## 内容简介

本书是以前国家教委1995年颁布的高等工业学校本科高等数学课程教学基本要求为纲，针对本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生，在吸取了我校多年来教材改革和教学实践经验基础上编写而成的。其内容包括：一元多项式；行列式；矩阵；向量与线性空间；线性方程组及其在几何学中的应用；线性变换；特征值、特征向量及相似矩阵；Jordan标准形；二次型与二次曲面。每章中配有一定数量的例题，每章后配有大量的习题。

本书可作为理工科院校非数学专业本科生的数学课教材，也可作为考研人员和工程技术人员的参考书。

工科大学数学教程

线性代数与空间解析几何

Xianxing Daishu Yu Kongjian Jiexi Jihe

（偏理）

吴勃英　游宏　董增福　编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 13.5　字数 341 千字

2000年5月第1版　2001年5月第2次印刷

印数 2 001～6 000

ISBN 7-5603-1541-0/O・111　定价 20.00元

# 编者的话

本书是为对数学基础要求较高的高等院校工科专业，如计算机、自动控制、通信工程、力学等专业及非数学理科专业本科学生的《线性代数与空间解析几何》课程编写的。

近年来，哈尔滨工业大学对一些数学基础要求较高的工科专业本科教学实行了新的教学体系。本体系无论在数学教学的内容上，还是在数学各分支间的融会上，都对原有的工科数学教材作了一定程度的改革。本书是在教学实践的基础上，结合相关专业的实际状况，参考部分兄弟重点院校工科数学教材，遵循“加强基础、注重应用、培养能力”的指导思想编写而成的。本书具有以下几方面的特点：

(1) 注重了线性代数与解析几何的融合。以线性代数为主，用代数的观点介绍解析几何。

(2) 增加了一元多项式的内容。这在一般工科线性代数教材中是少见的。编者认为近代许多工程计算问题都要涉及多项式方程组，让工科学生具备一点多项式方面的基础知识有利于今后解决工程中的多元多项式方程组的计算问题。

(3) 增添了线性变换的内容。这有利于学生了解矩阵理论的几何背景及如何将空间中的变换(线性)用矩阵来表现。

(4) 介绍了复数域上相似矩阵的 Jordan 标准形。可使学生们了解如何用形式最简的矩阵来表示一个线性变换。

本书第一章、第四章、第五章大部、第六章、第七章前三节、第八章由游宏编写，第二章、第三章、第五章第一节、第七章第四节及各章大多习题由吴勃英编写，第九章由董增福编写，全书由游宏、吴勃英校阅。

限于编者水平，书中不当之处在所难免，我们热诚希望使用本教材的教师和同学批评指正。

编　者

2000 年 8 月

# 前　言

培养基础扎实、勇于创新的人才历来是大学教育的一个重要目标，随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出。在工科大学教育中，数学课既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神，多年来在数学教学改革方面进行了探索，取得一定的成效，在此基础上，编写了这套教材，其中包括《工科数学分析（上下册）》、《线性代数与空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《数学实验》及针对本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的《工科数学分析（上下册）》、《线性代数与空间解析几何》。这套教材是参照原国家教委 1995 年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和 1997 年研究生入学考试大纲编写的。为满足不同专业、不同层次学生的需要，这套教材适当增加了部分内容，对学生能力的要求也有所提高。

本教材的编写力求具有以下特色：

1. 将各门课程的内容有机结合、融会贯通，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数。

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质。对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入。取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础。

3. 例题和习题丰富，特别是综合性和实际应用性的题较多，有利于学生掌握所学内容、提高分析问题和解决问题的能力。

4. 以简介和附录的形式为学生展望新知识留下窗口，以开阔学生的视野，为进一步拓宽数学知识指出方向。

本教材主要由哈尔滨工业大学数学系各教研室教师编写，东北电力学院、黑龙江科技学院、鞍山师范学院、大庆石油学院等学校的教师参加了部分章节的编写工作，哈尔滨工业大学数学系富景隆、杨克劭、曹彬、戚振开、薛小平五位教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见。

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

哈尔滨工业大学工科数学教材编写委员会

2000 年 5 月

# 第1章　一元多项式

多项式是代数学研究的古老课题，也是代数学研究的基本对象之一。近年来，由于用"非线性方法"处理工程和技术问题的增多，多项式方程组的计算与求解在工程计算中就显得日趋重要，因此学习和掌握有关多项式的一些基本知识对工科专业的学生来说亦有必要。

在中学代数课程中已介绍过不少有关多项式的知识，主要为多项式的具体运算，而高等代数则以多项式的理论为主，即讨论多项式的一般规律。

多项式理论一般包括一元多项式和多元多项式两部分。本书只介绍一元多项式，为了解多项式理论起一个"入门"的作用，也为今后学习相似矩阵的标准形打一个基础。

本章主要介绍：

1. 数环与数域；
2. 一元多项式的带余除法；
3. 最大公因式及辗转相除法；
4. 一元多项式的因式分解；
5. 重因式的判断；
6. 多项式的根。

## 1.1　数环与数域

我们知道整数集 **Z** 可以进行加、减、乘三种运算，但不能进行除法运算，用代数学的术语来说，整数集 **Z** 对加、减、乘三种运算**封闭**，但对除法运算不封闭。而有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 则对加、减、乘、除这四种运算（也称四则运算）都封闭。

除了上述熟知的四种数集，是否还有其他数集可以对四则运算中的某几种运算封闭呢？我们来看两个例子。

**【例 1.1】**　令

$$\mathbf{F}=\{a+b\sqrt{2}\mid \forall\, a,b\in Q\}$$

（符号 $\forall$ 表示任意的意思，即 $a,b$ 为 $Q$ 中任意元素），则 **F** 对四则运算封闭。

易见，**F** 中含不为 0 的元素，例如 $a=1,b=0$，那么 $1\in\mathbf{F}$。下面验证 **F** 对四则运算封闭。令

$$\alpha=a_1+b_1\sqrt{2},\beta=a_2+b_2\sqrt{2}\text{，其中 }a_1,a_2,b_1,b_2\in Q$$

于是

$$\alpha\pm\beta=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}$$

$$\alpha\cdot\beta=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}$$

现设 $\beta\neq 0$，即 $a_2,b_2$ 不同时为 0，则

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}=$$
$$\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$$

因为$a_1\pm a_2,b_1\pm b_2,a_1a_2+2b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2,\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2},\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$(注意$a_2^2-2b_2^2\neq 0$)都是有理数,所以在**F**中可进行四则运算。

**【例 1.2】** 将例 1.1 中的数集**F**作一改动,变为

$$\mathbf{R}=\{a+b\sqrt{2}\,|\,\forall\, a,b\in\mathbf{Z}\}$$

由例 1.1 的验证可知,**R**对加、减、乘三种运算封闭,但对除法不封闭。

同学们可以想象到,按例 1.1 的构造方式可以在有理数集与实数集之间得到无穷多个对四则运算封闭的数集;也可以在整数集基础上用例 1.2 的方式得到无穷多个对加、减、乘三种运算封闭的数集。由此可见,在四则运算中某些运算封闭是很多数集的共性。下面我们给出反映这种对运算封闭性质的代数学中两个常见的概念。

**【定义 1.1】** 令**R**是一非空数集,若**R**对加、减、乘三种运算封闭,即对**R**中任意二个数$a$、$b$,其和、差、积$(a+b,a-b,ab)$都在**R**中,则称**R**是一个**数环**。

**【定义 1.2】** 令**F**是至少含一个不为 0 的数的数集,若**F**对四则运算封闭,则称**F**是一个**数域**。

现在我们可以说例 1.1 中的数集**F**为一数域,当然,有理数集、实数集、复数集都是数域。例 1.2 中的数集**R**为一数环,同样,我们称整数集为整数环。

**注** 1. 数域都是数环,但数环可能不是数域;

2. 在数域中做除法时,0 不能做除数;

3. 数环、数域都是考虑了运算的数集。

**【命题】** 任何数域都包含有理数域。

**【证明】** 设**F**为数域,那么**F**中有不为 0 的元$a$。于是$a-a=0\in\mathbf{F}$,$\frac{a}{a}=1\in\mathbf{F}$,再由 1 通过加法可以得出一切正整数;而 0 减去(一切)正整数就得到(一切)负整数。因而全体整数在**F**中。通过除法,可得一切有理数在**F**中。

**问题 1** 单独一个数 0 能否构成一个数环?能否构成一个数域?

**问题 2** 任何数环都包含整数环吗?

# 1.2 一元多项式的运算

## A. 一元多项式环

一元多项式的概念及运算大家都有所了解,本节只作一简单介绍。

**【定义 1.3】** 设**F**为数域,$x$是一符号(也称未定元),形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \tag{1.1}$$

称为**F**上的一个一元多项式,其中$n$为非负整数,$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\in\mathbf{F}$。

$a_ix^i$(令$a_0x^0=a_0$)称为该多项式的$i$次项,$a_i$称为$i$次项的系数,$a_0$又称为常数项。当$a_n\neq$

0 时，$a_nx^n$ 称为首项，$a_n$ 称为首项系数，$n$ 称为该多项式的次数。若把(1.1)中的多项式记为 $f(x)$，该多项式的次数常记为 $\deg f(x)$（有时简记为 $\deg f$）。各项系数全为 0 的多项式记为 0，称为零多项式。零多项式的次数规定为 $-\infty$（也有不规定其次数的）。

为书写方便，常约定：

1. 系数为 0 的项可省略不写（自然也可添上一些系数为 0 的项）；

2. 系数为 1 的项可把系数 1 略去不写。

数域 $\mathbf{F}$ 上一元多项式的集合常用 $\mathbf{F}[x]$ 表示，且 $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}[x]$。

**【定义 1.4】** 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}[x]$，如果它们同次项的系数都相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记做 $f(x) = g(x)$。

现设

$$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$$

**【定义 1.5】** $\mathbf{F}[x]$ 中的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和（假定 $n \geqslant m$）定义为

$$h(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

（注意：因 $m \leqslant n$，我们可为 $g(x)$ 添上一些系数为 0 的项），记做 $h(x) = f(x) + g(x)$。

**【定义 1.6】** $\mathbf{F}[x]$ 中多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积定义为

$$h(x) = a_nb_mx^{n+m} + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x^{n+m-1} + \cdots + (a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0)x^i + \cdots + a_0b_0$$

记为 $h(x) = f(x)g(x)$，其中 $h(x)$ 的第 $i$ 次项的系数为 $c_i = \sum\limits_{j+k=i} a_jb_k$。

由定义可知，对任意多项式 $f(x)$ 有如下关系式

$$0 + f(x) = f(x) \qquad 1 \cdot f(x) = f(x)$$

$$0 \cdot f(x) = 0 \qquad f(x) + (-f(x)) = 0$$

其中 $-f(x)$ 是由 $f(x)$ 的各项系数变号而得到的多项式。

多项式的减法可以由多项式的加法得出

$$g(x) - f(x) = g(x) + (-f(x))$$

易于验证，多项式的加法、乘法满足以下算律：

(1) 加法交换律

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

(2) 加法结合律

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

(3) 乘法交换律

$$f(x)g(x) = g(x)f(x)$$

(4) 乘法结合律

$$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$$

事实上，若设 $h(x) = c_tx^t + \cdots + c_1x + c_0$，则

$$(f(x)g(x))h(x) = \sum_{r=0}^{n+m+t}\Big(\sum_{k+l=r}\Big(\sum_{i+j=k} a_ib_j\Big)c_l\Big)x^r =$$

$$\sum_{r=0}^{n+m+t}\Big(\sum_{i+j+l=r}a_ib_jc_l\Big)x^r =$$
$$\sum_{r=0}^{n+m+t}\Big(\sum_{i+k=r}a_i\Big(\sum_{j+l=k}b_jc_l\Big)\Big)x^r =$$
$$f(x)(g(x)h(x))$$

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

从上面的论述可以看出 $\mathbf{F}[x]$ 对加、减、乘三种运算封闭，这很像数环，因而我们也把 $\mathbf{F}[x]$ 称为**一元多项式环**(简称多项式环)。

易见，多项式的次数与运算之间有如下关系

$$\deg(f(x)\pm g(x)) \leqslant \max(\deg f(x),\deg g(x))$$
$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x)+\deg g(x)$$

特别地，我们有 $f(x)g(x)=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 或者 $g(x)=0$。

## B. 带余除法

两个多项式相除，可能得到一个多项式，也可能得不到一个多项式。我们有必要研究一下多项式的除法。

**【定义 1.7】** 令 $f(x),g(x)\in\mathbf{F}[x]$，若存在多项式 $q(x)\in\mathbf{F}[x]$，使得 $f(x)=g(x)q(x)$，就说 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记做 $g(x)\mid f(x)$；否则说 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记做 $g(x)\nmid f(x)$。

当 $g(x)\mid f(x)$ 时，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式，而 $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式。

关于整除有如下一些性质：

(1) 若 $g(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，则 $h(x)\mid f(x)$。

(2) 若 $g(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid g(x)$，那么 $f(x)=cg(x)$，其中 $c$ 是 $\mathbf{F}$ 中一非零常数。

(3) 若 $h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，则 $h(x)\mid f(x)\pm g(x)$。

(4) 每一多项式可整除零多项式，也可被任一零次多项式整除。

我们只验证 2，其余留给读者验证。

由条件及多项式整除的定义，应有 $q(x)$ 与 $h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x),g(x)=f(x)h(x)$$

于是

$$f(x)=f(x)h(x)q(x)$$
$$f(x)(1-h(x)q(x))=0$$

若 $f(x)\neq 0$，则

$$1-h(x)q(x)=0,h(x)q(x)=1$$

从而 $\deg h(x)+\deg q(x)=0$，由此得

$$\deg h(x)=0,\deg q(x)=0$$

即 $q(x)$ 为一非零常数 $c$，故 $f(x)=cg(x)$。

若 $f(x)=0$，此时 $g(x)=0$，取 $q(x)$ 为一非零常数 $c$ 即可。

一般情况下，我们有：

**【定理 1.1】** 设 $f(x),g(x)\in\mathbf{F}[x]$，且 $g(x)\neq 0$，那么存在 $\mathbf{F}$ 上的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \tag{1.2}$$

其中或者 $r(x)=0$，或者 $\deg r(x)<\deg g(x)$；满足以上条件的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 只有惟一

的一对。

**【证明】** 先证 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的存在性。

若 $\deg f(x) < \deg g(x)$，可取 $q(x) = 0$，$r(x) = f(x)$。

现假定 $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$，把 $f(x)$ 与 $g(x)$ 按 $x$ 的降幂写出

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

其中 $a_n \neq 0$，$b_m \neq 0$，且 $n \geqslant m$。

令
$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$$

易见 $\deg f_1(x) < \deg f(x)$。如果 $f_1(x) = 0$ 或 $\deg f_1(x) < \deg g(x)$，问题得证。此时 $r(x) = f_1(x)$，$q(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$。否则，我们用同样的方法可得 $\mathbf{F}$ 上一多项式 $f_2(x)$

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x)$$

这里 $a_{n_1}$ 是 $f_1(x)$ 的首项系数，$f_2(x)$ 有以下性质：或者 $f_2(x) = 0$ 或者 $\deg f_2(x) < \deg f_1(x)$。

这样作下去，由于 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 的次数是递降的，最后一定可以得到多项式 $f_k(x)$

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}g(x)$$

而 $f_k(x) = 0$ 或 $\deg f_k(x) < \deg g(x)$。

归纳上述过程，我们可得

$$f(x) = g(x)\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}\right) + f_k(x)$$

这样 $q(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}$ 与 $r(x) = f_k(x)$ 满足(1.2)的要求。

再证 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的惟一性。

若还有 $q_1(x)$，$r_1(x) \in \mathbf{F}[x]$，使得 $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$，且满足 $r_1(x) = 0$ 或 $\deg r_1(x) < \deg g(x)$，那么有

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$$
$$g(x)(q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x) \tag{1.3}$$

若 $r_1(x) - r(x) \neq 0$，那么 $q(x) - q_1(x)$ 也不等于零。此时 $\deg\ (r_1(x) - r(x)) < \deg g(x)$，而等式(1.3)左端的次数大于等于 $g(x)$ 的次数，这不可能，故必有

$$r_1(x) = r(x),\ q(x) = q_1(x)$$

证毕

(1.2)中的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 分别叫做 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式与余式，而求 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的方法称为带余除法。应注意的是定理1.1的证明不仅是对结论的证明，而且也给出了求 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的具体方法与步骤。

**【推论】** $g(x) \mid f(x)$ 当且仅当 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x) = 0$。

**【例 1.3】** 设

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$
$$g(x) = x^2 - 3x + 1$$

求以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式与余式。

**【解】** 我们以如下算式进行运算

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x+11 \\
\hline
x^2-3x+1 & 2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 \\
 & 2x^4-6x^3+2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 3x^3+2x^2-5x+6 \\
 & \quad 3x^3-9x^2+3x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 11x^2-8x+6 \\
 & \qquad 11x^2-33x+11 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 25x-5
\end{array}
$$

所以，商式 $q(x) = 2x^3 + 3x + 11$，余式 $r(x) = 25x - 5$。

**问题 1** 设 $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1$ 都是数域且 $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}_1$，又设 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}[x] \subseteq \mathbf{F}_1[x]$，$g(x) \neq 0$。若 $g(x)$ 在 $\mathbf{F}[x]$ 中不整除 $f(x)$，那么在 $\mathbf{F}_1[x]$ 中 $g(x)$ 是否整除 $f(x)$？

**问题 2** 平行于定理 1.1，写出整数的带余除法表达式。

## 1.3 最大公因式

设 $\mathbf{F}$ 是一数域，$f(x), g(x), h(x) \in \mathbf{F}[x]$。若 $h(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，则称 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。

**【定义 1.8】** 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式，若 $d(x)$ 能被 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的每一个公因式整除，那么称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**。

**【例 1.4】** $x - \sqrt{2}$，$x + \sqrt{2}$，$x^2 - 2$ 都是 $x^4 - 4$ 与 $x^4 - 4x^2 + 4$ 的公因式，但 $x^2 - 2$ 是它们的最大公因式。

**注** 对于任意多项式 $f(x)$，$f(x)$ 是 $f(x)$ 与 0 的一个最大公因式，特别地，两个零多项式的最大公因式就是 0；若 $g(x) \mid f(x)$，那么 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式；若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，那么对任一 $0 \neq c \in \mathbf{F}$，$cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式（读者可以根据定义 1.8 自己证明）。因此，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式存在，就不是惟一的，但彼此之间差一常数因子，它们之间有惟一的一个首项系数为 1（这样的多项式称为首一多项式）的最大公因式，记为 $(f(x), g(x))$。

下面我们将研究最大公因式的存在性。

**【引理】** 若对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有等式

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \tag{1.4}$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 和 $g(x)$ 与 $r(x)$ 有相同的公因式，进而，有相同的最大公因式。

**【证明】** 若 $d(x)$ 是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个公因式，即 $d(x) \mid g(x)$，$d(x) \mid r(x)$，那么由 (1.4)，$d(x) \mid f(x)$，这就是说 $d(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式。

反之，若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式，即 $d(x) \mid f(x)$，$d(x) \mid g(x)$，那么由 (1.4)，$d(x) \mid r(x)$，故 $d(x)$ 也是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个公因式。

若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，$d_1(x)$ 是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的一个最大公因式，由上面的讨论知，必有 $d_1 \mid d(x)$，$d(x) \mid d_1(x)$。因而 $d(x) = cd_1(x) \mid (c \in \mathbf{F})$。 **证毕**

**【定理 1.2】** 对于 $\mathbf{F}[x]$ 中两个多项式 $f(x), g(x)$，最大公因式 $(f(x), g(x))$ 存在，且存在 $u(x), v(x) \in \mathbf{F}[x]$，使得

$$(f(x), g(x)) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

**【证明】** 若 $f(x), g(x)$ 有一个为零，比如说 $g(x) = 0$，那么 $f(x)$ 就是一个最大公因式，

若其首项系数为 $c \neq 0$，那么

$$(f(x),0) = c^{-1} \cdot f(x) + 1 \cdot 0$$

下面不妨设 $g(x) \neq 0$，按带余除法有 $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$；若 $r_1(x) \neq 0$，又有 $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$；若 $r_2(x) \neq 0$，再用 $r_2(x)$ 去除 $r_1(x)$，得商式 $q_3(x)$，余式 $r_3(x)$；如此辗转相除下去，显然所得余式的次数不断降低，即

$$\deg g(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \cdots$$

因此在有限次之后，必然有余式为零，于是我们有一串等式

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)q_1(x) + r_1(x) \\
g(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x) \\
&\vdots \\
r_{i-2}(x) &= r_{i-1}(x)q_i(x) + r_i(x) \\
&\vdots \\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x) \\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)q_{k+1}(x) + 0
\end{aligned}$$

$r_k(x)$ 与 0 的最大公因式是 $r_k(x)$。根据以上说明，$r_k(x)$ 也就是 $r_k(x)$ 与 $r_{k-1}(x)$ 的一个最大公因式；同样的理由，逐步推上去，$r_k(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

由以上等式的倒数第二个，我们有

$$r_k(x) = r_{k-2}(x) - r_{k-1}(x)q_k(x)$$

然后用上面的等式逐个地消去 $r_{k-1}(x),\cdots,r_1(x)$，再并项就得到

$$r_k(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

若 $r_k(x)$ 首项系数为 $c \neq 0$，则

$$c^{-1}r_k(x) = (f(x),g(x)) = f(x)(c^{-1}u(x)) + g(x)(c^{-1}v(x))$$

**证毕**

上面我们不仅证明了任意两个多项式的最大公因式的存在性，也获得了求出这样公因式的实际方法，这种方法叫做**辗转相除法**。一般可用下面形式表示

| | | | |
|---|---|---|---|
| $q_2(x)$ | $g(x)$ | $f(x)$ | $q_1(x)$ |
| | $r_1(x)q_2(x)$ | $g(x)q_1(x)$ | |
| | $r_2(x)$ | $r_1(x)$ | $q_3(x)$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | |

**【例 1.5】** 求 $(f(x),g(x))$ 及 $u(x),v(x)$，使

$$(f(x),g(x)) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

其中 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$，$g(x) = x^2 + x - 2$。

**【解】** 用辗转相除法，有

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{4}x$ | $x^2 + x \quad -2$ | $x^3 + \quad 2x^2 \quad -5x \quad -6$ | $x+1$ |
| | $x^2 + x$ | $x^3 + \quad x^2 \quad -2x$ | |
| | $-2$ | $x^2 \quad -3x \quad -6$ | |
| | | $x^2 \quad +x \quad -2$ | |
| | | $-4x \quad -4$ | $2x+2$ |
| | | $-4x \quad -4$ | |
| | | $0$ | |

这里 $r_1(x)=-4x-4, r_2(x)=-2, r_3(x)=0$,故

$$(f(x),g(x))=1$$

且由

$$f(x)=g(x)(x+1)+(-4x-4)$$

$$g(x)=(-4x-4)(-\frac{1}{4}x)+(-2)$$

得

$$1=-\frac{1}{2}(-2)=-\frac{1}{2}(g(x)-r_1(x)(-\frac{1}{4}x)=$$

$$-\frac{1}{2}(g(x)-(f(x)-g(x)(x+1))\frac{-x}{4})=$$

$$-\frac{x}{8}f(x)+(\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2})g(x)$$

即可取 $u(x)=-\frac{x}{8}, v(x)=\frac{1}{8}(x^2+x-4)$。

**【定义 1.9】** 设 $f(x),g(x)\in \mathbf{F}[x]$,如果

$$(f(x),g(x))=1$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**。

如果 $f(x),g(x)$ 互素,则 $f(x),g(x)$ 的任何公因式都是非零常数,反之也是对的。

**【定理 1.3】** 设 $f(x),g(x)\in \mathbf{F}[x]$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是存在 $u(x)$,$v(x)\in \mathbf{F}[x]$,使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

**【证明】** 必要性由定理 1.2 得到。反之,若

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

由 $(f(x),g(x))\mid f(x)$, $(f(x),g(x))\mid g(x)$,知 $(f(x),g(x))\mid 1$,这样 $(f(x),g(x))$ 为一非零常数,又 $(f(x),g(x))$ 首项系数为 1,故 $(f(x),g(x))=1$。 **证毕**

由这个定理可推出关于互素多项式如下两个重要性质:

**【性质 1.1】** 若 $f(x)\mid g(x)h(x)$,且 $(f(x),g(x))=1$,则 $f(x)\mid h(x)$。

事实上,由 $(f(x),g(x))=1$ 可知,有 $u(x),v(x)$,使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

等式两边乘以 $h(x)$,得

$$f(x)u(x)h(x)+g(x)v(x)h(x)=h(x)$$

因 $f(x)\mid g(x)h(x)$,故 $f(x)$ 整除等式左端,于是 $h(x)$ 也能被 $f(x)$ 整除。

**【性质 1.2】** 若 $f_1(x)\mid g(x)$, $f_2(x)\mid g(x)$,且 $(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。

事实上,由 $f_1(x)\mid g(x)$ 有

$$g(x)=f_1(x)h_1(x) \tag{1.5}$$

因 $f_2(x)\mid g(x)$,即 $f_2(x)\mid f_1(x)h_1(x)$,又 $(f_1(x),f_2(x))=1$,由性质 1.1 有 $f_2(x)\mid h_1(x)$,即

$$h_1(x)=f_2(x)h_2(x) \tag{1.6}$$

将式(1.6)代入式(1.5),得

$$g(x)=f_1(x)f_2(x)h_2(x)$$

亦即 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。

关于两个多项式的公因式、最大公因式的概念及讨论可以推广到 $n$ 个多项式的情形。

如果 $\varphi(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 中每一个多项式的因式,则称 $\varphi(x)$ 是 $f_1(x)$,

$f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的一个公因式。进而，若 $\varphi(x)$ 能被 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的任一公因式整除，则称 $\varphi(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 的一个最大公因式。

我们仍用符号 $(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ 表示 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式。

对于 $n$ 个多项式 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$，我们可以得出平行于定理 1.2、定理 1.3 的结论，读者试自已写出。

最后明确一个问题，两个多项式的公因式会因系数域的扩大而不同，如例 1.4 中的多项式 $x^4-4$ 与 $x^4-4x^2+4$ 在实数域上 $x-\sqrt{2}$ 及 $x+\sqrt{2}$ 都是它们的公因式，但在有理数域上这两个一次多项式不能认为是它们的公因式；但两个多项式的最大公因式却不因系数域的扩大而改变。同学们可作为一个问题来思考，为什么会是这样的呢？

**【例 1.6】** 若 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$

**【证明】** 因 $(f(x),g(x))=1$，存在 $u(x),v(x)\in \mathbf{F}[x]$，使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \tag{1.7}$$

我们有

$$f(x)u(x)+g(x)u(x)-g(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

$$(f(x)+g(x))u(x)+g(x)(v(x)-u(x))=1 \tag{1.8}$$

即 $(f(x)+g(x),g(x))=1$。同理 $(f(x)+g(x),f(x))=1$，即有 $u_1(x),v_1(x)\in \mathbf{F}[x]$，使得

$$(f(x)+g(x))u_1(x)+f(x)v_1(x)=1 \tag{1.9}$$

将 (1.9) 的两边乘以 $g(x)$ 并将 $g(x)=f(x)g(x)v_1(x)+(f(x)+g(x))g(x)u_1(x)$ 代入 (1.8)，合并同类项后可得

$$(f(x)+g(x))u_2(x)+f(x)g(x)v_2(x)=1$$

即

$$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$$

**问题 1** 两个整数的最大公因数及整数互素的概念同学们在中、小学已学过，试写出并证明平行于定理 1.2、定理 1.3 的结论。

**问题 2** 设 $f(x),g(x),d(x)\in \mathbf{F}[x]$，且有

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$$

能否断定 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式？

## 1.4 一元多项式的因式分解

在中学代数里我们学过一些具体方法把一个多项式分解为不能再分的因式之积，但那时有些问题没有明确：一是何为不能再分，二是每个多项式是否都能分解成不能再分的多项式之积，分法是否惟一？

**【例 1.7】**

$$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$$

将 $x^4-4$ 看做 $\mathbf{Q}[x]$（$\mathbf{Q}$ 表示有理数域）中元素，上面的分解已不能再分；但看做 $\mathbf{R}[x]$ 中元素（$\mathbf{R}$ 表示实数域），还可继续分解

$$x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$$

且在 $\mathbf{R}[x]$ 中已不能再分；但作为 $\mathbf{C}[x]$（$\mathbf{C}$ 表示复数域）中元素又可进一步分解，因 $(x^2+2)=$

$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$，当然这的确不能再分了。

**【定义 1.10】** 数域F上多项式 $f(x)(\deg f(x) \geqslant 1)$ 如果不能表示为 $\mathbf{F}[x]$ 中两个次数均小于 $\deg f(x)$ 的多项式的积，则称 $f(x)$ 为 $\mathbf{F}[x]$ 中**不可约多项式**。否则称 $f(x)$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 中**可约多项式**。

按照定义，一次多项式总是不可约的。对于零多项式与零次多项式，我们既不说它们是可约的，也不说它们不可约，这正如整数中的 0 与 1 既不是素数也不是合数一样。

我们先列出不可约多项式的若干性质。

(1) 令 $f(x), p(x) \in \mathbf{F}[x]$，且 $p(x)$ 不可约，则或者 $p(x) \mid f(x)$，或者 $(p(x), f(x)) = 1$。

事实上，设 $(f(x), p(x)) = d(x)$，则 $d(x) \mid p(x)$，由于 $p(x)$ 不可约，故 $d(x) = 1$ 或 $d(x) = cp(x)$ ($c \in \mathbf{F}$，$c^{-1}$ 为 $p(x)$ 的首项系数)。如果 $d(x) = 1$，则 $(f(x), p(x)) = 1$，如果 $d(x) = cp(x)$，则 $p(x) \mid f(x)$。

(2) 设 $p(x)$ 为不可约多项式，且 $p(x) \mid f(x)g(x)$，则或者 $p(x) \mid f(x)$，或者 $p(x) \mid g(x)$。

事实上，若 $p(x) \mid f(x)$，则结论成立。否则，由性质(1) 知 $(f(x), p(x)) = 1$，再由 1.3 节性质 1.1 知 $p(x) \mid g(x)$。

(3) 设 $p(x)$ 为不可约多项式，且 $p(x) \mid f_1(x)\cdots f_k(x)$，则 $p(x)$ 必整除 $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ 中的某一 $f_i(x)$。

**【定理 1.4】** **(因式分解惟一性定理)** 数域 F 上任一次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以惟一地分解成 F 上不可约多项式的乘积。所谓惟一性是指，如果有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2\cdots(x)p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

那么必有 $s = t$，且适当排列因式次序后，有

$$p_i(x) = c_i q_i(x) \qquad i = 1, 2, \cdots, s$$

其中 $c_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 是F中不为0的数，$p_i(x), q_i(x) (i = 1, 2, \cdots, s)$ 是F上的不可约多项式。

**【证明】** 先证分解式的存在。我们对 $f(x)$ 的次数 $n$ 应用数学归纳法。

当 $n = 1$ 时，$f(x)$ 是不可约的，故结论成立。现假设对次数低于 $n$ 的多项式结论成立。设 $f(x)$ 是次数为 $n$ 的多项式，若它是不可约的，则定理已成立。否则，若 $f(x)$ 是可约的，即有

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) \tag{1.10}$$

其中 $f_1(x), f_2(x)$ 的次数都低于 $f(x)$ 的次数 $n$，于是由归纳假设，$f_1(x), f_2(x)$ 都可以分解成 F 上不可约多项式的乘积，把这两个分解式代入(1.10)，就将 $f(x)$ 分解成 F 上不可约多项式的乘积，这就证明了分解式的存在。

其次证明惟一性。设

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x) \tag{1.11}$$

其中 $p_i(x), q_j(x) (i = 1, 2, \cdots, s, j = 1, 2, \cdots, t)$ 都是不可约的。

我们对 $f(x)$ 的次数 $n$ 作数学归纳法，显然当 $n = 1$ 时结论成立。假设对于次数低于 $n$ 的多项式惟一性成立。

由式(1.11) 有 $p_1(x) \mid q_1(x)\cdots q_t(x)$，据本节性质(3)，$p_1(x)$ 必整除其中的一个，不妨设

$$p_1(x) \mid q_1(x)$$

因 $q_1(x)$ 也不可约，故有

$$p_1(x) = c_1 q_1(x), c_1 \in F$$

于是，把 $p_1(x) = c_1 q_1(x)$ 代入式(1.11)，并消去 $q_1(x)$，得

$$c_1 p_2(x)\cdots p_s(x) = q_2(x)\cdots q_t(x) = g(x)$$

因 $\deg g(x) < n$，由归纳假设，有

$$s-1=t-1 \qquad \text{即} \qquad s=t$$

并且适当排列因式的次序后，有

$$p_i(x)=c_iq_i(x) \quad (i=2,\cdots,s), c_i \in \mathbf{F}$$

综上所述，即得

$$s=t,\ p_i(x)=c_iq_i(x) \qquad i=1,2,\cdots,s$$

惟一性得证。 **证毕**

在多项式 $f(x)$ 的因式分解中，可将每一个不可约因式的首项系数提出来，使它们成为首项系数为 1 的多项式，再把分解式中相同的不可约多项式合并到一起，这时有

$$f(x)=a_0p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_t^{n_t}(x)$$

其中 $a_0$ 为 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x),\cdots,p_t(x)$ 为互不相同的不可约多项式，$n_1,\cdots,n_t$ 是正整数。**这种分解式称为标准分解式。**

**【定理 1.5】** 设 $f(x),g(x) \in \mathbf{F}[x]$，且

$$f(x)=ap_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_t^{m_t}(x)q_1^{m_{t+1}}(x)\cdots q_l^{m_{t+l}}(x)$$
$$g(x)=bp_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_t^{n_t}(x)h_1^{n_{t+1}}(x)\cdots h_k^{n_{t+k}}(x)$$

分别为 $f(x),g(x)$ 的标准分解式，则

$$(f(x),g(x))=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$$

其中 $r_i=\min\{m_i,n_i\}, i=1,2,\cdots,t; q_j(x)$ 不同于任何 $h_s(x), j=1,2,\cdots,l; s=1,2,\cdots,k$。

请同学们自已证明这个定理。

上述利用标准分解式求最大公因式的方法不能代替辗转相除法，因为在一般情况下没有一个实际分解多项式为不可约因式的乘积的方法。

## 1.5 重因式

**【定义 1.11】** 设 $p(x)$ 为 $\mathbf{F}$ 上不可约多项式，若 $p^k(x)\mid f(x)$，而 $p(x)^{k+1}\nmid f(x)$，则不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 $k$ **重因式**。

这时，我们也称 $p^k(x)$ 恰整除 $f(x)$。特别，$k=0$ 时，我们不认为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的真因式；$k=1$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式；$k \geqslant 2$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式。

如将 $f(x)$ 作标准因式分解，当然很容易判断 $f(x)$ 有无重因式，可惜的是这实际上往往做不到。我们需研究一个另外的方法来判断 $f(x)$ 有无重因式。

**【定义 1.12】** 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k \in \mathbf{F}[x]$，称多项式

$$\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的导数，记做 $f'(x)$。

$f'(x)$ 的导数称为 $f(x)$ 的二阶导数，记做 $f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$。一般把 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 $k$ 阶导数，记为 $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$。导数概念源于微积分学，同学们在那门课程中将会全面学习。

关于多项式的导数有下面性质：

(1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$；

(2) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(3) $(f^m(x))' = mf^{m-1}(x)f'(x)$;

(4) $f'(x) = 0$ 当且仅当 $f(x) = c \in \mathbf{F}$;

(5) $\deg f(x) \geqslant 1$ 时,$\deg f'(x) = \deg f(x) - 1$。

读者可根据导数定义自行推出这些关系式。

**【定理 1.6】** 设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 $k(k\geqslant 1)$ 重因式,则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。

**【证明】** 由 $p^k(x)\mid f(x)$,于是有 $q(x)\in \mathbf{F}[x]$,使得

$$f(x) = p^k(x)q(x),\quad (p(x),q(x)) = 1$$

从而

$$f'(x) = kp^{k-1}(x)p'(x)q(x) + p^k(x)q'(x) = p^{k-1}(x)(kp'(x)q(x) + p(x)q'(x))$$

由 $(p(x),q(x)) = 1$,$(p(x),p'(x)) = 1$ 知,$p(x)\nmid kp'(x)q(x)$。因此 $p^{k-1}(x)$ 恰整除 $f'(x)$,即 $p^{k-1}(x)$ 为 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。 **证毕**

**【推论 1】** 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式。

设 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k$ 重因式。由定理 1.6 知,$k\geqslant 2$ 当且仅当 $p(x)\mid f(x)$,$p(x)\mid f'(x)$,即结论成立。

**【推论 2】** 多项式 $f(x)$ 无重因式当且仅当 $(f(x),f'(x)) = 1$。

由定理 1.6 及其推论 1 得出此结论。

**【例 1.8】** 判断 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 有无重因式,如果有,试求出其重数。

**【解】** $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$。用辗转相除法求得

$$(f(x),f'(x)) = x - 1$$

因此 $f(x)$ 仅有一重因式 $x-1$,其重数为 2。

**【例 1.9】** 试判断 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 有无重因式。

**【解】** $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$$f(x) = f'(x) + \frac{x^n}{n!}$$

而 $(f(x),f'(x)) = (f'(x),\frac{x^n}{n!}) = 1$,因此 $f(x)$ 没有重因式。

**问题** 令 $\mathbf{F},\mathbf{F}_1$ 是两个数域且 $\mathbf{F}_1\supset\mathbf{F}$。如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{F}$ 上没有重因式,那么把 $f(x)$ 看做 $\mathbf{F}_1$ 上的多项式,它有没有重因式?

## 1.6 多项式的根

在这一节里,我们从另一个角度来看待由一个符号 $x$ 确定的多项式,即把一元多项式看做是一个函数。对于一个多项式 $f(x)$,$x$ 的取值范围可以是某一数域 $\mathbf{F}$,而 $f(a)$ 则是 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的值。我们也称 $f(x)$ 为数域 $\mathbf{F}$ 上的多项式函数。

如果当 $x = a$ 时 $f(a) = 0$,称 $a$ 为 $f(x)$ 的零点,也说 $a$ 是多项式方程 $f(x) = 0$ 的根或解(一般直接称 $a$ 为多项式 $f(x)$ 的根)。由多项式的带余除法知,$a$ 为 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x-a)\mid f(x)$。事实上,假定 $f(x)\neq 0$,且 $\deg f(x)\geqslant 1$,那么

$$f(x)=(x-a)q(x)+r$$

这里 $r=0$ 或者 $r$ 为零次多项式，即 $r\in \mathbf{F}$。显然，$f(a)=0$ 当且仅当 $r=0$，即 $(x-a)\mid f(x)$。

若 $x-a$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 0)$ 重因式，则称 $a$ 为 $f(x)$ 的 $k$ 重根。$k=0$，$a$ 不是根；$k=1$，$a$ 称为单根；$k>1$，$a$ 称为重根。

**【定理 1.7】** $\mathbf{F}[x]$ 中 $n(\geqslant 0)$ 次多项式 $f(x)$ 在 $\mathbf{F}$ 中至多有 $n$ 个根，其中 $k$ 重根算 $k$ 个根。

上述定理可用归纳法对多项式的次数证之，不再叙述。

**【定理 1.8】（代数基本定理）** 任何次数大于零的复系数多项式在复数域中必有根。

这个定理是 Gauss 于 1799 年建立的。由于在那个年代求多项式的根是代数学研究的中心问题，故得名为代数基本定理。今天，代数学研究的范围已大大扩展，求多项式的根已不再是代数学的中心了。该定理的证明方法有十几种，但有的所需知识超出本书范围，有的证明冗长，故这里不予证明。

**【推论】** 次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式 $f(x)$ 在复数域上有惟一标准分解式

$$f(x)=c(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=\deg f(x)\geqslant 1$，$c$ 为 $f(x)$ 的首项系数。

由此推论我们可以得到根与系数的关系

设 $\qquad f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ n>0, a_n\neq 0$

在复数域中有 $n$ 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$（其中可能有相同的），因此，$f(x)$ 必能写成 $n$ 个一次因式的乘积

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

把等式右端展开、并项，比较等式两端同次项的系数，便得根与系数间的关系

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n}=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_0}{a_n}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

以上这组等式叫做韦达公式。公式中第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个等式的右端是一切可能的 $k$ 个根的乘积的和乘以 $(-1)^k$，当 $n=2$ 时，就是同学们在中学代数中学过的二次多项式的根与系数关系的韦达定理。

由定理 1.7 我们还可得到：

**【定理 1.9】** 如果多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的次数都不超过 $n$，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $c_1$，$c_2,\cdots,c_{n+1}$ 有相同的值，即

$$f(c_i)=g(c_i),\quad i=1,2,\cdots,n+1$$

那么 $f(x)=g(x)$。

**【证明】** 令 $h(x)=f(x)-g(x)$。如果 $h(x)\neq 0$，则有 $0\leqslant \deg h(x)\leqslant n$。但 $h(c_i)=f(c_i)-g(c_i)=0$，$1\leqslant i\leqslant n+1$，即 $h(x)$ 有 $n+1$ 个根，与定理 1.7 矛盾，故 $h(x)=0$，即 $f(x)=g(x)$。

证毕

实系数多项式在实数域上一般不能分解成一次因式之积。例如 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，而 $x^2+x+1$ 在实数域上不可约。但我们有下面的结论。

**【定理 1.10】** 任一次数大于零的实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上有惟一标准分解式

$$f(x)=c(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s;p_1,\cdots,p_r;q_1,\cdots,q_r$ 全是实数，$c$ 为 $f(x)$ 的首项系数，且 $x^2+p_ix+q_i(i=1,2,\cdots,r)$ 在实数域上不可约。

**【证明】** 我们对 $\deg f(x)$ 作归纳法证明。若 $\deg f(x)=1$，$f(x)=c(x-\alpha)$，结论成立。设 $\deg f(x)<n$ 时结论成立。

假定 $\deg f(x)=n$，$f(x)$ 看做复数域 $\mathbf{C}$ 上的多项式，有 $\alpha\in\mathbf{C}$，使得 $f(\alpha)=0$，即 $(x-\alpha)|f(x)$。

若 $\alpha\in\mathbf{R}$，则 $f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$，$f_1(x)\in\mathbf{R}[x]$，因 $\deg f_1(x)<n$，由归纳假设 $f_1(x)$ 应有上述标准分解。

若 $\alpha\overline{\in}\mathbf{R}$，则 $\alpha$ 的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，即 $(x-\bar{\alpha})|f(x)$。由于 $\alpha\neq\bar{\alpha}$，$(x-\alpha,x-\bar{\alpha})=1$，于是 $(x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha})|f(x)$，$\alpha+\bar{\alpha}$，$\alpha\bar{\alpha}\in\mathbf{R}$，$(\alpha+\bar{\alpha})^2-4\alpha\bar{\alpha}<0$，因而

$$f(x)=(x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha})f_2(x)$$

这里，$(x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha})$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可约，而 $\deg f_2(x)<n$。由归纳假设，$f_2(x)$ 应有上述标准分解。由此得出 $f(x)$ 确有上述标准分解。 **证毕**

## 习　题　1

1. (1) 举出对加法、减法都不封闭，但对乘法封闭的数集的例子。

   (2) 举出对加法、减法封闭，但对乘法不封闭的数集的例子。

2. 令 $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2$ 是任二数域，证明 $\mathbf{F}_1\cap\mathbf{F}_2=\{x|x\in\mathbf{F}_i,i=1,2\}$ 也是数域。

3. 下面的例子中，哪些数集为数环？哪些为数域？

   (1)$\mathbf{F}_1=\{a+bi|a,b\in\mathbf{Q}\}$

   (2)$\mathbf{F}_2=\{a+b\sqrt{-5}|a,b\in\mathbf{Z}\}$

   (3)$\mathbf{F}_3=\{\frac{a}{b}|(a,b)=1,a$ 为偶数，$b$ 为奇数$\}$

   (4)$\mathbf{F}_4=\{a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}|a,b,c\in\mathbf{Q}\}$

4. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商式及余式

   (1)$f(x)=2x^3+x+1,g(x)=3x^2+x-4$

   (2)$f(x)=3x^4+x^3+2x^2-1,g(x)=x^2+3x+2$

5. $m$、$p$、$q$ 适合什么条件时，有

   (1)$x^2+mx-1|x^2+px+q$

   (2)$x^2+mx+1|x^4+px^2+q$

6. 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)$ 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的多项式，其中 $f_1(x)\neq0$ 且 $f_1(x)f_2(x)$ 能被 $g_1(x)g_2(x)$ 整除，而 $g_1(x)$ 能被 $f_1(x)$ 整除，证明 $f_2(x)$ 能被 $g_2(x)$ 整除。

7. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))$，并求 $u(x),v(x)$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$

   (1)$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,g(x)=x^3+x^2-x-1$

   (2)$f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,g(x)=x^2-x-1$