主要根据D_n的一般项中如果有一个元素为0，则这一项为0，和这两个行列式中有很多元素为0的特点，再根据行列式定义，求出所有非零的项。这两题如果用下面第二节中行列式展开定理，即计算将更为简单。

（2）从本题的计算看出，若利用定义直接计算行列式，只有在级数很低（2级或3级）或者行列式中有很多元素为0时较为方便，否则，计算是较困难的。

（3）若D_n的对角线下侧元素全为0，则称它为上三角形行列式；若对角线上侧元素全为0，则称为下三角形行列式，一般地，统称为三角形行列式。

例5　设$f_{ij}(x)$　i，$j=1$，2，…，n都是x的可微函数，

证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} .$$

证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x)\right]$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx}[f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x)]$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \Big[\Big(\frac{d}{dx} f_{1j_1}(x)\Big) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x)$$

$$+ \cdots + f_{1j_1}(x) \cdots f_{n-1\, j_{n-1}}(x)\left(\frac{d}{dx} f_{nj_n}(x)\right)\Big]$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \left(\frac{d}{dx} f_{1j_1}(x)\right) f_{2j_2}(x) \cdots$$

$$f_{nj_n}(x) + \cdots +$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)\cdots f_{n-1\,j_{n-1}}(x)$$

$$\cdot\frac{d}{dx}f_{nj_n}(x)$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{d}{dx}f_{11}(x) & \frac{d}{dx}f_{12}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \frac{d}{dx}f_{21}(x) & \frac{d}{dx}f_{22}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

$$+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n-1\,1}(x) & f_{n-1\,2}(x) & \cdots & f_{n-1\,n}(x)\\ \frac{d}{dx}f_{1n}(x) & \frac{d}{dx}f_{2n}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

分析　本例的证明中利用了n级行列式定义以及可微函数和与积的微分法则，所以只要熟悉行列式定义及可微函数