科學圖書大庫

高等工程數學

（第二冊）

譯者 黃友訓

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日再版

高等工程數學

(第二冊)

基本定價 1.60

譯者　黃友訓　私立逢甲學院教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號
承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯者序

本叢書共有六冊原名 Ingenieur-Mathematik ，內容具有許多優點。例如(1)材料新穎而豐富，適合工程師在大學研究高深學問之需要；(2)本書的重點，不在證明許多定理，而在鼓勵讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立解答各習題；(3)介紹新的數學觀念，培養純粹數學的思考方式；(4)各章附有問題與實例，切於實際的應用；(5)每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題之求解更爲重要；(6)本書頗適合於我國各大學工學院所訂新的課程標準。按照新的規定，微積分與微分方程均屬工學院一年級必修科目；讀完微積分與微分方程，接着讀這本書，在程度上有相當的啣接。

本叢書直譯之名，應爲“工程師數學”，根據原著者弁文所說，這六冊叢書是由教工學院的講義整理而成；在證明方面不夠嚴密，但對於工程上的應用特別注重。所以用於工學院比較適合；因此本人決定改用“高等工程數學”此一比較符合原著者數學目的之書名。

本叢書第一冊原著頗多在文字上不能自圓其說（譯者按：原著者本人之德文亦並不高明）與排版錯誤之處，均經譯者逐次予以訂正。

黃友訓謹識

民國五十九年七月於逢甲學院土木工程學系。

弁言

本叢書第一冊開始就講到級數，而將級數戴上"工程師數學"的頭銜者，其用意並非對工程師所指定的一種特殊數學，以表示與自然科學家所用的數學，或與所謂純粹數學有相反的內容之意；本書第一冊所講的級數，主要是針對工科各學系的學生可能應用之問題；就是自然科學的定律也應該就其重點加以說明。決定這一個目標，一則是爲了對教材有所選擇，而此教材主要是滿足直至特許工程師前期考試（ Diplomvorprüfung ；譯者按：德國之 Diplom 學位等於英美之碩士學位）所需要之普通數學講授者。二則本書第一冊中也爲此包含一些工業大學第一學期一開始就習慣採用的教材；於是對於所有———好比由於工業實習———高中畢業後不立即繼續深造的學生而言，容易使之進入高深數學而尋求自修的門徑。

除了對教材有所挑選之外，本人認爲尚有重要的一點，即本叢書與一般數學教授所用的書籍，在數學的方法上大有區別。譬如按照目前的習慣，研讀數學時特別就其通俗性着重於觀念的澄清，進而加以分析，並且劃分其有效境界；但初入世的工程師與自然科學家所面對的問題，是有計劃的或有效驗的觀念問題；從他們感興趣的狹窄領域而言，此觀點對於他們自然較爲親切，而且對於他們日後的任務總要作爲有所依據的準繩。這是爲了工程師數學（簡稱工程數學）所能做的明顯結論，應該在此處就函數觀念中一個例子予以說明。工程學生對於一般的函數觀念，是絲毫不感覺興趣的；通常所觀察病理上的情形，據他們看來，自始就無年興趣或者甚至令人討厭的稀奇古怪之事物。但此處使適合而有效的進入分析的函數，却以解剖（即外科手術，俗稱開刀；在數學上則稱爲運算）爲出發點；借助於運算才產生許多不同的函數：由四則法（即加減乘除之總稱）導致多項式及有理函數；由多項式利用趨於極限的解析運算遂產生幕級數；由積分運算導入特別的超越函數（對數）；又由構成逆函數（或稱反函數）的運算，則以解析的方式導致指數函數與三角函數。然後由三角函數所組成的級數（即福里哀級數）有效的產生進入任意函數的廣大途徑。此外，具有歷史性的分析法，其過程直入十九世紀依

然不生變化；我們也要注意“functio”這個字，它與“operatio”一字相同，都是由並不古老的拉丁文而來，具有“功用”，“作用”，或“機能”（德文稱爲 Verrichtung ）之意義。然而有效驗的觀點並非陳腐的老生長談，在現代的基本學理探討上（以 Lorenzen 一人爲例）（譯者按：Dr. Paul Lorenzen 爲西德 Erlangen 大學之數學教授，著有“數學”一書，共一百七十三頁），業已指出：Lorenzen 博士在數學上對基本理論發生困難的克服，做了有用的一種列式假設，使該理論的確能夠成立。——再則在大部份數學教科書中作爲基礎的函數觀念，對許多應用方面的目的而言，也還是過於狹隘：二十世紀中所引用的一般化函數（例如分配律）已成爲不可或缺的數學理論，而在工程數學的圖示方面亦不能無之；本書決定把一般化函數附加於福里哀級數（ Fouriersche Reihen ）作有效驗的運用。

於是對於純粹數學的思考方式，自然不應該隨便剝奪其所賦與之權利；但如果到處適用的說法以及抽象的澄淸有其必要的話，這種思考的方式總是不可付諸闕如的。凡特許工程師（ Diplomingenieur ；譯者按：凡在德國工業大學各工程學系畢業之學生，均稱爲特許工程師，或稱爲國授工程師）按其地位的固有意義，均負有發展新方法的使命（但非應用陳舊的方法；如用老的方法，那就沒有進大學研讀的必要了！）；他對數學的抽象批評方面所需要者，與對積極有效方面所需要者完全相同。本書中有關利用德得欽氏綫段分割法（ Dedekindsche Schnitte ）對實數的引用各章，不應該當作教育的裝飾品看待；各該章節乃帶來重要的思考方式！尤其每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題的解答求得若干方法更爲重要。附錄的內容絕對不是多餘的。但讀者對各章所附一大堆實際例題，一定要等到融會貫通之後，才好澈底從事於該附錄內容之研讀。爲使讀者百尺竿頭再對各論題作進一步之研究起見，本叢書每冊最後尙且介紹若干參考書籍，以便讀者選購。

本工程數學叢書並不缺乏精良優美的圖形表示。這些圖示，除了具備任何教科書所應有的目的外，對於後起之秀的工程師（讀者按：應指正在大專院校肄業之學生而言）尙有參考研讀之功用。本叢書是屬於袖珍小冊子的性質，因爲作者在此處有意遷就適先所提及的二功用之一：對課堂聽教授講解之領悟應該有所幫助。此時如果它的結構與體裁有若干地方與剛才的聽講稍有偏差時，那是無關宏旨的；對於同一論題從多方面去認識與了解，總屬有益之舉。本書各章末了所附的問題與實例，乃爲了加深讀者的理解而加工修訂的。其目的在使讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立自主的去求解各

課題！

最後，主要是 C. Schmieden 教授對作者所給予寶貴而親切的規勸與忠告，令人萬分感激。又教育委員H.J. Vollrath博士，候補工程師 H.Bött-Chen，及候補數學家 G.W. Thiel 諸位先生對原稿的共同閱讀與脩改，以及對附圖之膽清與描繪，均有莫大之贊助。還有對出版書局的熱誠合作，亦須在此表示感謝之忱．

Detlef Laugwitz　1963年暑假期間於西德 Darmstadt

目　錄

第一章　定積分之定義

(*Der Begriff des bestimmten Integrals*)

近代在數學上最重要的發現，捨微分法與積分法、或稱微積分學莫屬；此一新科學自從阿基米得氏(Archimedes ；譯者按：阿基米得氏爲耶蘇降生前287-212年德國之數學家)以來，經過許多思想家所做重要的準備工作，然後到了十七世紀中葉，由來布尼玆氏(Gottfried Wilhelm Leibniz；譯者按：來布尼玆氏爲1646-1716年代德國的哲學家與數學家)、牛頓氏(Sir Issac Newton；譯者按：牛頓氏爲1642-1727年代英國之數學家與科學家)及其他學者作有系統的研究與發展。其中首先佔有重要之地位者，應爲幾何學上的考慮：積分的引用，其目的乃在面積之計算；而微分法起初是用以決定曲綫切綫的斜率問題。今天對工程技術上的用途而言，這些觀念應該具有比較偏重於有趣味的另一種說法；但我們爲了把這些觀念納入微積分學的領域，首先要採取歷試而證明爲優良可靠的幾何途徑；所以本章一開始就討論定積分之定義。

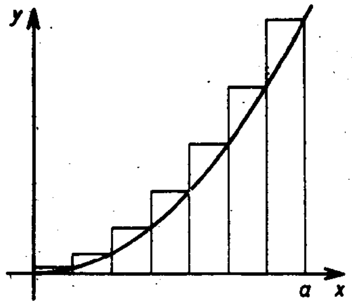

圖 1.　拋物綫之上限和數

爲此可能牽涉及於面積的概念。首先講長方形的面積，它是以長與寬相乘而下其定義的。然後可用人所共知的基本方式計算三角形，或者一般言之，亦可計算多角形的面積，因爲多角形能分成若干三角形的原故。但至此只

是對平面上以直線爲界限的面積下其定義；早在遠古時代，大家對於以曲綫爲界限的面積，亦已提出理論上的要求，此乃顯而易見之事實。誠然已在阿基米得時代就充分利用的一種觀念，應爲：利用多角形使之接近於以曲綫爲界限的範圍，然後求得該範圍之面積，當作多角形所屬劃分明白的面積極限值看待。我們現在着手討論在阿基米得時代亦爲衆所周知的一個問題。設有一塊小平面在 x-y 平面內是以 x 軸，直綫 $x=a$，及拋物綫 $y=x^2$ 爲界限；試問其面積究有多大？我們利用一個“階梯多角形”（Treppenpolygon）使之接近於拋物綫（見第一圖）。此階梯多角形中各個長方形之寬度，均爲 a/n；又其高度則等於每一長方形右邊所屬函數 $y=x^2$ 之值，卽等於

$$\left(k\frac{a}{n}\right)^2\text{，其中 } k=1,\ldots,n.$$

由此 n 個長方形所組成的階梯多角形，其面積 O_n 求得如下：

$$O_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^2\frac{a}{n}=\frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$
$$=\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

如將間隔再予細分，而最後令 n 趨近於無窮大，則得：

$$\lim_{n\to\infty}O_n=\frac{a^3}{3}.$$

此值應該當作位於拋物綫下面一塊小平面（或稱面元素）的面積看待，這由圖上顯然可以看出來的。我們對於這種情形還要比較詳細的予以證明。

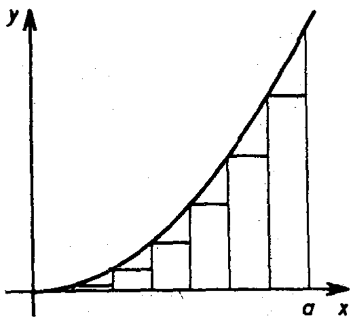

圖 2. 拋物綫之下限和數

其面積為O_n的階梯多角形是"從上限"(譯者按:故有"上限和數"之名稱)接近於我們所討論的曲綫三角形;我們亦可以"從下限"(譯者按:故有"下限和數"之名稱)的接近取上限的接近而代之(見第二圖)。此處求得在左邊長方形的高度值為$y=x^2$又下限階梯多角形之面積如下:

$$U_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{ka}{n}\right)^2\frac{a}{n}=\frac{a^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

顯然亦可寫成下式:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{a^3}{3}.$$

此外,以上二極限值的相等性亦可從第三圖中直接讀出來:如將未加陰影綫的長方形,其總面積恰好等於O_n與U_n之差者,使之一個在一個之上的互作移動而疊合,則得:

$$O_n-U_n=\frac{a^3}{n},$$

因此,事實上對$n\to\infty$而言,乃產生下面的結果:

$$\lim_{n\to\infty}(O_n-U_n)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}O_n=\frac{a^3}{3}=\lim_{n\to\infty}U_n.$$

"上限和數"O_n與"下限和數"U_n所共有的極限值,可當作以曲綫為界限的一塊小平面(或稱面元素)之面積看待。此面積稱為函數$y=x^2$的定積分,以0至a為其極限。

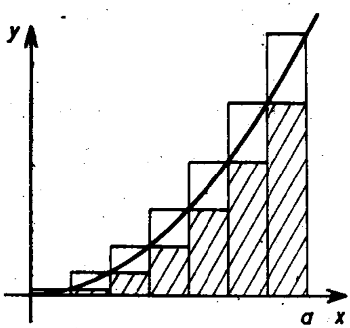

圖 3. 拋物綫積分法

這種作圖法顯然可以完全從特殊的一個例子$y=x^2$予以解釋;與此相當的,我們要就一任意函數$y=f(x)$對這種作圖法尋求徹底的解答。設有一函

數爲 $y=f(x)$，而在區間 $a\leqq x\leqq b$ 的情形下，所求者爲該函數之積分。我們選擇許多間隔點 $a=x_0<x_1<\cdots<x_k<\cdots<x_n=b$，這些點用不着具有相等的距離。我們對於此一函數還要加以假定者，即在每一間隔的區間 $x_{k-1}\leqq x\leqq x_k$ 內及一最小函數值 $\bar{f}_k$；這種情形尤其 $\underline{f}_k$；這種情形尤其是指該函數在整個區間內（$a\leqq x\leqq b$）依然受了限制而言。然後我們構成上限和數（見第四圖）

$$O_n=\sum_{k=1}^{n}\bar{f}_k\,\Delta x_k,\qquad \Delta x_k=x_k-x_{k-1}$$

及下限和數

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\underline{f}_k\,\Delta x_k$$

而下其定義如次：

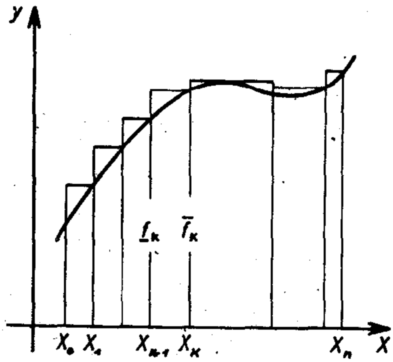

圖 4. 一個函數的上限和數

當區間分劃再作任意之細分時（意卽當最大的 $|\Delta x_k|$ 趨近於零時），假如 O_n 與 U_n 具有一個共同的極限值，而此極限值與區間再劃分的方式毫無關聯的話，則此極限值稱爲關於 $f(x)$ 由 a 至 b 之定積分；寫成如下的形式：

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

〔溯源於來布尼兹氏—— Leibniz ——的如此寫法，有其適合目的性；此種適合目的性必將在繼續演變的過程中顯示出來。這樣的寫法可說明其理由如下：由和數 $O_n=\sum\bar{f}_k\,\Delta x_k$ 及 $U_n=\sum\underline{f}_k\,\Delta x_k$ 的極限轉變中，將從希臘字母 Σ 與 Δ 變成相當的拉丁字母；其中之 S 實已成爲獨特的寫法，而大寫的三角形

（譯者按：所謂大寫的 Delta，就是希臘字母的第四個字）一定會變成小寫的 d〕.

我們現在不欲在此處多費時間對不可積分的病理函數（pathologische Funktion）加以申述。我們情願說明一種重要的正確答案：

"在 $a \leqq x \leqq b$ 區間內任何一個受限制的單調函數，在此區間內應爲可積分。"

上述正確答案的證明，從第五圖中便於求得。在任意的一種「間隔再分」中，如以 $\overline{\Delta x}$ 代表一個分間隔的最大長度，則顯然適用下式：

$$O_n - U_n \leqq [(f(b) - f(a)]\,\overline{\Delta x},$$

而且如將間隔細分再作任意剖分時，上式必將趨近於零；因此，該數串 O_n 與 U_n 假如根本就自行收斂的話，無論如何都擁有相同的極限值；但這種情形乃由對數串作單調判別準則而產生，因爲上限和數 O_n 構成單調下降、從下面受限制的一個數串，而下限和數 U_n 相反的構成單調上升、向上受限制的一個數串之故。

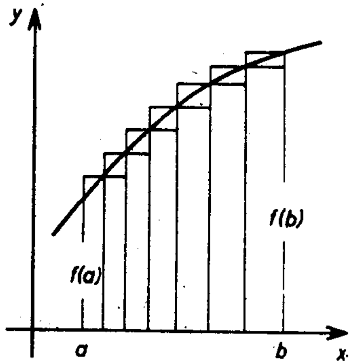

圖 5.　單調函數的積分法

此外還要注意單調函數絕對用不着具有連續性，却可以含有有限的跳距（即函數之不連續處）之存在。

從積分的定義立即產生下面的結果：假如 $a < b < c$，而且下式中出現的積分亦能存在的話，則以下面的方程式爲有效：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

事實上，這種情形可由上限和數或下限和數的相當方程式一眼就看出來的。至此我們亦可指出“逐間隔”成爲單調函數，或“分段”成爲單調函數之可積分性；意即如此函數乃指能分解成爲有限的許多單調部分元素而言。實則只要加上各該部分間隔（ Teilintervalle ）上面的積分，其中函數爲單調者。此外亦能指出：在 $a \leqq x \leqq b$ 這一區間內任何一個連續函數均可求其積分（縱使該函數在該區間內並非分段單調，却作無限多次的振動，好比函數 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$，令 $x > 0, f(0) = 0$ 在 $0 \leqq x \leqq 1$ 此一區間內）；但我們對此函數不作進一步之研究，祇以在此處暫且完全以分段單調函數爲討論對象的原故。

我們還要舉一個例子針對一種情形加以說明，即有的時候不選擇相等距離的分點爲有益的情形。現在提出一個問題來計算下面的積分：

$$\int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

在分點 x_k 處求得上限和數如下：

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1}) \quad (x_0 = 0, \quad x_n = b).$$

顯然對於分點宜於作如此的選擇，即令此處出現的平方根易於開方者。因此，可令

$$x_k = \frac{k^2}{n^2} \cdot b$$

而重新應用人所共知的求和公式求得冪和數如下：

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \sqrt{b} \left(\frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} \right) b \;=\; b\sqrt{b} \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(2k-1) \\ &= b^{\frac{3}{2}} \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} b^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

當作單調函數，$y = \sqrt{x}$ 爲可予以積分；而對 $n \to \infty$ 而言則得：

$$\int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}$$

按照這一種範式，當然可以求許多其他函數的積分。其實無此必要，因為還有比較適合的方法，用以求出新的積分公式。微分法與積分法之間的重要關聯，將於下面第三章中進行研習；由此關聯可以非常簡單的把積分公式導引出來。目前我們僅僅還要陳述積分計算的若干規則而已。

從上限和數或下限和數所具有相當的特性中，可毫不費力的求得下面兩個規則：

$$\int_b^b \{f(x)+g(x)\}\,\mathrm{d}x = \int_b^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{如令} \quad F(x)=c\cdot f(x),$$

只要上式中出現的各個積分繼續存在，其計算規則自然成立。

初學者在原則上往往習慣於把積分當作一個面積看待。然而這種說法是要加以修正的，因為只有在函數值不是負的，而且積分上限大於積分下限的情形之下，如此說法才屬正確。好比上限和的式子為

$$\sum \bar{f}(x_k)\,\Delta x_k$$

我們從這個式子已能讀出：函數 $f(x)$ 的前號與增量 Δx_k 的前號加起來，就變成積分的前號。

第二章　導來式之定義

(*Der Begriff der Ableitung*)

極限值定義尙有一種完全不同的用途，卽對於表面看去似乎與積分毫無關係的函數應用；此一應用就是所謂函數的導來式（或稱導數、微商、紀數）。此導來式在幾何學上可視爲切綫之斜率，而切綫乃在一條充分合理（意卽"光滑"的更具有連續性）的曲綫上就任何一點所作者。

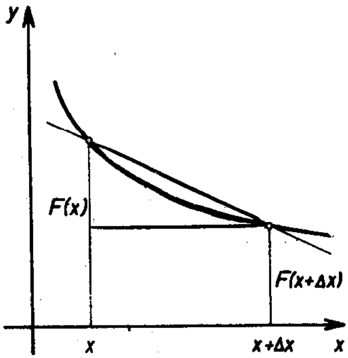

圖 6. 導來式定義示意圖

設 $y=F(x)$ 爲一連續函數，則在示意圖中我們要觀察兩個曲綫點 $(x,y)=\{x,F(x)\}$ 及 $(x+\Delta x, y+\Delta y)=\{x+\Delta x, F(x+\Delta x)\}$（見第六圖）。由此二點決定曲綫上所屬的弦，其斜率顯然應爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

如果曲綫上之形態充分合理（好比沒有轉角），則不難使 Δx 趨近於零爲極限（卽 $\Delta x\to 0$），而 x 不予移動；曲綫之弦必將變成切綫。準確下其定義如下：

倘有下式之存在：　$$F'(x) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

則函數 $F(x)$ 對自變數 x 而言，稱爲可微分；$F'(x)$ 稱爲該函數在 x 處之導數（或稱導來式）。

曲綫上某一點的瞬時速度，亦可作爲導來式定義的另一說明。在 t 時間內，曲綫上之點設由一假定的零點到達一定（在曲綫上所量得）之距離 $s = s(t)$. 在 t 與 $t+\Delta t$ 此一時程內，我們求得該運動點的平均速度如下：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

又對 Δt 趨近於零爲極限（即 $\Delta t \to 0$ ）而言，在 t 時間內所產生之瞬時速度，其值應爲：

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

我們要立即就若干例題說明這種定義的構成。爲此首先觀察一下冪函數

$$y = F(x) = x^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

其微商（即導來式）應爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

上式右邊不能直捷了當的以 $\Delta x = 0$ 代入者，實因必將產生不定式 $\frac{0}{0}$ 之故。但如按照二項式定理將上式右邊予以變形，則得：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x \binom{n}{2} x^{n-2} + \Delta x^2 (\ldots),$$

而且倘將式中之極限轉變 $\Delta x \to 0$ 付諸實施，則得第二章第一公式如下：

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \qquad \text{公式（2·1）}$$

尤其可以看出一個常函數 $y = c = \text{const}$ 的導來式恒等於零，因爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

爲了要從如此求得的結果獲致一個任意多項式之導數起見，特證明下面兩個規則：

$$\text{Ist } F(x) = G(x) + H(x), \text{ so ist}$$
$$F'(x) = G'(x) + H'(x).$$
$$\text{Ist } F(x) = a \cdot G(x), \text{ so ist } F'(x) = a \cdot G'(x).$$

事實上，以上二規則可立即從觀察所屬的微商而產生：對第一規則(A)而言，可列成下式：

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{G(x+\Delta x)+H(x+\Delta x)-G(x)-H(x)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}+\frac{H(x+\Delta x)-H(x)}{\Delta x},$$

令 Δx 趨近於零，則由上式求得第一規則（A）. 第二規則（B）的情形與此完全相同。

所有這些規則，只要其中出現之導數眞正存在時，才能獲得相當理由的確實斷定；此乃不言而自明之事。

由此立即產生構成一切多項式所屬導數之可能性：

$$y=P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0.$$

經由（A）與（B）二規則可能重複的應用，乃得第二章第二公式如下：

$$y'=P_n'(x)=a_n n x^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_1\cdot \quad 公式（2\cdot2）$$

如將上式與本叢書第一冊第 70 頁的6.1式子作一比較，則顯然可以看出一個多項式的導數，其值是當作三角形霍納範式（ Horner-Schema ）中第四橫列的最後結果，而易於求得者。由此可見，一個多項式的導來式（或稱導數）又是一個多項式，其中各項之次數各降低一次。

當作簡單的應用，我們把下面的二次函數

$$s(t)=a_2 t^2+a_1 t+a_0$$

視爲在 t 時間內通過曲綫上一點所作位移 $s(t)$. 之描寫。對瞬時速度而言求得綫性函數如下：

$$v(t)=s'(t)=2a_2 t+a_1.$$

加速度 $b(t)$ 是速度的瞬時變動；因而求得加速度：

$$b(t)=v'(t)=2a_2.$$

由此可見，在位移當作時間的函數爲二次之情形下，加速度是一常數（例如自由落體）。

我們現在對於三角函數 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 的導來式，要尋求加以決定。對 $y=\sin x$ 求得