

▽
◇
☆

大气辐射学基础

尹宏 编著

☆
☆
△
△
☆
☆
△
△
≡
≡
D
L
S
V
↑

气象出版社

⇄)(⊗ ⊞ ⊛ ⊜ ⊝ ⊞ ⊟ ⊠ ⊡ ⊢ ⊣ ⊤ ⊥ ⊦ ⊧ ⊨ ⊩ ⊪ ⊫ ⊬ ⊭ ⊮ ⊯ ⊰ ⊱ ⊲ ⊳ ⊴ ⊵ ⊶ ⊷ ⊸ ⊹ ⊺ ⊻ ⊼ ⊽ ⊾ ⊿ ⊿

大气辐射学基础

尹宏 编著

气象出版社

(京) 新登字 046 号

内 容 简 介

大气辐射学是研究大气中辐射传输的规律及地球大气辐射能量收支的学科。本书是根据作者多年来在北京大学对本科学生和研究生讲授大气辐射学教材的基础上整理编写而成的。全书共分六章, 在每一章后给出与本章有关的参考文献。

本书适合大学本科高年级及研究生使用, 也可供有关科研人员参考使用。

大气辐射学基础

尹 宏 编著

责任编辑: 林雨晨 终审: 周诗健

封面设计: 牛涛 责任技编: 席大光 责任校对: 吴向东

气象出版社 出版

(北京市海淀区白石桥路 46 号 100081)

* * *

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

北京昌平环球印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 8.625 字数: 223.3 千字

1993 年 10 月第一版 1993 年 10 月第一次印刷

印数 1—2000

ISBN 7-5029-1319-X/P·0578 (课)

定价: 4.60 元

前 言

太阳不断向地球大气及地面发射电磁波。它的能量 99% 以上处于波长小于 $4\mu\text{m}$ 范围内，称为短波辐射。地球大气与地面温度在 $180\sim 330\text{K}$ 范围内，它发射的热辐射能量 99% 以上具有波长大于 $4\mu\text{m}$ ，称为长波辐射。短波辐射与长波辐射在大气中传播时与大气及地面互相作用，产生吸收、散射与反射。各处地面与大气的辐射热收支不平衡使地面和空气的温度发生变化，各地温度变化不同，形成热源与冷源，推动了大气的运动和变化。研究气候和天气变化的规律必须研究大气中辐射能量收支的规律。

地面、飞机及卫星上装置的电磁波接收仪器接收地面或大气传来的辐射能，通过大气辐射传输方程的求解，可以推算云、温度廓线、各种吸收辐射气体，如水汽和臭氧的廓线、大气中云和气溶胶的物理和化学性质等气象要素的分布和变化。卫星对地球大气的遥感方法也可以用来遥测其他的行星大气。气象遥感特别是气象卫星的发展也推动了大气辐射学的研究。

大气辐射学是研究大气中辐射传输的规律及地球大气辐射能量收支的学科。本书是作者根据多年来给北京大学本科学生和研究生讲授大气辐射学教材的基础上整理编写而成的。全书共分六章。

本书附录 3.3 球形粒子的散射与吸收的电磁波理论是王书仁同志撰写的；本书在编写过程中还得到石广玉、毛节泰、吴北婴、蔡启铭、杨平等同志的帮助；本书的编写出版得到国家气象局科学基金的支持，书中的一部分内容是基金支持下的研究成果，在此表示感谢。

由于作者知识有限，书中难免有缺点和错误，恳请读者批评指正。

目 录

前 言

第一章 辐射的物理基础	(1)
§ 1.1 表示辐射能量传输的物理量	(1)
§ 1.2 热辐射定律	(3)
§ 1.3 电磁波偏振特性的描述	(7)
参考文献	(13)
第二章 气体吸收辐射的规律	(14)
§ 2.1 气体吸收光谱	(14)
§ 2.2 吸收线的形状	(19)
§ 2.3 吸收线参数汇编	(26)
§ 2.4 吸收带的计算模式	(27)
§ 2.5 透过率的单参量方程, Lowtran 模式	(42)
§ 2.6 逐线积分与指数和模式	(44)
§ 2.7 大气窗区水汽的连续吸收	(48)
§ 2.8 多种气体在同一波段的重叠吸收	(49)
参考文献	(51)
第三章 大气中的散射过程	(53)
§ 3.1 球形粒子对电磁波的散射与吸收	(53)
§ 3.2 散射相函数与散射相矩阵	(59)
§ 3.3 瑞利(Rayleigh)分子散射	(60)
§ 3.4 大粒子散射的性质	(65)
§ 3.5 浑浊大气的散射与吸收	(70)
§ 3.6 散射相函数的简化计算	(85)
参考文献	(90)
附录 3.1 球形粒子散射与吸收的计算程序	(92)

附录 3.2	无限长圆柱散射与吸收的计算程序	(96)
附录 3.3	球形粒子散射与吸收的电磁理论	(101)
第四章	大气对太阳辐射的吸收	(122)
§ 4.1	太阳的位置和时间	(122)
§ 4.2	太阳及太阳辐射	(125)
§ 4.3	大气中气体对太阳辐射的吸收	(132)
§ 4.4	大气浑浊度	(142)
§ 4.5	多次散射的辐射传输方程	(145)
§ 4.6	离散纵标法	(149)
§ 4.7	累加法与倍加法	(152)
§ 4.8	两流近似	(162)
§ 4.9	迭代法计算太阳辐射的多次散射	(173)
§ 4.10	地面对太阳辐射的反射率	(176)
§ 4.11	Monte-Carlo 方法计算一次散射辐照度	(180)
§ 4.12	多次散射的后向 Monte-Carlo 方法	(185)
	参考文献.....	(194)
附录 4.1	太阳辐射能量的光谱分布	(197)
第五章	地球和大气长波辐射的传输	(203)
§ 5.1	地球和大气的辐射光谱和吸收特点	(203)
§ 5.2	漫射透过率和直射透过率	(208)
§ 5.3	大气长波辐射的传输和热量收支	(212)
§ 5.4	云与大气气溶胶对长波辐射的影响	(223)
§ 5.5	热动平衡条件	(230)
	参考文献.....	(232)
第六章	大气辐射与气候	(235)
§ 6.1	地面的辐射差额	(235)
§ 6.2	大气的辐射差额	(237)
§ 6.3	地气系统的辐射差额	(239)
§ 6.4	大气环境的变化	(241)

§ 6.5	气温分布的辐射平衡模式	(245)
§ 6.6	辐射强迫	(250)
§ 6.7	太阳和地球轨道变化的辐射强迫	(255)
§ 6.8	温室气体的全球增暖潜力	(259)
§ 6.9	气候变化的反馈过程	(261)
	参考文献	(266)

第一章 辐射的物理基础

§ 1.1 表示辐射能量传输的物理量

通过一个面积元 dS 单位时间由各种波长的电磁波传输的能量称为辐射通量 Φ ，单位面积的辐射通量称为辐射通量密度或辐照度 E ，当辐射通量密度是由一个发射面射出时，称为辐（射）出（射）度。如图 1.1，根据实验，当辐射能由一个面积元 dS 发出，若途中没有削弱，另一个面积元 dS' 收到的辐射通量 $d\Phi$ 应与 dS ， dS' ， $\cos\theta$ ， $\cos\theta'$ 成正比，与 dS 及 dS' 距离的平方 r^2 成反比， θ ， θ' 是 dS 与 dS' 中心联线和 dS ， dS' 面法线的交角。比例常数为辐亮度 L 。

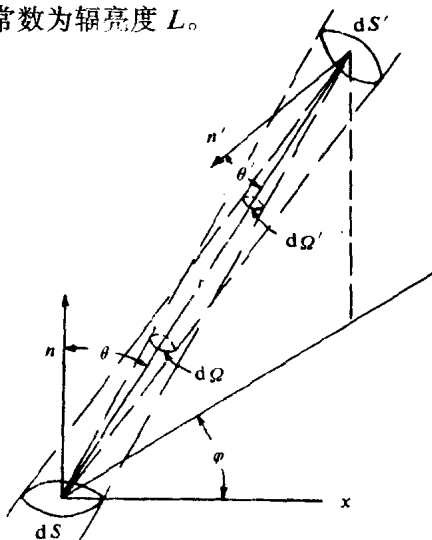


图1.1 辐亮度 L 与辐射通量 Φ 的关系

$$d\Phi = \frac{L \cos\theta \cos\theta' dS dS'}{r^2} \quad (1.1)$$

由立体几何， dS 面积元在 dS' 所张的立体角 $d\Omega' = \frac{\cos\theta dS}{r^2}$ ，若接收辐射能的面积元 dS' 是眼睛的瞳孔或其他光学仪器的入射孔，瞳孔正对入射光， $\theta' = 90^\circ$ ， $\cos\theta' = 1$ ，瞳孔处的辐照度 E 为

$$E = \frac{d\Phi}{dS'} = L d\Omega' \quad (1.2)$$

由 (1.2)，辐亮度 L 是受光面积元（瞳孔或光学仪器的入射孔）正对入射光（ $\cos\theta' = 1$ ），单位立体角接收的辐照度。

辐亮度 L 与射出方向 θ 无关的物体称为余弦辐射体，太阳和绝大部分地球表面都是余弦辐射体。在辐亮度为 L 的余弦辐射体 dS 外面作一个半径为 r 的上半球，在上半球天顶角为 θ ，方位角为 φ 处， $\cos\theta' = 1$ ，面积元 $dS' = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ 。由辐亮度为 L 的余弦辐射体 dS 向 dS' 面积元发射的辐射通量为

$$d\Phi = \frac{L \cos\theta \cos\theta' dS dS'}{r^2} = L \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi dS \quad (1.3)$$

把 (1.3) 式对上半球积分

$$d\Phi = dS \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} L \sin\theta \cos\theta d\theta = \pi L dS$$

即余弦辐射体的辐出度 $E = \frac{d\Phi}{dS}$ 与辐亮度 L 的关系为

$$E = \pi L \quad (1.4)$$

表 1.1 各辐射量的符号单位

符号	辐射量	单位
Φ	辐射通量	W
E, F	辐照度, 辐出度	W m^{-2}
L	辐亮度	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$

电磁波传输的辐射能以一定的规律分布在某些波长或频率范围内，在大气辐射学中常用波数 ν 代替频率 f ，波数 ν 是波长 λ 的倒数，与频率 f 成正比，若波长为 λ ，光速为 c ，则 $\nu = 1/\lambda = f/c$ 。为了表示辐射能随波长 λ 或波数 ν 的分布，若在 $d\lambda$ 波长范围内辐射通量为 $d\Phi$ ，定义 $\Phi_\lambda = d\Phi/d\lambda$ 称为谱辐射通量或单色辐射通量。辐照度，辐出度 E ，辐亮度 L 对波长 λ 或波数 ν 的导数如 $E_\lambda = dE/d\lambda$ ， $L_\nu = dL/d\nu$ 称为谱（单色）辐照度，谱（单色）辐亮度。凡是加上“单色”“谱”等词头的物理量比不加“单色”“谱”等词头的物理量其单位的分母上多一个波长或波数的单位。

谱辐照度对波数 ν （或波长 λ ）积分就求得所有波数（波长）的总辐照度 E

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu \quad (1.5)$$

当辐射能射到物体表面上，一部分被表面反射，一部分被吸收，一部分透过。这三部分辐射能量与入射辐射能量之比分别称为反射率 R 、吸收率 A 及透过率 τ ，其和为 1。若物体表面能吸收全部入射的辐射能，其吸收率等于 1，这样的物体称为黑体。

§ 1.2 热辐射定律

1.2.1 基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律

处于热平衡状态下的物体可以用态函数温度 T 来表示组成物体分子热运动能量的统计分布。1859 年 Kirchhoff 总结实验的结果，得出这样的规律：在热平衡条件下，如物体吸收波数为 ν 的辐射能，它也将发射同样波数的辐射能。任何物体的辐出度 $E_{\nu T}$ 与其吸收率 $A_{\nu T}$ 之比等于常数，此常数等于黑体在同一波数

ν , 温度 T 的辐出度 $B_{\nu T}$

$$\frac{E_{\nu T}}{A_{\nu T}} = B_{\nu T} \quad (1.6)$$

设想一个辐出度为 $E_{\nu T}$, 吸收率为 $A_{\nu T}$ 的物体面向一个黑体, 外面用绝热的物体包围起来, 当系统达到热平衡后, 物体发出的 $E_{\nu T}$ 全部被黑体吸收, 黑体发出的辐射 $B_{\nu T}$, 物体只吸收了 $A_{\nu T} B_{\nu T}$ 。按照热力学第二定律, 热平衡系统内, 温度相同的物体之间热量收支应该相等, 所以 $A_{\nu T} B_{\nu T} = E_{\nu T}$

这与 (1.6) 式完全一致。按以上原理, 两个温度相同, 互相面对的黑体, 不论其化学成分如何, 其黑体谱辐出度应该相等, 也就是说黑体谱辐出度 $B_{\nu T}$ 只是温度 T 和波数 ν 的函数, 与其化学成分无关。

1.2.2 普朗克 (Planck) 定律

1901 年, Planck 用量子的概念推导出与实验符合的黑体辐射谱能量分布曲线, 黑体的谱辐出度 $B_{\nu T}$ 与波数 ν 、温度 T 的关系为

$$B_{\nu T} = \frac{2\pi h c^2 \nu^3}{\exp\left(\frac{h c \nu}{k T}\right) - 1} \quad (1.7)$$

若以波长 λ 为自变量, (1.7) 式可改写成

$$\begin{aligned} B_{\lambda T} &= \frac{dB}{d\lambda} = \frac{dB}{d\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2 \nu^3}{\exp\left(\frac{h c \nu}{k T}\right) - 1} \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{h c}{\lambda k T}\right) - 1 \right]} \end{aligned} \quad (1.8)$$

(1.7), (1.8) 式中, 光速 $c = 2.9979 \times 10^8$ (m/s), 普朗克常数 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ (J/s), 波尔兹曼常数 $k = 1.38 \times 10^{-23}$ (J/K)。不同温度下黑体辐出度光谱能量分布曲线见

图 1.2。

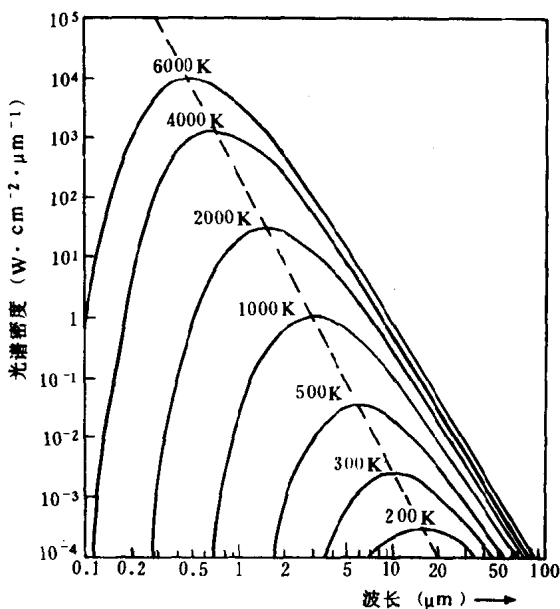


图 1.2 不同温度下黑体辐出度光谱能量分布曲线

把 (1.7) 式对波数 ν 积分, 可得黑体的辐出度 B_T , 引入变量 $x = h\nu / kT$, 有

$$B_T = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h c^2 \nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (1.9)$$

(1.9) 式中的定积分等于 $\pi^4 / 15$, 代入 (1.9) 式可得

$$B_T = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \quad (1.10)$$

(1.10) 式中的 σ 称为 Stefan - Boltzmann 常数, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} (\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4})$ 。在辐射计算中常需计算小于某个波数 ν 的黑体辐出度 $B'_T(\nu)$, 可由温度 T , 波数 ν 求 $x = h\nu / kT$, 再用

数值积分的方法求 $B'_T(v)$

表 1.2 黑体辐射能量谱分布函数 $F(x) = \int_0^x \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ 表

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0.1	0.000049	3.6	0.519753	7.1	0.929111
0.2	0.000381	3.7	0.539733	7.2	0.933533
0.3	0.001236	3.8	0.559290	7.3	0.937704
0.4	0.002819	3.9	0.578395	7.4	0.941636
0.5	0.005293	4.0	0.597027	7.5	0.945341
0.6	0.008791	4.1	0.615164	7.6	0.948830
0.7	0.013413	4.2	0.632792	7.7	0.952114
0.8	0.019231	4.3	0.649898	7.8	0.955203
0.9	0.262920	4.4	0.666471	7.9	0.958108
1.0	0.034618	4.5	0.682506	8.0	0.960838
1.1	0.044213	4.6	0.697997	8.2	0.965811
1.2	0.055064	4.7	0.712944	8.4	0.970191
1.3	0.067139	4.8	0.727347	8.6	0.974042
1.4	0.080396	4.9	0.741209	8.8	0.977423
1.5	0.094780	5.0	0.754533	9.0	0.980387
1.6	0.110227	5.1	0.767326	9.3	0.984152
1.7	0.126667	5.2	0.779596	9.6	0.987225
1.8	0.144021	5.3	0.791351	9.9	0.989726
1.9	0.162209	5.4	0.802601	10.2	0.991755
2.0	0.181145	5.5	0.813358	10.5	0.993396
2.1	0.200743	5.6	0.823632	10.8	0.994721
2.2	0.220917	5.7	0.833437	11.1	0.995788
2.3	0.241579	5.8	0.842784	11.4	0.996645
2.4	0.262643	5.9	0.851689	11.7	0.997333
2.5	0.284028	6.0	0.860164	12.0	0.997883
2.6	0.305650	6.1	0.868224	12.5	0.998564
2.7	0.327433	6.2	0.875883	13.0	0.999030
2.8	0.349301	6.3	0.883155	13.5	0.999347
2.9	0.371184	6.4	0.890055	14.0	0.999562
3.0	0.393015	6.5	0.896597	14.5	0.999707
3.1	0.414733	6.6	0.902795	15.0	0.999805
3.2	0.436280	6.7	0.908663	15.5	0.999870
3.3	0.457601	6.8	0.914216	16.0	0.999914
3.4	0.478649	6.9	0.919465	∞	1.000000
3.5	0.499380	7.0	0.924426		

$$B'_T(v) = \int_0^v \frac{2\pi hc^2 v^3}{\exp\left(\frac{hcv}{kT}\right) - 1} dv = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^x \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$= \sigma T^4 F(x) \quad (1.11)$$

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$F(x)$ 是波数小于 $v = \frac{xkT}{hc}$ 的黑体辐出度占总黑体辐出度的比数。 $F(x)$ 的函数关系见表 1.2。由表 1.2 可由温度 T 及两个波数 v_1, v_2 求在温度 T 这两个波数之间的黑体辐出度 B'_T

$$B'_T = \sigma T^4 [F(x_2) - F(x_1)]$$

以波长 $\lambda = 4\mu\text{m}$ 为例，相应的波数 $v = 2500\text{cm}^{-1}$ ，太阳和地球表面的温度分别约 5800 及 300K， x （太阳）= 0.6202， $F(x) = 0.00973$ ； x （地球）= 11.99， $F(x) = 0.99785$ 。这些计算结果表明：太阳辐射若近似地当作 5800K 的黑体，波长 $\lambda > 4\mu\text{m}$ 的辐射能量不到总辐射能量的 1%；地球和大气的辐射若近似地当作 300K 的黑体，波长 $\lambda < 4\mu\text{m}$ 的辐射能量不到总辐射能量的 0.3%。因此在大气科学研究中通常以 $4\mu\text{m}$ 作为太阳辐射与地球大气辐射的分界，把波长基本上小于 $4\mu\text{m}$ 的太阳辐射称为短波辐射，把波长基本上大于 $4\mu\text{m}$ 的地球大气辐射称为长波辐射。

§ 1.3 电磁波偏振特性的描述

最简单的电磁波是椭圆偏振波，其周期变化的电矢量端点随时间移动的轨迹是一个椭圆。波长为 λ ，周期为 T 的椭圆偏振波最直观的表达式是把周期变化的电矢量分解成沿椭圆长轴和短轴的周期性振动（见图 1.3）

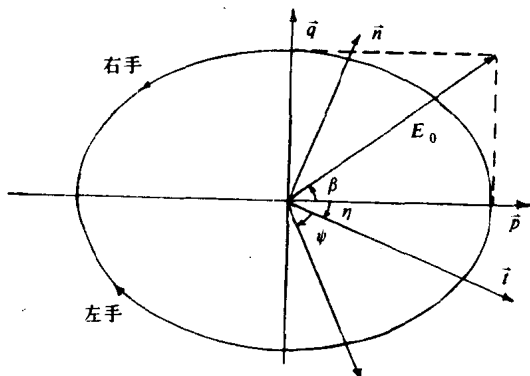


图 1.3 椭圆偏振波

$$\vec{E} = E_0 \left\{ \vec{p} \cos \beta \cos \left[2\pi \left(\frac{L}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] + \vec{q} \sin \beta \sin \left[2\pi \left(\frac{L}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \right\}$$

$$= E_0 [\vec{p} \cos \beta \cos(kL - \omega t) + \vec{q} \sin \beta \sin(kL - \omega t)] \quad (1.12)$$

(1.12) 式中 L 是电磁波传播的路程, t 是时间, 传播常数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, 圆频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, \vec{p} , \vec{q} 分别是椭圆长轴和短轴方向的单位矢量, 表示椭圆的取向。 β 的正切是椭圆短轴长度 b 与长轴长度 a 之比, $\text{tg}\beta = \pm \frac{b}{a}$, 用 β 的绝对值表示椭圆的椭率, 用 β 的符号表示电矢量的转动方向, $\beta > 0$ 表示右旋偏振, $\beta < 0$ 表示左旋偏振。若 $a = b$ 椭圆偏振波成为圆偏振波, 若 $a = 0$, 或 $b = 0$ 椭圆偏振波成为线偏振波, 圆偏振波和线偏振波都是椭圆偏振波的特例。

(1.12) 式用椭圆的长短轴方向作为坐标轴, 数学表达式比较简单。实际光束是由迅速衔接、电振动的振幅为 E_0 、椭圆的椭率 β 和长轴方向 \vec{p} 不同的椭圆偏振波组成, 电振动的振幅, 椭圆的椭率和长轴方向在每秒内有百万次以上的变化。研究光的偏振要选统一的坐标, 如图 1.3 的 \vec{i} 及 \vec{n} , 把各个振幅, 椭圆椭率

和长轴方向不同的椭圆偏振波分解成沿选定坐标轴方向 \vec{t} 及 \vec{n} 的周期振动。

取 $\zeta = kL - \omega t + \varphi_1$, (1.12) 式化为

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n = \vec{t} E_{0t} \cos \zeta + \vec{n} E_{0n} \cos(\zeta + \varphi) \quad (1.13)$$

(1.13) 式中 \vec{t} , \vec{n} 是统一坐标方向的单位矢量, E_{0t} , E_{0n} 是统一坐标方向的振幅, φ_1 , φ_n 是这两个方向的初位相, $\varphi = \varphi_n$

$-\varphi_1$ 是 \vec{n} , \vec{t} 两个方向周期振动的位相差。

(1.12), (1.13) 两式可用代数方法互相转换, (1.13) 式的周期振动可以用复数表示

$$\begin{cases} E_t = E_{0t} \exp(i\zeta) \\ E_n = E_{0n} \exp[i(\zeta + \varphi)] \end{cases} \quad (1.14)$$

(1.14) 式的实部就是 (1.13) 式。取 η 为 \vec{t} , \vec{p} 的交角。并规定以下四个参量 I , Q , U , V 来表示光束的强度和偏振特性。经过适当的三角运算, 可得以下的关系式

$$\begin{cases} E_{t0}^2 = E_0^2(\cos^2 \beta \cos^2 \eta + \sin^2 \beta \sin^2 \eta) \\ E_{n0}^2 = E_0^2(\cos^2 \beta \sin^2 \eta + \sin^2 \beta \cos^2 \eta) \\ I = E_{t0}^2 + E_{n0}^2 = E_t E_t^* + E_n E_n^* \\ Q = E_{t0}^2 - E_{n0}^2 = E_t E_t^* - E_n E_n^* \\ U = 2E_{t0} E_{n0} \cos \varphi = E_t E_n^* + E_n E_t^* = E_0^2 \cos 2\beta \sin 2\eta \\ V = 2E_{t0} E_{n0} \sin \varphi = -i(E_t E_n^* - E_n E_t^*) = E_0^2 \sin 2\beta \end{cases} \quad (1.15)$$

测量电磁波的强度和偏振最完善的仪器是由感应元件, 偏振器和滞后片组成。感应元件用来测电磁波辐照度, 它与 E_0^2 成正比。偏振器的作用是只让某一特定方向的电磁波通过, 可由尼科尔(Nicol)棱镜或其他元件实现。滞后片由各向异性的晶体片构成, 光通过晶片时, 电矢量互相正交的“寻常光”与“非寻常光”在晶片内的速度不同, 穿过滞后片后, 这两种电磁波分量之间就附加了一个位相差, 云母就是具有这种性质的晶体之一。滞后片的厚度与附加位相差成正比。

若入射光的瞬时电振动用 (1.13) 式表示, 把滞后片的寻常光与非寻常光电矢量方向置于统一坐标方向, 即 \vec{i} , \vec{n} 方向。光通过滞后片后附加了一个位相差 δ , 电振动变成

$$\vec{E}(\delta) = \vec{i} E_t \cos \zeta + \vec{n} E_n \cos(\zeta + \varphi + \delta) \quad (1.16)$$

然后用偏振器把偏振角 ψ 方向的电振动分出, ψ 是电矢量与 \vec{i} 轴 的交角, ψ 方向电振动为

$$\begin{aligned} \vec{E}(\delta, \psi) &= E_t \cos \zeta \cos \psi + E_n \cos(\zeta + \varphi + \delta) \sin \psi \\ &= [E_t \cos \psi + E_n \cos(\varphi + \delta) \sin \psi] \cos \zeta \\ &\quad - E_n \sin(\varphi + \delta) \sin \psi \sin \zeta \end{aligned} \quad (1.17)$$

ζ 含有随时间变化的项 $\frac{2\pi t}{T}$, 感应元件上电磁波的瞬时电矢量振幅平方是 $\cos \zeta$ 与 $\sin \zeta$ 项系数的平方和

$$\begin{aligned} E^2(\delta, \psi) &= 2E_t E_n (\cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta) \sin \psi \cos \psi \\ &\quad + E_t^2 \cos^2 \psi + E_n^2 \sin^2 \psi \end{aligned} \quad (1.18)$$

(1.18) 式是瞬时情况, 由于光束的电矢量振幅 E_t , E_n 及位相差 φ 在一秒钟内有百万次以上的变化, 附加位相差 δ 与转角 ψ 是一致而不变的。感应元件测出的不是瞬时值而是平均值。位相电磁波辐照度与电矢量振幅平方成正比, 略去成正比的常数, 用电矢量振幅平方的平均值表示电磁波辐照度, 则辐照度为

$$\begin{aligned} I(\delta, \psi) &= \overline{E^2(\delta, \psi)} = \overline{E_t^2} \cos^2 \psi + \overline{E_n^2} \sin^2 \psi \\ &\quad + 2 \left[\overline{E_t E_n \cos \varphi \cos \delta} - \overline{E_t E_n \sin \varphi \sin \delta} \right] \sin \psi \cos \psi \end{aligned} \quad (1.19)$$

(1.19) 式表示感应元件测出的是光束特性所决定的四个平均值 $\overline{E_t^2}$, $\overline{E_n^2}$, $2\overline{E_t E_n \cos \varphi}$, $2\overline{E_t E_n \sin \varphi}$ 。这四个有相同量纲的数值反映了光束的统计平均特性。斯托克斯 (Stokes) 1852 年提出用以下四个参量 I , Q , U , V 来表示光束的强度和偏振特性。