

高等学校教材

材料力学

(第二版)

下 册

刘鸿文 主编

高等教育出版社

本教材第一版是浙江大学等九院校合编的《材料力学》，现在出版的第二版是由刘鸿文(主编)、林建兴、曹曼玲按一九八〇年审订的120学时材料力学教学大纲(草案)修订成的。第二版仍分上、下两册出版。

第二版中从第一章到第十四章和附录I，为教学大纲中的基本部分，第十五章到第十八章是专题。专题和带有*号的内容，主要是教学大纲中列入的专题和大纲中标注*号的部分，供教师和读者根据需要取舍。

第二版上册包括第一章到第九章和附录，计有：绪论、拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲强度、弯曲变形、应力状态及应变状态分析、强度理论、组合变形、平面图形的几何性质。下册包括第十章到第十八章，计有：能量法、静不定系统、动载荷、交变应力、压杆稳定、平面曲杆、厚壁圆筒和旋转圆盘、矩阵位移法、杆件的塑性变形。

本教材适用于高等工业学校机械类各专业，也可供其他专业和有关工程技术人员参考。

高等学校教材
材料力学
(第二版)
下 册
刘鸿文 主编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张11 字数260,000

1979年4月第1版 1983年2月第2版 1983年7月第6次印刷

印数 408,301—458,200

书号 15010·0472 定价1.30元

下 册 目 录

第十章 能量法	1
§ 10-1 概述.....	1
§ 10-2 杆件变形能的计算.....	2
§ 10-3 变形能的普遍表达式.....	10
§ 10-4 莫尔定理.....	12
§ 10-5 计算莫尔积分的图乘法.....	20
§ 10-6 卡氏定理.....	24
*§10-7 剪力对弯曲变形的影响.....	32
§ 10-8 功的互等定理和位移互等定理.....	34
*§10-9 虚功原理.....	36
习题.....	42
第十一章 静不定系统	52
§ 11-1 静不定系统的概念.....	52
§ 11-2 弯曲静不定问题.....	55
§ 11-3 用力法解静不定系统.....	62
*§11-4 连续梁及三弯矩方程.....	74
习题.....	84
第十二章 动载荷	92
§ 12-1 概述.....	92
§ 12-2 构件作匀加速直线运动或匀速转动时的应力计算.....	92
*§12-3 构件在强迫振动时的应力计算.....	98
§ 12-4 冲击时应力和变形的计算.....	104
§ 12-5 提高构件抗冲击能力的措施.....	111
§ 12-6 冲击韧度.....	114
习题.....	116
第十三章 交变应力	124
§ 13-1 交变应力及疲劳破坏.....	124

§ 13-2	交变应力的循环特性、应力幅度和平均应力	127
§ 13-3	材料的持久极限及其测定	129
§ 13-4	影响构件持久极限的因素	131
§ 13-5	对称循环下构件的疲劳强度计算	139
§ 13-6	持久极限曲线及其简化折线	141
§ 13-7	不对称循环下构件的疲劳强度计算	145
§ 13-8	弯曲和扭转组合交变应力下构件的疲劳强度计算	150
§ 13-9	提高构件疲劳强度的措施	154
	习题	156
第十四章	压杆稳定	162
§ 14-1	压杆稳定的概念	162
§ 14-2	两端铰支细长压杆的临界压力	165
§ 14-3	其他支座条件下细长压杆的临界压力	169
§ 14-4	欧拉公式的适用范围 经验公式	174
§ 14-5	压杆的稳定校核	180
*§ 14-6	压杆稳定计算的折减系数法	182
§ 14-7	提高压杆稳定性的措施	185
*§ 14-8	纵横弯曲的概念	189
	习题	192
第十五章	平面曲杆	201
§ 15-1	概述	201
§ 15-2	平面曲杆纯弯曲时横截面上的正应力	202
§ 15-3	中性层曲率半径 r 的确定	208
§ 15-4	曲杆的强度计算	218
§ 15-5	曲杆的变形计算	220
	习题	224
第十六章	厚壁圆筒和旋转圆盘	228
§ 16-1	概述	228
§ 16-2	厚壁圆筒	229
§ 16-3	组合厚壁圆筒	234
§ 16-4	长圆筒的温度应力	238
§ 16-5	等厚旋转圆盘	242

习题	245
第十七章 矩阵位移法	248
§ 17-1 概述	248
§ 17-2 轴向拉伸(压缩)杆件的刚度方程	250
§ 17-3 受扭杆件的刚度方程	258
§ 17-4 受弯杆件的刚度方程	261
§ 17-5 梁单元的中间载荷	271
§ 17-6 组合变形杆件的刚度方程	275
§ 17-7 局部坐标和整体坐标 坐标变换矩阵	282
§ 17-8 平面桁架	287
§ 17-9 平面刚架	294
习题	298
第十八章 杆件的塑性变形	304
§ 18-1 概述	304
§ 18-2 金属材料的塑性性质	304
§ 18-3 拉伸和压缩杆系的塑性分析	307
§ 18-4 圆轴的塑性扭转	311
§ 18-5 塑性弯曲和塑性铰	314
§ 18-6 梁的塑性分析	319
§ 18-7 残余应力的概念	323
§ 18-8 厚壁圆筒的塑性变形	325
习题	331
下册习题答案	335

第十章 能量法

§ 10-1 概 述

变形固体力学中,与能量概念有关的一些定理和原理,统称为能量原理。对刚架、桁架、曲杆等的变形计算,静不定结构的求解,应用能量原理都非常简便。由于能量原理还是计算力学的基础之一,所以近年来更受重视。

在§ 2-9中曾经指出,在杆件的拉伸过程中,外力所作的功等于储存于杆内的变形能。在更普遍的情况下,任意变形固体将因外力作用而变形,从而引起外力作用点沿力作用线方向的位移。于是外力作了功,而变形固体内储存了变形能。若外力从零开始缓慢平稳地增加到最终值,在变形过程中,除变形能外,动能及其他能量的变化甚小可以不计,于是可以认为,外力所作的功 W 全部转变为储存于变形固体内的变形能 U 。即

$$U = W \quad (10-1)$$

在弹性范围内,变形能是可逆的。即当外力逐渐解除时,变形能又可全部转变为功。超过弹性范围后,固体的塑性变形将耗散一部分能量,变形能中只有一部分可以再转变为功。

某些能量原理,如虚功原理等,并不局限于线弹性问题,也可适用于非线性弹性和塑性问题。但本章讨论的内容,仍以线弹性问题为主。

§ 10-2 杆件变形能的计算

现在讨论杆件在各种基本变形下变形能的计算。

(一) 轴向拉伸或压缩 在线弹性范围内, 当拉力 P 从零开始逐渐增加到最终值时, 杆件伸长 Δl 与拉力 P 之间的关系为一斜直线(图 10-1)。在 § 2-9 中已经证明, 这时三角形 OAB 的面积在数值上等于外力所作的功, 即

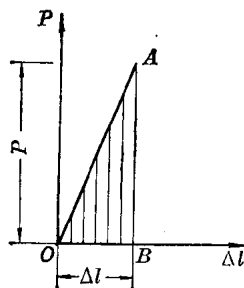
$$W = \frac{1}{2} P \Delta l$$

于是由(10-1)式知杆件的变形能为

$$U = W = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (\text{a})$$



(a)



(b)

图 10-1

若只在杆件的两端作用拉力或压力, 沿轴线的轴力 N 为常量, 且 $N = P$, $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ 。上式可以写成

$$U = \frac{1}{2} P \Delta l = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (10-2)$$

若外力比较复杂, 沿杆件轴线的轴力 N 为变量时, 可先计算长

为 dx 的微段内的变形能

$$dU = \frac{N^2(x)dx}{2EA}$$

然后按积分的方法计算整个杆件的变形能

$$U = \int_l \frac{N^2(x)dx}{2EA} \quad (b)$$

拉伸或压缩时, 单位体积的变形能(比能)是

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \quad (10-3)$$

(二) 扭转和剪切 圆轴扭转时(图 10-2, a), 在线弹性范围内, 若扭转力偶矩从零开始逐渐增加到最终值 M , 则扭转角 φ 与 M 之间的关系, 也是一条斜直线, 如图 10-2, b 所示。与拉伸相似, 可以证明, 在变形过程中, 扭转力偶矩所作的功在数值上等于 M - φ 图中斜直线下的面积, 即

$$W = \frac{1}{2}M\varphi \quad (c)$$

在图 10-2, a 的情况下, 圆轴任意横截面上的扭矩皆等于外力偶

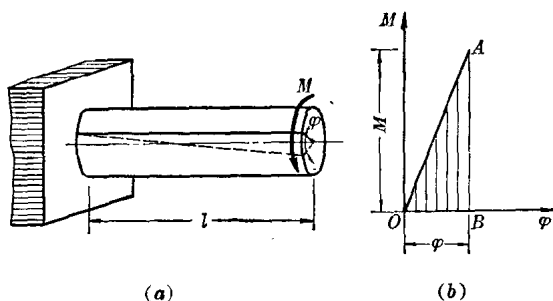


图 10-2

矩, 即 $M_n = M$, 且 $\varphi = \frac{M_n l}{GI_p}$ 。这样, 由公式(10-1)得扭转变形能为

$$U = W = \frac{1}{2} M \varphi = \frac{M_n^2 l}{2GI_p} \quad (10-4)$$

与轴向拉伸相似, 当扭矩沿轴线为变量时, 变形能按下列积分计算,

$$U = \int_l \frac{M_n^2(x) dx}{2GI_p} \quad (d)$$

在 § 3-4 中, 通过薄壁圆筒的扭转(图 10-3, a), 曾经求得在纯剪切的情况下(图 10-3, b), 单位体积的变形能(比能)为

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (10-5)$$

上式在形式上与公式(10-3)是相似的。

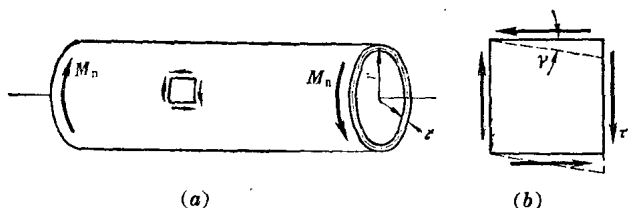


图 10-3

(三) 弯曲 图 10-4, a 为一等截面简支梁, 在两端作用外力

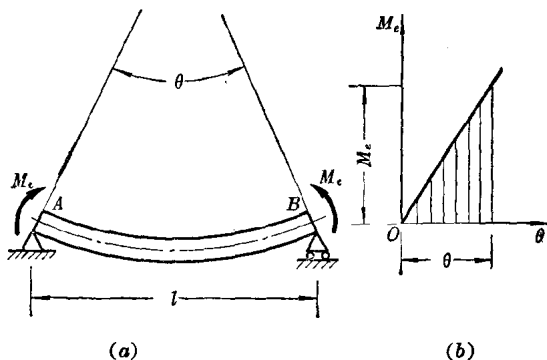


图 10-4

偶矩 M_e , 使梁的变形为纯弯曲。如以 θ 表示端截面 A 和 B 间的相

对转角,应用第七章中求弯曲变形的的方法,可以求出

$$\theta = \frac{M_e l}{EI}$$

所以,在线弹性的范围内,若弯曲力偶矩从零开始逐渐增到最终值 M_e , 则 M_e 与 θ 的关系也是一条斜直线(图 10-4, b)。弯曲力偶矩在变形中所作的功,在数值上等于 M_e - θ 图中斜直线下的面积,即

$$W = \frac{1}{2} M_e \theta \quad (e)$$

在纯弯曲的情况下,梁横截面上的弯矩等于外加力偶矩 M_e , 即 $M = M_e$ 。于是由(10-1)式知纯弯曲时的弯曲变形能是

$$U = W = \frac{1}{2} M_e \theta = \frac{M^2 l}{2EI} \quad (10-6)$$

在横力弯曲的情况下(图 10-5, a), 梁截面上除弯矩外,还有剪力。一般说弯矩和剪力随截面的位置而变化,都是 x 的函数。这时应该分别计算与弯曲和剪切相对应的变形能。但在细长梁的情况下,与剪切相应的变形能通常很小,可以省略不计,所以只需要计算弯曲变形能。在计算弯曲变形能时,可从梁内取出长为 dx 的微段(图 10-5, b), 其左右两端横截面上的弯矩应分别是 $M(x)$ 和 $M(x) + dM(x)$ 。省略弯矩增量 $dM(x)$ 后,可以把微段看作是纯弯曲的情况。于是可以应用公式(10-6)算出它的变形能

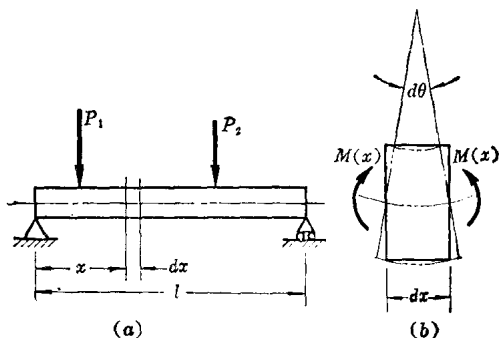


图 10-5

$$dU = \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

全梁的变形能可按积分的方式求出为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} \quad (10-7)$$

如果在梁的各段内, 弯矩 $M(x)$ 由不同的函数表示, 上列积分应分段进行, 然后求其总和。

总结以上讨论, 杆件变形能在数值上等于变形过程中外力所作的功。在线弹性范围内, 若外力由零开始逐渐增加到最终值, 外力所作的功又可由(a)、(c)、(e)诸式来表示。综合这些表达式, 可把变形能统一写成

$$U = W = \frac{1}{2} P \delta \quad (10-8)$$

式中 P 在拉伸时代表拉力, 在扭转或弯曲时代表力偶矩, 所以称为广义力。 δ 是与 P 对应的位移, 称为广义位移。例如, 在拉伸时它是与拉力对应的线位移 Δl ; 在扭转时它是与扭转力偶矩对应的角位移 φ 。在线弹性体的情况下, 广义力与广义位移之间是线性关系。

例 10-1 试求图 10-6 所示简支梁的变形能, 并求集中力 P 作用点 C 的位移。

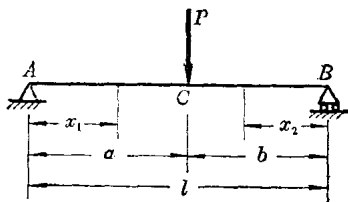


图 10-6

解: 按照所取坐标系, 简支梁在 AC 段内的弯矩是

$$M_1 = R_A x_1 = \frac{Pb}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

在 CB 段内的弯矩是

$$M_2 = R_B x_2 = \frac{Pa}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b)$$

由于在 AC 和 CB 两段内弯矩由不同的函数表示, 所以用公式 (10-7) 计算弯曲变形能时, 应分段积分。即

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{M_1^2(x) dx}{2EI} = \int_0^a \frac{M_1^2 dx_1}{2EI} + \int_0^b \frac{M_2^2 dx_2}{2EI} \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{l} x_1 \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{l} x_2 \right)^2 dx_2 \\ &= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI l} \end{aligned}$$

设 C 点的位移为 f_c , 在变形过程中, 集中力 P 作的功应为

$$W = \frac{1}{2} P f_c$$

由于 $U = W$, 故有

$$\frac{1}{2} P f_c = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI l}$$

由此求出

$$f_c = \frac{Pa^2 b^2}{3EI l}$$

例 10-2 轴线为半圆形的平面曲杆如图 10-7, a 所示。作用于 A 端的集中力 P 垂直于轴线所在的平面, 试求 P 力作用点的垂直位移。

解: 设任意横截面 mn 的位置由圆心角 φ 来确定。由曲杆的俯视图 (图 10-7, b) 可以看出, 截面 mn 上的弯矩和扭矩分别为

$$M = PR \sin \varphi$$

$$M_n = PR(1 - \cos \varphi)$$

微段 $Rd\varphi$ 内的变形能是

$$\begin{aligned} dU &= \frac{M^2 R d\varphi}{2EI} + \frac{M_n^2 R d\varphi}{2GI_p} \\ &= \frac{P^2 R^3 \sin^2 \varphi d\varphi}{2EI} + \frac{P^2 R^3 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{2GI_p} \end{aligned}$$

积分求得整个曲杆的变形能为

$$U = \int_0^\pi \frac{P^2 R^3 \sin^2 \varphi d\varphi}{2EI} + \int_0^\pi \frac{P^2 R^3 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{2GI_p}$$

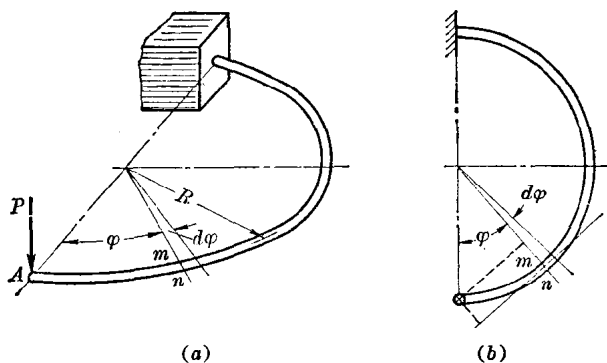


图 10-7

$$= \frac{P^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3P^2 R^3 \pi}{4GI_p}$$

若 P 力作用点沿 P 的方向的位移为 f_A , 在变形过程中, 集中力 P 所作的功应为

$$W = \frac{1}{2} P f_A$$

由 $U = W$, 得

$$\frac{1}{2} P f_A = \frac{P^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3P^2 R^3 \pi}{4GI_p}$$

所以

$$f_A = \frac{PR^3 \pi}{2EI} + \frac{3PR^3 \pi}{2GI_p}$$

例 10-3 用变形比能的概念证明三个弹性常数 E 、 G 、 μ 间的关系。

解: 在纯剪切的情况下(图 10-3, b), 已由公式(10-5)求出比能为

$$u = \frac{\tau^2}{2G}$$

另一方面, 根据例 8-3 的分析, 纯剪切应力状态下的主应力是

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

这样, 我们又可把主应力代入公式(8-22)算出比能

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

按以上两种方式算出的结果同是纯剪切应力状态的比能, 它们应该相

等,即

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

由此求得三个弹性常数间的关系是

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

例 10-4 试由拉伸(压缩)的变形比能公式(10-3), 导出弯曲变形能公式(10-7)。

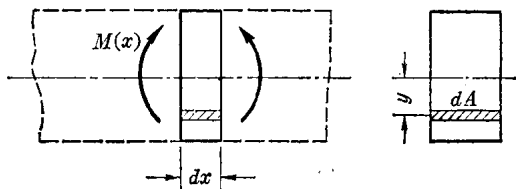


图 10-8

解: 在梁的横截面上, 离中性轴为 y 处的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M(x) \cdot y}{I}$$

由公式(10-3), 单位体积内的变形能为

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2(x) y^2}{2EI^2}$$

在图 10-8 中, 标有阴影线的微分体积为 $dV = dx dA$, dV 内的变形能为

$$dU = u dV = \frac{M^2(x) y^2}{2EI^2} dx dA$$

积分上式求出梁的弯曲变形能为

$$U = \int_V u dV = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI^2} \int_A y^2 dA = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

此即公式(10-7)。在纯弯曲的情况下(图 10-4), 弯矩为常量, 由上式又可得公式(10-6), 即

$$U = \frac{M^2 l}{2EI}$$

§ 10-3 变形能的普遍表达式

以上讨论了杆件在几种基本变形下变形能的计算。现在推广到一般情况。设作用于物体上的外力为 $P_1, P_2, P_3, \dots$ ，且设物体的约束条件使它除因变形而引起位移外，不可能有刚性位移(图 10-9)。用 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 分别表示外力作用点沿外力方向的位移。这里的外力和位移是指广义力和广义位移。在 § 8-9 中曾经指出，

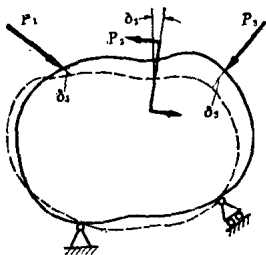


图 10-9

弹性体在变形过程中储存的变形能，只决定于外力和位移的最终值，与加力的次序无关。这样，在计算变形能时，就可假设 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 按相同的比例，从零开始逐渐增加到最终值。若变形很小，材料是线弹性的，且弹性位移与外力之间的关系也是线性的。则位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 也将与外力按相同的比例增加。为了表明外力按相同的比例增加，引进一个在零到 1 之间变化的参数 β 。加力过程中，各外力的中间值可表示为 $\beta P_1, \beta P_2, \beta P_3, \dots$ 。由于外力和位移之间是线性关系，所以相应的位移是 $\beta \delta_1, \beta \delta_2, \beta \delta_3, \dots$ 。外力从零开始缓慢地增加到最终值， β 从零变到 1。如给 β 一个增量 $d\beta$ ，位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ 的相应增量分别为

$$\delta_1 d\beta, \delta_2 d\beta, \delta_3 d\beta, \dots$$

外力 $\beta P_1, \beta P_2, \beta P_3, \dots$ 在以上位移增量上作的功*

* 在位移 $\delta_1 d\beta$ 中，省略外力相应的增量 $P_1 d\beta$ ，认为 βP_1 不变，故 βP_1 作的功为 $\beta P_1 \cdot \delta_1 d\beta$ 。这相当于在计算外力作功时，省略了含有二阶微量 $(d\beta)^2$ 的项。

$$\begin{aligned}
 dW &= \beta P_1 \cdot \delta_1 d\beta + \beta P_2 \cdot \delta_2 d\beta + \beta P_3 \cdot \delta_3 d\beta + \cdots \\
 &= (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 + \cdots) \beta d\beta \quad (a)
 \end{aligned}$$

积分上式, 得

$$\begin{aligned}
 W &= (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 + \cdots) \int_0^1 \beta d\beta \\
 &= \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \delta_3 + \cdots
 \end{aligned}$$

物体的变形能应为

$$U = W = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \delta_3 + \cdots \quad (10-9)$$

这表示, 线弹性体的变形能等于每一外力与其相应位移乘积的二分之一的总和。这一结论也称为克拉贝依隆原理。

因为位移 $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$ 与外力 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 之间是线性关系, 如把公式(10-9)中的位移用外力来代替, 变形能就成为外力的二次齐次函数。同理, 如把外力用位移来代替, 变形能就成为位移的二次齐次函数。

现将上述原理应用于杆件的组合变形。设于杆件中取出长为 dx 的微段(图 10-10), 其两端横截面上有弯矩 $M(x)$ 、扭矩 $M_n(x)$ 和轴力 $N(x)$ 。对所分析的微段来说, 这些都是外力。设两个端截面的相对轴向位移为 $d(\Delta l)$, 相对扭转角为 $d\varphi$, 相对转角为 $d\theta$, 由公式(10-9), 微段内的变形能为

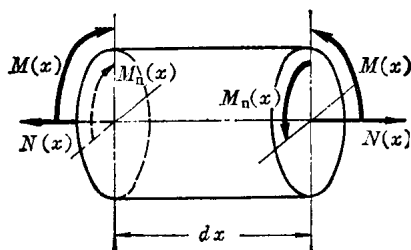


图 10-10

$$\begin{aligned}
 dU &= \frac{1}{2}N(x)d(\Delta l) + \frac{1}{2}M(x)d\theta + \frac{1}{2}M_n(x)d\varphi \\
 &= \frac{N^2(x)dx}{2EA} + \frac{M^2(x)dx}{2EI} + \frac{M_n^2(x)dx}{2GI_p}
 \end{aligned}$$

积分上式, 求出整个杆件的变形能

$$U = \int_l \frac{N^2(x)dx}{2EA} + \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} + \int_l \frac{M_n^2(x)dx}{2GI_p}$$

这是指圆截面的情况。若截面并非圆形, 则上式右边第三项中的 I_p 应改成 I_n 。

§ 10-4 莫尔定理

莫尔定理是计算线弹性结构变形的有效工具。现在利用变形能的概念导出这一定理。

设梁在载荷 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 作用下发生弯曲变形(图 10-11, a), 变形能应为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI} \quad (a)$$

式中 $M(x)$ 是在 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 作用下, 梁截面上的弯矩。现在需要确定在上述载荷作用下, 梁轴线上任一点 C 的挠度 f 。

设在上述一组载荷作用之前, 先在 C 点沿 f 方向, 作用一个单位力 P_0 (即 $P_0=1$), 如图 10-11, b 所示。这时梁截面上的弯矩记为 $M^0(x)$, 梁内储存的变形能是

$$U_0 = \int_l \frac{[M^0(x)]^2 dx}{2EI} \quad (b)$$

在已经作用 P_0 后, 再把原来的一组载荷 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 作用于梁上(图 10-11, c)。若材料服从虎克定律, 且变形很小, 各外力引起的变形是各自独立的, 叠加原理可以应用。 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 的效应