高等学校试用教材

高等数学

下册

天津大学数学教研室
《高等数学》编写组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

下 册

天津大学数学教研室
《高等数学》编写组编

本书是编者根据1977年11月高等学校工科教材编写会议制定的编写大纲编写的，共分三册出版．主要内容，上册包括一元微积分与常微分方程；中册包括级数，矢量代数与空间解析几何，多元函数微积分；下册包括线性代数初步与概率论初步两部分．本书可作高等工科院校同名课程的试用教材或教学参考书．

高等学校试用教材

高等数学

下　册

天津大学数学教研室

《高等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市印刷三厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 7.25　字数 173,000

1981年1月第1版　1981年5月　第1次印刷

印数 00,001—16,000

书号 13012·0566　定价 0.54元

目　录

第十二章　线性代数初步

本章是线性代数基本知识的初步介绍，内容包括行列式、矩阵、线性方程组解的判定和线性方程组的几种解法四个部分.

§12.1　行列式

一、行列式的定义

我们已经知道，利用二阶(三阶)行列式可以把二元(三元)线性方程组的解表示为便于记忆和使用的形式. 例如，二元线性方程组

$$\begin{cases}2x+3y=8\\ x+4y=9\end{cases}$$

的解可以表示为

$$x=\frac{\begin{vmatrix}8&3\\9&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&8\\1&9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}}$$

这一节，将把这个方法推广到 n 元线性方程组，用 n 阶行列式表示 n 元线性方程组的解.

先让我们复习一下二阶、三阶行列式，然后给出 n 阶行列式的定义.

二阶行列式由 2×2 个数组成，记为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

而且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

三阶行列式由 3×3 个数组成，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2}$$

由(2)式，我们看出三阶行列式的计算可采用下列的“对角线法则”：

在图 12-1 中，位于同一条实线上的三个元素的乘积取正号，有三项 $+a_{11}a_{22}a_{33}$，$+a_{12}a_{23}a_{31}$，$+a_{13}a_{21}a_{32}$；位于同一条虚线上的三个元素的乘积取负号，有三项 $-a_{11}a_{23}a_{32}$，$-a_{12}a_{21}a_{33}$，$-a_{13}a_{22}a_{31}$；这六项和等于行列式.

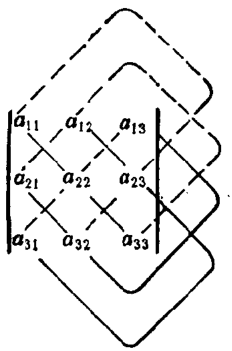

图 12-1

(2)式又可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

$$-a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3}$$

由(1)(3)两式，我们给出 n 阶行列式定义如下：

定义 1 一阶行列式是由一个数 a 组成，记为 $|a|$，它等于 a；n 阶行列式是由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成($n\in N, n>1$)，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们用递推方式，用 n 个 $n-1$ 阶行列式规定 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,i-1} & a_{3\,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \tag{12.1}$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,i-1} & a_{3\,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是n阶行列式中划去第1行第i列后剩下的部分按原顺序构成的$n-1$阶行列式.

n阶行列式有n行n列(**横排称行，竖排称列**)，组成n阶行列式的$n\times n$个数a_{ij}叫做它的**元素**，第一个下标表示该元素所在的行，第二个下标表示该元素所在的列，如a_{23}表示位于第二行第三列的元素.

n阶行列式可用大写英文字母A,B,C等表示，也可用大写希腊字母Δ等表示.

注意，一阶行列式的记号与绝对值的记号一样，但含义不同.以后遇到这个记号时，应与上下文联系起来看.

定义2 在n阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，任意指定k行k列($1\leqslant k\leqslant n$)，位于这些行列交叉处的k^2个元素按原顺序组成的k阶行列式称为A的一个**k阶子式**.

例如，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是A的一个二阶子式；特别地，行列式A的元素a_{ij}是行列式A的一阶子式；n阶子式就是行列式A本身.

在行列式A中划去第i行第j列后剩下的$n-1$阶子式称为元素a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}；M_{ij}与$(-1)^{i+j}$之积$(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的**代数余子式**，记为A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如，在三阶行列式

$$A=\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\8 & 6 & 5\\2 & 9 & 0\end{vmatrix}$$

中，元素 $a_{13}(=4)$ 的余子式与 $a_{32}(=9)$ 的余子式分别为

$$M_{13}=\begin{vmatrix}8 & 6\\2 & 9\end{vmatrix}=60$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 4\\8 & 5\end{vmatrix}=-17$$

a_{13} 与 a_{32} 的代数余子式分别为

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=60,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=17.$$

在掌握了余子式及代数余子式的概念及记号以后，我们可以把一个 n 阶行列式(12.1)简洁地表示如下：

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

即

$$A=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}\tag{12.2}$$

这种表示法，叫做将行列式 A **按第一行展开**.

要计算四阶及四阶以上的行列式，目前我们只能根据定义把它按第一行展开，从而化为较低阶的行列式. 必须注意，计算三阶行列式常用的“对角线法则”，对于四阶及四阶以上的行列式是不适用的，例如，对于四阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

按定义，它可以用 4 个三阶行列式表示，而每个三阶行列式有 6 项（见(2)式），共 $4\times6=24$ 项，若误用“对角线法则”，只能得到 8 项，把一大半都丢掉了！

下面我们讨论行列式的性质，利用这些性质，可以简化行列式的计算.

二、行列式的性质

定义 3 把行列式 A 的行列互换，而不改变各行各列的顺序，所得新行列式称为 A 的转置行列式.

性质 1 行列式 A 和它的转置行列式相等，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对于一般情形，可用数学归纳法证明. 我们仅对三阶行列式加以验证.

根据对角线法则，

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

A 的转置行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

明显看出，A 和它的转置行列式相等. 证毕.

依性质 1 及定义 1 可得以下推论.

推论 行列式A等于第一列各元素与其对应的代数余子式之积的和(或称为行列式A**按第一列展开**),即

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}$$

例如,

$$\begin{vmatrix}0&3&5&6\\6&4&7&1\\0&0&2&6\\0&9&0&8\end{vmatrix}=6A_{21}=6\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&5&6\\0&2&6\\9&0&8\end{vmatrix}=-1260$$

性质2 若交换n阶行列式A的两行(或两列),则所得新行列式B与A反号,即 $B=-A$

根据性质1,只需对行进行证明,我们用数学归纳法证明.

***证** (i) 当$n=2$时,

$$B=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}$$

$$=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=-A$$

所以,当$n=2$时性质2成立.

(ii) 假设$n=k-1$时性质2成立,证明$n=k$时性质2也成立.

先考察交换相邻两行的情况,设这两行为第i行与第$i+1$行. 当$i\neq1$时,依性质1的推论,把换行后的行列式B按第一列展开得

$$B=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i+1\,1}&a_{i+1\,2}&\cdots&a_{i+1\,k}\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ik}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}=a_{11}L_{11}+\cdots$$

$$+(-1)^{i+1}a_{i+1\,1}L_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i1}L_{i+1\,1}+\cdots$$
$$+(-1)^{k+1}a_{k1}L_{k1},$$

其中$L_{p1}(1\leqslant p\leqslant k)$为$B$中第$p$行第1列元素的余子式. 当$p\neq i$, $i+1$时, L_{p1}就是由行列式A中元素a_{p1}的余子式M_{p1}交换两行而成. L_{p1}是$k-1$阶行列式, 依归纳法假设得

$$L_{p1}=-M_{p1}\quad(p\neq i,\ i+1)$$

另外,

$$L_{i1}=\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ a_{i+2\,2} & \cdots & a_{i+2\,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}=M_{i+1\,1}$$

$$L_{i+1\,1}=M_{i1}$$

所以

$$\begin{aligned} B&=-a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{i+2}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+1}a_{i+1\,1}M_{i+1\,1} \\ &\qquad+\cdots+(-1)^{k+2}a_{k1}M_{k1} \\ &=-[a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i+1\,1}M_{i+1\,1} \\ &\qquad+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}] \\ &=-A \end{aligned}$$

当$i=1$时,

$$\begin{aligned} B&=a_{21}L_{11}-a_{11}L_{21}+a_{31}L_{31}+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}L_{k1} \\ &=-(a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}+\cdots+(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}) \\ &=-A \end{aligned}$$

再考察交换不相邻两行的情况, 设第i行与第$i+s$行互换. 经s次相邻行的互换, 第$i+s$行就换到第i行的位置上, 自第i行至第$i+s-1$行一律下移一行. 再经$s-1$次相邻行的互换, 可

把原来第 i 行的元素移到第 $i+s$ 行的位置上，共经过 $2s-1$ 次相邻行的互换. 每换一次，行列式符号改变一次，共改变 $2s-1$ 次，故仍然有

$$B=-A$$ 证毕.

推论 若行列式 A 中有两行(或两列)对应元素相等，则行列式 A 为零.

证 只需对行的情况进行证明.

设第 i 行、k 行元素相等. 把第 i 行与第 k 行互换，依性质 2，换行后的行列式 $B=-A$. 但是，由于这两行对应元素相等，所以 $B=A$. 因而 $A=-A$，即 $2A=0$，故 $A=0$. 证毕.

性质 3 用数 m 乘行列式 A 中某一行(或列)的各元素，所得行列式 B 等于数 m 与行列式 A 的积. 也就是说，行列式某一行(或列)有公因数 m 时，可以把 m 提到行列式的记号外.

(证明留作习题)

推论 若行列式中某两行(或两列)对应元素成比例，则此行列式等于零.

利用性质 3 及性质 2 的推论立即可得此推论.

性质 4 若行列式 A 中第 i 行各元素均可写成两数之和:

$$a_{ij}=b_j+c_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

则此行列式 A 等于两个行列式之和，其中一个行列式的第 i 行是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，另一个的第 i 行是 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，其余各行都与原行列式 A 的相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(证明留作习题)

根据性质 1，可把性质 4 中的“第 i 行”改为第 i 列，性质仍成立.

性质 5 用数 m 乘行列式 A 的某一行(或列)，然后加到另一行(或列)上去，所得行列式与行列式 A 相等.

仅对行的情况证明如下：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+ma_{k1} & a_{i2}+ma_{k2} & \cdots & a_{in}+ma_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{rn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ma_{k1} & ma_{k2} & \cdots & ma_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=A
$$

这里第一步是根据性质 4，第二步是根据性质 3 的推论. 证毕.

在计算行列式时，这个性质经常用到，例如，

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\textcircled{1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}
$$

(-2) $\qquad\qquad\qquad$ (-3)

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -7 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -7 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}
$$

$$
= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} (-7) \quad = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
= -2 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 12
$$

性质 6 行列式 A 中任一行(或列)的元素 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 之积的和等于 A；而与另一行(或列)的代数余子式 A_{kj} 之积的和等于零．即

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} A & (\text{当 } i=k \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } i \neq k \text{ 时}) \end{cases} (\text{关于行的公式})
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} A & (\text{当 } j=k \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } j \neq k \text{ 时}) \end{cases} (\text{关于列的公式})
$$

证 我们从右向左推导第一个等式：

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = A
$$

当 $i=1$ 时，根据行列式的定义，上式自然成立，所以只需证明 $2 \leqslant i \leqslant n$ 的情况．经 $i-1$ 次相邻两行的交换，可以把第 i 行移到

---

① 在此行列式下边所作的记号表示"用 -2 乘第 1 列再加到第 2 列上"．

第 1 行，于是有

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}(a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}M_{in})$$

$$=(-1)^{i+1}(a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}M_{in})$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=A$$

上式叫做把行列式 A **按第 i 行展开**.

为证明 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$（当 $i\neq k$ 时），考察一个第 k 行与第 i 行相同的辅助行列式

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$