

高等学校教材

# 分析力学

武汉水利电力学院 尤书平 编

水利电力出版社

高等学校教材

# 分析力学

武汉水利电力学院 尤书平 编

水利电力出版社

## 内 容 提 要

本书共分五章，内容包括：分析力学基本概念、虚位移原理、拉格朗日方程、正则方程与雅可比方程、力学的变分原理等。每章后均有习题。书末附有变分法简介、习题答案和主要参考书目。

本书可作为高等工科院校大学生或研究生的分析力学教材，亦可供有关专业科学研究人员和工程技术人员参考。

高等学校教材

分 析 力 学

武汉水利电力学院 尤书平 编

\*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

涿州市范阳印刷厂印刷

\*

787×1092毫米 16开本 9.5印张 208千字

1989年10月第一版 1989年10月北京第一次印刷

印数 0,001—2350册

ISBN7-120-00880-3/TV·284

定价 2.00元

## 前 言

这本书是为高等工科院校大学生与研究生撰写的，作为教材与参考书之用。它适用于力学、航空航天、机械、土木与水利等各类专业。

分析力学成为高等工科院校中一门独立的课程是近十几年的事。在50与60年代时，其部分内容是包含在理论力学课程中的。

分析力学是以力学的变分原理为基础，用分析的方法导出物体运动的基本微分方程，从而研究运动的一般规律的学科。它虽与理论力学同属经典力学范畴，但由于其理论依据与研究方法更高度的概括性，使其结论具有更强的普遍性。对于许多复杂的力学问题，分析力学可提供较为简捷的解法。

分析力学的主体理论，始自1788年拉格朗日(Lagrange)所著之《分析力学》。兹后经过哈密顿(Hamilton)、雅可比(Jacobi)、阿沛尔(Appell)及高斯(Gauss)诸力学先辈的相继补充与完善，其体系已日趋完整、内容亦不断丰富。本书选取了分析力学的主要内容，对学习对象有可能感兴趣的某些专题亦有所兼顾。

在高等工科院校所设课程中，分析力学属内容抽象、数学工具应用较多的一种。为便于读者把握理论实质并能用其结论解决实际问题，本书在遵循科学性与逻辑性的前提下，推证力求简明扼要，阐述尽量深入浅出，并结合理论安排了适量的例题与习题。

本书在正式付印前，曾在武汉水利电力学院某些专业的大学生与研究生中，作为教材使用过。教学实践说明，作为教材，本书篇幅对于30~50个课内学时(或2个学分左右)的课程较为适宜。带“\*”的内容可酌情选取。

稿成之后，本书曾由北京航空航天大学高为炳教授详细审阅。高教授从宏观到微观都提出了许多宝贵意见，对本书的修改工作帮助甚大，在此谨致深切谢意。

限于水平，书中当不乏疏漏、欠妥乃至错误之处，恳请读者指正。

编者

1988年5月于武汉

# 目 录

前言	
第一章 基本概念	1
第一节 约束及其分类	1
第二节 可能位移与虚位移 自由度	4
第三节 广义坐标	6
第四节 广义力	8
习题	11
第二章 虚位移原理	13
第一节 理想约束	13
第二节 虚位移原理	14
第三节 以广义力表示的虚位移原理	20
第四节 势力场中系统的平衡条件	22
第五节 平衡的稳定性	24
第六节 动力学普遍方程	27
习题	30
第三章 质点系统的运动微分方程	35
第一节 第一类拉格朗日方程	35
第二节 第二类拉格朗日方程	41
第三节 势力场中的第二类拉格朗日方程	46
第四节 第二类拉格朗日方程在非完整系统中的扩展形式	50
* 第五节 第二类拉格朗日方程讨论	54
第六节 拉格朗日方程的第一积分	56
* 第七节 阿沛尔方程	60
习题	70
第四章 哈密顿正则方程与雅可比方程	77
第一节 哈密顿正则方程	77
第二节 哈密顿正则方程的第一积分	82
* 第三节 罗斯方程	85
* 第四节 泊松括号	87
第五节 正则变换	90
第六节 哈密顿-雅可比方程	97
习题	104
第五章 力学的变分原理	108
第一节 高斯最小约束原理	108
* 第二节 赫芝最小曲率原理	112
第三节 哈密顿原理	114

# 第一章 基本概念

和任何一门学科一样，分析力学中牵涉的基本概念是很多的。但在本章，我们仅集中了与各章都有关的一些重要的概念，而其它一些基本概念则分别编入了有关的章节中。

对于非自由质点系，约束和约束方程的概念是很重要的，本章介绍了从不同观点出发的约束分类；可能位移、虚位移和与之有关的自由度是分析力学的一些最基本的概念，对于它们，理论上的定义和实例中的确定同样重要；广义坐标则是贯穿于分析力学始终的应用最普遍的概念，恰当地选择广义坐标是简捷解决问题的关键；本章最后还介绍了广义力的定义及求法，并给出了有势力系广义力的表达式。

## 第一节 约束及其分类

在研究一个质点系的运动时，首先必须指出运动是相对于哪一个坐标系而言的。如若在研究问题的全过程中，坐标系与静止的或作等速直线运动的物体固连，则称之为**惯性坐标系**（伽里略坐标系）。自然，静止也是相对的，通常认为足以满足当今各种力学问题要求的惯性坐标系有三种选法：①与地球固联；②以地心为原点，坐标轴指向三个恒星；③与太阳系固联。相对于惯性坐标系的运动是为**绝对运动**。此后，如无特别说明，运动均指绝对运动。

质点系中任一质点  $P$  的位置是由其**矢径**  $r$ ，（又称**位置矢**或**半径向量**）决定的，也可由矢径  $r$  的三个直角坐标决定（图 1-1）。若质点系的每一个质点对坐标系的运动不受任何限制，即每一质点均可占有任何空间位置和具有任意速度，则称为**自由系**，否则称为**非自由系**。所谓**约束**，就是对非自由系各质点的位置或速度所加的几何的或运动的限制条件。

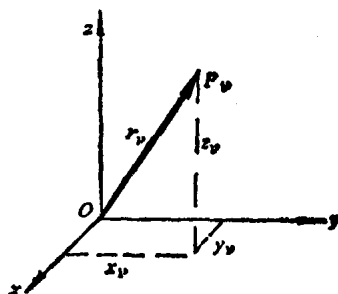


图 1-1

设有  $n$  个质点组成的非自由系，每个约束均可解析地表示为

$$f(t, r_\nu, \dot{r}_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-1)$$

式中， $t$  为时间； $r_\nu$  为质点  $P_\nu$  的矢径； $\dot{r}_\nu$  为质点  $P_\nu$  的速度。

式 (1-1) 通常称为**约束方程**。在直角坐标中约束方程可表为

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-1)'$$

约束可以按下面几种情况分类。

### 1. 定常约束和非定常约束。

约束方程 (1-1) 不显含时间  $t$  时，约束称为**定常约束**，又称**平稳约束**或**非时变约束**。

定常约束的约束方程一般为

$$f(r_\nu, \dot{r}_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-2)$$

约束方程中显含时间  $t$  的约束称为**非定常约束** (又称**非平稳约束**或**时变约束**)。其约束方程一般取公式 (1-1) 的形式。

例如图 1-2(a) 中, 若质点  $P$  由无重刚杆铰联于支座  $O$ , 则其约束方程为

$$r = l \quad \text{即} \quad r - l = 0 \quad (*)$$

或 
$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (**)$$

式 (\*), (\*\*) 与时间无关, 所以是定常约束。若如图 1-2(b) 所示, 联结质点  $P$  的无重柔索穿过  $O$  处的环而运动时, 长度  $l$  随时间变化。约束方程为

$$r - l(t) = 0 \quad (***)$$

式 (\*\*\*) 中显含时间  $t$ , 故为**非定常约束**。再如, 当情况 1-2(a) 的悬挂点在运动时, 约束方程中也将显含时间  $t$ , 定常约束从而亦变为**非定常约束**。

例如, 若悬挂点  $O$  在图平面内以运动规律  $s = 2t + t^2$  作水平运动时, 约束方程即为

$$x^2 + (y + 2t + t^2)^2 + z^2 - l^2 = 0$$

只有定常约束的质点系称为**定常系统**, 否则称为**非定常系统**。

2. 几何约束和运动约束, 完整约束和非完整约束。

约束方程中不包含速度  $\dot{r}$ , 时, 约束称为**几何约束**或**有限约束**, 其约束方程为

$$f(t, r, \dots) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (1-3)$$

有限约束给质点系可能占据的位置加了一定的限制, 故又称**位置约束**。若约束方程中包含速度  $\dot{r}$ , 则称约束为**微分约束**或**运动约束**。微分约束的约束方程一般为公式 (1-1) 的形式。显然微分约束不但限制质点系的位置还限制质点系的速度。今后, 只限于讨论这样的微分约束, 在它的方程中, 速度是线性出现的。即满足

$$\sum_{v=1}^n L_v \cdot \dot{r}_v + D = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (1-4)$$

式中矢量  $L_v$  和代数数量  $D$  均是时间  $t$  和矢径  $r_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) 的已知函数。同时还假定全体矢量  $L_v$  不同时为零。

若约束方程 (1-1) 是可以积分的, 则经过积分且加上适当的边界条件之后的约束方程便可与式 (1-3) 等价。这种情况下, 方程 (1-1) 所表示的约束称为**可积微分约束**。实际上, 可积微分约束就是有限约束。

有限约束和可积微分约束统称为**完整约束**, 不可积的微分约束称为**非完整约束**。可积微分约束有时也称为**半完整约束**。

式 (1-3) 和 (1-4) 也各有其直角坐标形式:

$$f(t, x_v, y_v, z_v) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (1-3)'$$

$$\sum_{v=1}^n (A_v \dot{x}_v + B_v \dot{y}_v + C_v \dot{z}_v) + D = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (1-4)'$$

式中,  $x_v, y_v, z_v$  为  $r_v$  在直角坐标系中的三个分量;  $\dot{x}_v, \dot{y}_v, \dot{z}_v$  为上述三个分量的速度;  $A_v, B_v, C_v$  为矢量  $L_v$  在直角坐标系中的三个分量。

例如图 1-3 中的圆盘, 在水平地面上沿直线运动。如果水平面绝对光滑, 则对此圆盘只

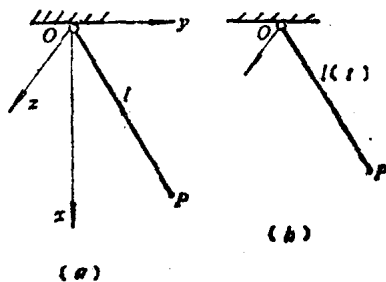


图 1-2

有一个约束条件

$$y_c = a \quad (a)$$

它表示球心  $C$  到水平面的距离不变。而当水平面很粗糙，圆盘只能滚动而不能滑动时，则除了上述有限约束外还有一个微分约束

$$\dot{x}_c - a\dot{\theta} = 0 \quad (b)$$

此约束方程积分后为

$$x_c - a\theta = 0 \quad (c)$$

由式 (a) 及式 (c) 知，圆盘受有完整的定常约束。

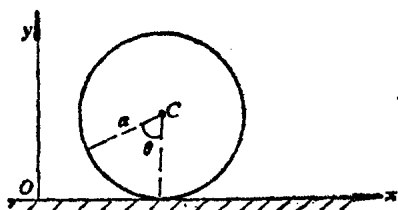


图 1-3

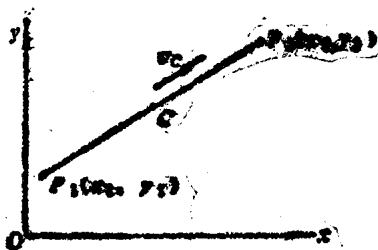


图 1-4

再如图 1-4 所示之质点  $P_1$ 、 $P_2$ ，由长为  $l$  的无重刚性杆联结。如果规定运动中杆的中点速度只可以沿着杆的方向，将杆所在平面定为  $Oxy$  面，则约束方程为

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0 \quad (a)$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} \quad (c)$$

上面诸式中最后一个式 (c) 是不可积分的，故二质点受有非完整的定常约束。

只拥有完整约束的质点系称为完整系统，否则称为非完整系统。

### 3. 单面约束和双面约束。

约束方程以等式表示时，约束称为双面约束，又称为固执约束或不可解约束。当约束方程为不等式时，则称约束为单面约束，又名非固执约束或可解约束。

例如图 1-5 (a) 中联结质点  $P$  的为无重刚性杆，约束方程为  $r = l$ ，是双面约束；图 1-5 (b) 中联结质点  $P$  的是无重柔索，约束方程为  $r \leq l$ ，是单面约束。对此例而言，等式成立时系统的情况与受有双面约束相同；而不等式成立时，则与无约束相同。

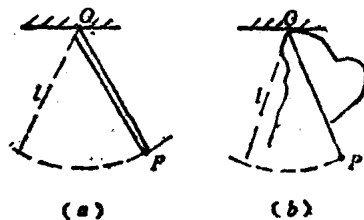


图 1-5

若有单面约束存在，质点系的运动可以分段处理：在约束起作用的一段上，质点系的运动和受有双面约束情况下一样；在约束不起作用的一段上，则和没有约束的情况一样。因此，在各个阶段上，单面约束或者可以代之以双面约束，或者可以无条件解除。于是，今后如无特别说明只限于讨论双面约束。

单面约束的通式可写成

$$f(t, r, \dot{r}) \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (1-5)$$



方程中，等号成立对应于约束起作用的情况。

## 第二节 可能位移与虚位移 自由度

设有一  $n$  个质点组成的质点系，其上有  $d$  个有限约束

$$f_a(t, \mathbf{r}_v) = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, d) \quad (**)$$

和  $g$  个不可积分的微分约束

$$\sum_{v=1}^n l_{\beta v} \cdot \dot{\mathbf{r}}_v + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (***)$$

现将式 (\*) 对时间  $t$  求导，得其微分形式

$$\sum_{v=1}^n \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}_v} \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial t} = 0 \quad (***)$$

以  $\mathbf{v}_v = \dot{\mathbf{r}}_v = \frac{d\mathbf{r}_v}{dt}$  代入式 (\*\*\*) 及式 (\*\*), 有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=1}^n \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}_v} \mathbf{v}_v + \frac{\partial f_a}{\partial t} &= 0 \quad (a = 1, 2, \dots, d) \\ \sum_{v=1}^n l_{\beta v} \cdot \mathbf{v}_v + D_\beta &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中  $\mathbf{v}_v$  是满足约束方程的矢径对时间  $t$  的导数。这个为约束所容许的速度，称为瞬时  $t$  质点系在其可能位置的**可能速度**。对于质点系在任一时刻  $t$  的任一可能位置，均存在无数组可能速度。而当质点系在时刻  $t$  作真实运动时，这无数组速度仅有一组被实现，被实现的就是**真实速度**。

现将无限小位移  $d\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v dt$  叫做**可能位移**，其中  $\mathbf{v}_v$  为可能速度。显然，将式 (1-6) 逐项乘以  $dt$ ，就得到决定可能位移的方程。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=1}^n \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}_v} d\mathbf{r}_v + \frac{\partial f_a}{\partial t} dt &= 0 \quad (a = 1, 2, \dots, d) \\ \sum_{v=1}^n l_{\beta v} \cdot d\mathbf{r}_v + D_\beta dt &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

**可能位移为约束所容许的无限小位移。**

取系统在同一时刻、同一位置的两组可能位移

$$d\mathbf{r}_v = \mathbf{v}_v dt, \quad d'\mathbf{r}_v = \mathbf{v}'_v dt \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

$d\mathbf{r}_v$  和  $d'\mathbf{r}_v$  都满足方程 (1-7)，故其差

$$\delta\mathbf{r}_v = d\mathbf{r}_v - d'\mathbf{r}_v$$

满足齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \delta \mathbf{r}_{\nu} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, d) \\ \sum_{\nu=1}^n l_{\beta\nu} \delta \mathbf{r}_{\nu} &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

差  $\delta \mathbf{r}_{\nu} = d\mathbf{r}_{\nu} - d'\mathbf{r}_{\nu}$  称为**虚位移**。满足方程 (1-8) 的任意一组矢量  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) 都是一组虚位移。确定虚位移的方程 (1-8) 和确定可能位移的方程 (1-7) 之间的差别仅在于 (1-8) 中没有  $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt$  和  $D_{\beta} dt$  项。由此可以看出, 对某一固定时刻  $t$ , 虚位移与可能位移则是一样的。所以**虚位移就是约束被“固结”(即  $t$  为特定时刻) 时的可能位移**。即是质点系从时刻  $t$  的某一可能位置到同一时刻另一可能位置的位移。也就是数学上的**等时变分**。

对于定常系统, 虚位移就是可能位移。而真实微位移也就是无穷多组虚位移中的一组, 真实位移不但要满足约束条件, 还要满足运动方程。对于非定常系统, 一般而言, 真实位移不与任何一组虚位移相重合。现通过一例子对可能位移、虚位移和真实位移的关系作具体的分析。

若质点  $P$  以长  $l$  的无重刚杆与支点  $O$  相联 (图 1-6), 当支点在过  $O$  垂直于图平面的直线上运动时, 为非定常系统。如在时刻  $t$ ,  $P$  的一个可能位置如图 1-6 所示, 系统的虚位移即是约束被“固结”时质点所可能获得的无穷小位移。此例中, 是在图平面内以  $O$  点为圆心, 以  $l$  为半径的圆弧切向的无穷小位移, 即图 1-6 中的  $\delta \mathbf{r}$ 。而可能位移则是在以过  $O$  垂直于图平面的直线为轴, 以  $l$  为截面半径的正圆柱切面上的无穷小位移。真实无穷小位移显然是柱切面上满足

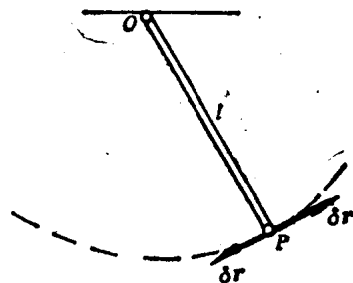


图 1-6

运动方程的那个可能位移。当支点不动时, 系统为定常的, 此时虚位移和可能位移均为图平面上以  $O$  为圆心, 以  $l$  为半径的圆弧切线上的微位移, 真实微位移为圆弧切线上满足运动方程的微位移。必须注意, 上述的所有位移都是指时刻  $t$ , 系统某一位置“附近的”微位移, 即图示  $P$  点“附近的”微位移。

在直角坐标系中, 确定虚位移的方程 (1-8) 可写成

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_{\nu}} \delta y_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_{\nu}} \delta z_{\nu} \right) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, d) \\ \sum_{\nu=1}^n (A_{\beta\nu} \delta x_{\nu} + B_{\beta\nu} \delta y_{\nu} + C_{\beta\nu} \delta z_{\nu}) &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中,  $\delta x_{\nu}$ 、 $\delta y_{\nu}$ 、 $\delta z_{\nu}$  是虚位移  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$  沿坐标轴的投影, 称作**虚增量**;  $A_{\beta\nu}$ 、 $B_{\beta\nu}$ 、 $C_{\beta\nu}$  为  $l_{\beta\nu}$  沿坐标轴的投影。

式 (1-9) 中的  $d + g$  个方程如果全是独立的, 则  $3n$  个虚增量  $\delta x_{\nu}$ 、 $\delta y_{\nu}$ 、 $\delta z_{\nu}$  中将只有  $k$  个是独立的。

$$k = 3n - (d + g) \quad (1-10)$$

称  $k$  为质点系的**自由度**。即, 自由度是某一固定时刻质点系能自由变更的独立的坐标个数。

如图 1-4 所示之例子，质点数目为  $n = 2$ ，几何约束数目  $d = 3$ 。微分约束数目  $g = 1$ ，系统的自由度  $k = 3n - (d + g) = 3 \times 2 - (3 + 1) = 2$ 。事实上，可将此系统看作在冰上滑动的冰刀。这个例子在下面还要讨论。

### 第三节 广义坐标

在研究  $n$  个质点组成的非自由质点系的运动时，用直角坐标  $x, y, z$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) 描述其位置并不方便，因为系统受到某些约束的限制而使这  $3n$  个坐标不全为独立变量。即不需要这些坐标的全部，就可完全决定系统中所有质点的位置。例如，空间自由质点的位置可以用直角坐标  $x, y, z$  表示，它们之间完全是独立的。如果限定质点在某一平面内运动，则  $x, y, z$  之间还要满足一个约束方程

(在此是平面的方程)，故三个坐标中就只有两个是独立的了。再如图 (1-7) 所示之双摆，当其在  $Oxy$  平面中运动时，描述系统运动的  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ ，六个变量间必须满足约束方程

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \quad z_2 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= l_2^2 \end{aligned}$$

所以独立的变量仅有  $6 - 4 = 2$  个。

对于这两个具体例子，它们的位置均可由两个独立的变量决定，但它们的直角坐标数却分别为 3 和 6。显然，用独立的变量描述系统将更方便。

能决定系统位置的彼此独立的变量称为系统的广义坐标。广义坐标的特点是它们之间无依赖关系，故又称作独立坐标。

广义坐标并不一定取作直角坐标，也可选用其他变量。通常采用的广义坐标除直角坐标外，还有弧长  $s$ 、角度  $\varphi$  等。再以上面双摆为例，系统的独立变量为 2，即广义坐标的数目为 2。广义坐标可取为  $x_1, y_2$  或  $y_1, x_2$ ，还可取为  $\varphi$  与  $\psi$ 。由此可见，对于同一问题，可以选取不同的广义坐标。但不管怎样选取，广义坐标必须是互相独立的（如本例就不能取  $x_1, y_1$  为广义坐标），而且一经确定后，系统的位置也就相应地完全被确定了。广义坐标的选择主要根据研究问题的需要而定。

如由  $n$  个质点组成的非完整质点系有  $d$  个完整约束，则广义坐标的个数为

$$k_1 = 3n - d \quad (1-11)$$

这是因为每一个完整约束（对质点系中各质点的几何位置加以限制的约束），可以在  $3n$  个直角坐标 ( $x, y, z$ ) 中消去一个可以独立改变的坐标。将式 (1-11) 与式 (1-10) 相比较可知，对于非完整系统，自由度数  $k$  与广义坐标数  $k_1$  并不相等。如上节中提到的冰刀 (图 1-8) 可认为系统为刚杆联结的二质点。完整约束数目  $d = 3$  (见本章第一节)，

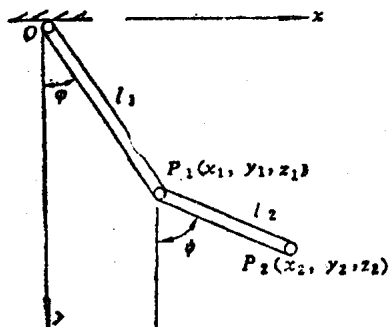


图 1-7

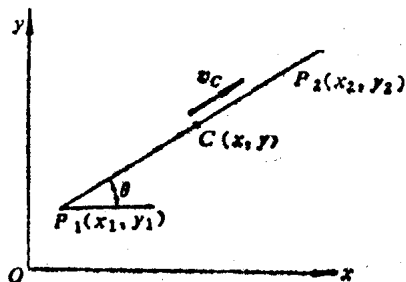


图 1-8

质点数目  $n = 2$ ；故广义坐标数  $k_1 = 3n - d = 3 \times 2 - 3 = 3$ ，而由上节知此系统的自由度  $k = 2$ ，可见二者不等。若选广义坐标为  $x, y, \theta$ ，因冰刀中点  $C$  的速度沿冰刀刃，故其微分约束为

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta$$

即

$$\delta y = \delta x \operatorname{tg} \theta$$

所以广义坐标的虚位移  $\delta x, \delta y, \delta \theta$  中只有二个是独立的。当然，若质点系为完整的，由于  $\mathcal{E} = 0$  而总有自由度与广义坐标数相等的结论。

以  $q_i (i = 1, 2, \dots, k_1)$  表示广义坐标，则描述质点系位置的矢径  $r$ ，将由  $q_i$  所决定。对于完整系统，有

$$r_\nu = r_\nu(q_1, \dots, q_k, t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-12)$$

及

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, \dots, q_k, t) \\ y_\nu &= y_\nu(q_1, \dots, q_k, t) \\ z_\nu &= z_\nu(q_1, \dots, q_k, t) \end{aligned} \right\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-12)'$$

式 (1-12) 及 (1-12)' 中的  $k$  为系统的自由度。

当系统为定常的，式 (1-3) 和 (1-3)' 中则不显含  $t$ 。因之，总可以找到一些广义坐标  $q_1, q_2, \dots, q_k$ ，使得式 (1-12) 和 (1-12)' 中也不显含  $t$ 。所以对于定常系统，有形式

$$r_\nu = r_\nu(q_1, \dots, q_k) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-13)$$

及

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, \dots, q_k) \\ y_\nu &= y_\nu(q_1, \dots, q_k) \\ z_\nu &= z_\nu(q_1, \dots, q_k) \end{aligned} \right\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1-13)'$$

### 例1-1 自由质点

自由质点  $P$  上没有任何约束，故其自由度为 3。广义坐标可取直角坐标或任何其它坐标，如取柱坐标  $r, \psi, z$  为广义坐标，则式 (1-12)' 为

$$\begin{aligned} x &= r \cos \psi, \\ y &= r \sin \psi, \\ z &= z \end{aligned}$$

如取球坐标  $r, \varphi, \psi$  为广义坐标，

式 (1-12)' 则为

$$\begin{aligned} x &= r \cos \psi \sin \varphi, \\ y &= r \sin \psi \sin \varphi, \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

例1-2 在动平面上运动的非自由质点，球心速度  $\dot{x}_A = a, \dot{y}_A = b, \dot{z}_A = c$  (图1-9)。此时约束方程为

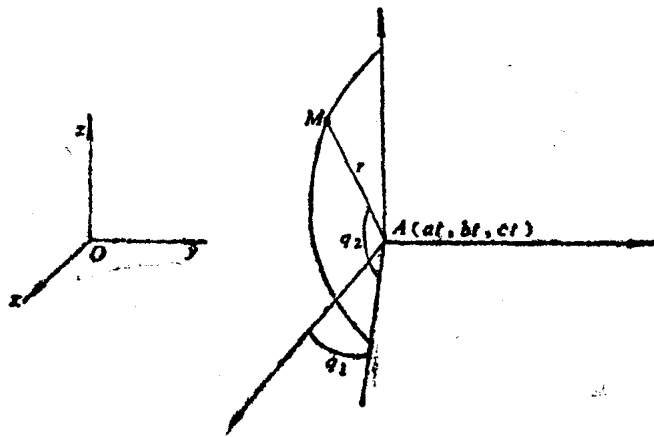


图 1-9

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 = r^2$$

自由度  $k = 2$ , 可以取球面上的经度和纬度分别作广义坐标  $q_1, q_2$ . 式 (1-13)' 为

$$x = at + r \cos q_1 \cos q_2$$

$$y = bt + r \sin q_1 \cos q_2$$

$$z = ct + r \sin q_2$$

广义坐标  $q_i$  的变分  $\delta q_i$  称为**广义虚位移**. 广义虚位移  $\delta q_i$  与虚位移  $\delta r$  的区别在于前者是独立的, 而后者却必须满足式 (1-8).

#### 第四节 广 义 力

设有  $n$  个质点组成的系统, 其自由度为  $k$ , 其广义坐标为  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). 假定此系统质点  $P$  的矢径为  $r$ , 质点所受的力为  $F$ . 显然, 各矢径可表为广义坐标的函数, 即

$$r = r_\nu(q_i, t) \quad \begin{cases} \nu = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (1-14)$$

于是可知, 质点  $P$  的虚位移与广义虚位移的关系为

$$\delta r = \sum_{i=1}^k \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad (1-15)$$

在此虚位移中, 力系  $\{F_\nu\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) 所作虚功之和为

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{\nu=1}^n F_\nu \cdot \delta r_\nu = \sum_{i=1}^k F_\nu \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \cdot \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{\nu=1}^n F_\nu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^k Q_i \delta q_i \end{aligned} \quad (1-16)$$

式中  $\delta q_i$  的系数  $Q_i$  称为**广义力**. 对应于每一广义坐标, 均有一广义力, 广义力在功的表达式中占据“力”的位置. 它由下式确定.

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^n F_\nu \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1-17)$$

式 (1-16) 说明, 力系  $F$  在虚位移中所作虚功等于各广义力  $Q_i$  与相应的广义坐标虚增量  $\delta q_i$  的乘积之和. 广义力是标量而非矢量. 广义力与相应的广义坐标的乘积具有功的量纲: 力  $\times$  长度. 所以当广义坐标是角度、长度、面积或体积时, 与之相当的广义力的量纲则应该是力  $\times$  长度、力、力/长度或力/(长度)<sup>2</sup>.

在具体计算广义力时, 除用式 (1-17) 外, 还可用以下方法, 有时更为简便.

1. 将式 (1-17) 写成直角坐标形式. 即

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^n \left( F_{\nu x} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + F_{\nu y} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + F_{\nu z} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1-17)'$$

式中,  $F_{\nu x}$ 、 $F_{\nu y}$ 、 $F_{\nu z}$  为质点  $P$  所受外力  $F$  在直角坐标轴上的投影;  $x_\nu$ 、 $y_\nu$ 、 $z_\nu$  为  $P$  的位置坐标.

当各质点的坐标可以表示为广义坐标的函数时，直接用式 (1-17)' 是很方便的。

2. 在求某一广义力  $Q_i$  时，仅使第  $i$  个广义坐标  $q_i$  得到某一增量，而令其余广义坐标保持不变，然后计算主动力系  $\{F_\nu\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) 在广义虚位移  $\delta q_i$  上的元功  $\delta A_i$ 。由式 (1-16) 有

$$\delta A_i = Q_i \cdot \delta q_i$$

即得

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i} \quad (1-18)$$

3. 如若力系  $F_\nu$  中各力都是有势力，即系统处于有势力场，相应的势能为  $V(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ 。则由理论力学知

$$F_{\nu,x} = -\frac{\partial V}{\partial x_\nu}, \quad F_{\nu,y} = -\frac{\partial V}{\partial y_\nu}, \quad F_{\nu,z} = -\frac{\partial V}{\partial z_\nu} \quad (1-19)$$

将式 (1-19) 代入式 (1-17)' 得

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^n \left( -\frac{\partial V}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right)$$

由式 (1-12)', 知  $x_\nu, y_\nu, z_\nu$  均为  $q_i$  的函数，故

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right)$$

所以

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (1-20)$$

在势能计算比较容易的情况下，应用 (1-20) 求广义力是很方便的。

**例1-3** 绕固定轴  $Oz$  转动的刚体(图 1-10)，其上作用有力  $F_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ )。系统只有一个自由度，故只选一个广义坐标就可确定系统位置。选转角  $\varphi$  为广义坐标，

有

$$\delta A = \sum_{j=1}^l M_z(F_j) \delta \varphi$$

式中， $\sum_{j=1}^l M_z(F_j)$  为作用到刚体上的全部 ( $l$ ) 个

力对轴  $Oz$  之矩的和，而广义力为

$$Q = \sum_{j=1}^l M_z(F_j)$$

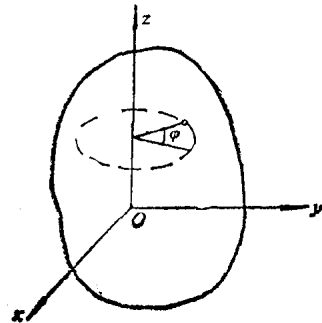


图 1-10

**例1-4** 平面数学双摆由重各为  $W_1$  及  $W_2$  的质点  $A$ 、 $B$  及长分别为  $l_1$ 、 $l_2$  的无重刚杆组成。若选二杆与铅垂线的夹角  $\varphi$  和  $\psi$  为广义坐标(图 1-11)，求系统之广义力。

**解：**数学双摆的约束力在任何虚位移中作功之和均为零，所以在求广义力时只需计算主动力作功。此系统显然只有两个自由度，选  $\varphi$ 、 $\psi$  为二广义坐标。

方法1 应用公式 (1-17)'。

由已知条件, 有

$$\left. \begin{aligned} F_{1x} = F_{1y} = F_{2x} = F_{2y} = 0 \\ F_{1y} = W_1, \quad F_{2y} = W_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将式 (a) 及  $q_1 = \varphi$ 、 $q_2 = \psi$  代入式 (1-17)', 则对应  $\varphi$ 、 $\psi$  的广义力为

$$\left. \begin{aligned} Q_1 = W_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + W_2 \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} \\ Q_2 = W_1 \frac{\partial y_1}{\partial \psi} + W_2 \frac{\partial y_2}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

以广义坐标表示直角坐标, 由几何关系得

$$\left. \begin{aligned} y_1 = l_1 \cos \varphi, \\ y_2 = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

式 (c) 代入式 (b), 有

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= W_1 \frac{\partial(l_1 \cos \varphi)}{\partial \varphi} + W_2 \frac{\partial(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi)}{\partial \varphi} \\ &= -(W_1 + W_2) l_1 \sin \varphi, \\ Q_2 &= W_1 \frac{\partial(l_1 \cos \varphi)}{\partial \psi} + W_2 \frac{\partial(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi)}{\partial \psi} \\ &= -W_2 l_2 \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

方法 2 求  $Q_1$  时给  $\varphi$  一个微小增量  $\delta\varphi$ , 而令  $\psi$  保持不变, 见图 1-11(a)。这时质点 A 和 B 的虚位移相等, 即

$$\delta r_A = \delta r_B = l_1 \delta\varphi \quad (a)$$

故力  $W_1$  及  $W_2$  所作元功之和为

$$\delta A_1 = -W_1 \delta r_A \sin \varphi - W_2 \delta r_B \sin \varphi = -(W_1 + W_2) l_1 \sin \varphi \delta\varphi \quad (b)$$

由式 (1-18) 得

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi} = -(W_1 + W_2) l_1 \sin \varphi \quad (c)$$

求  $Q_2$  时给  $\psi$  一个微小增量  $\delta\psi$ , 而令  $\varphi$  保持不变, 见图 1-11(b), 这时质点 A 无虚位移, 质点 B 的虚位移  $\delta r_B = l_2 \delta\psi$ 。力系中只有  $W_2$  做功, 即

$$\delta A_2 = -W_2 \delta r_B \sin \psi = -W_2 l_2 \sin \psi \delta\psi$$

由式 (1-18) 得

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta\psi} = -W_2 l_2 \sin \psi \quad (e)$$

方法 3 质点系中所有在虚位移中做功的力  $W_1$  及  $W_2$  均为有势力。取  $\varphi = \psi = 0$  的位置为势能零位置, 则当系统在如图 1-11(a) 位置时, 势能为

$$V = W_1 l_1 (1 - \cos \varphi) + W_2 [l_1 (1 - \cos \varphi) + l_2 (1 - \cos \psi)] \quad (a)$$

由式 (1-20) 得

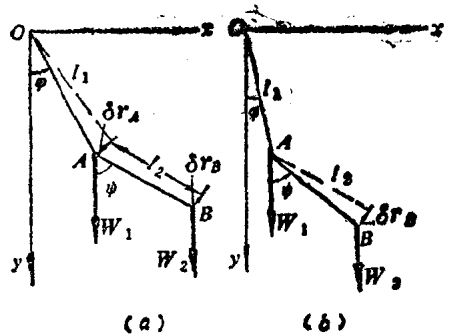


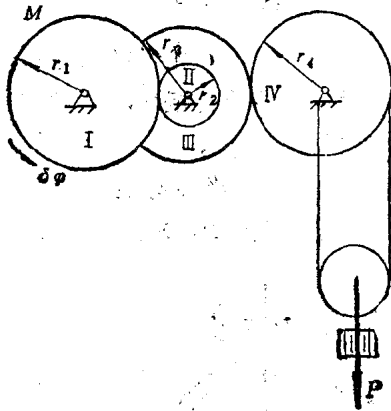
图 1-11

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\delta V}{\delta \varphi} = -(W_1 + W_2)l_1 \sin \varphi \\ Q_2 &= -\frac{\delta V}{\delta \psi} = -W_2 l_2 \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

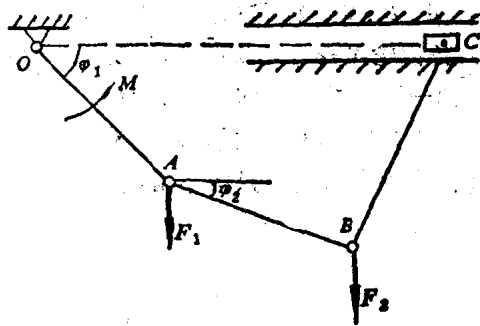
通过上述二例题，读者可对求广义力的不同方法有所了解。至于如何选用，则是因题而异了。

### 习 题

1-1 提升设备如图所示，各轮半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$  和  $r_4$ ，取  $\varphi$  为广义坐标，试求对应于  $\varphi$  的广义力。



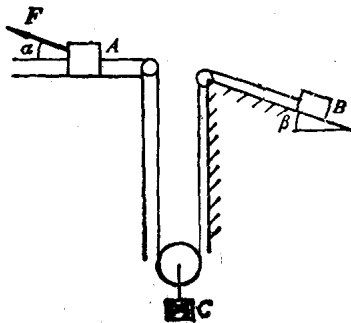
题 1-1图



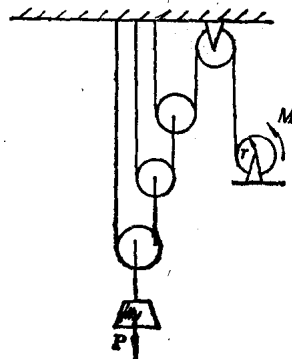
题 1-2图

1-2 三根长为  $l$  的杆件  $OA$ 、 $AB$ 、 $BC$  联结如图，各杆质量不计。在杆  $OA$  上作用一力矩  $M$ ，在  $A$ 、 $B$  两点分别作用一铅直向下的力  $F_1$ 、 $F_2$ ，试求对应于广义坐标  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  的广义力。

1-3 物块  $A$  重  $P_1$ ，搁置于水平面上；物块  $B$  重  $P_2$ ，放在与水平成  $\beta$  角的倾斜面上。两物块通过动滑轮相联如图。动滑轮本身质量不计，其上挂有重物  $C$  重  $W$ 。物块  $A$  受一与水平成  $\alpha$  角的力  $F$ 。试求系统的广义力。



题 1-3图

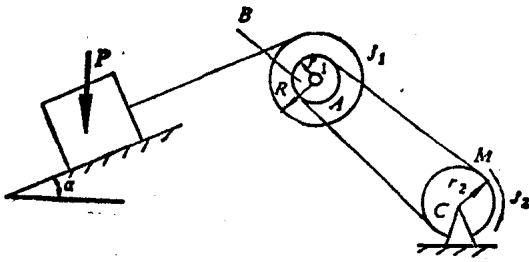


题 1-4图

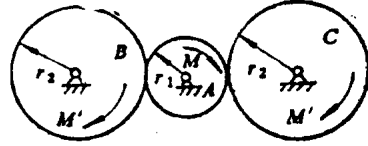
1-4 滑轮组提升一重  $P$  的物体，已知电动机作用到卷筒上的转矩为  $M$ ，卷筒对转动轴的转动惯量为  $J$ 。若以物块的位移为广义坐标，试求对应的广义力。



1-5 卷扬机拖一重  $P$  的物块沿倾角为  $\alpha$  的斜面上滑, 各轮尺寸如图。轮  $A$  与轮  $B$  对转轴的总转动惯量为  $J_1$ , 轮  $C$  对转轴的转动惯量为  $J_2$ 。已知在轮  $C$  上作用一转矩  $M$  (顺时针), 重物与斜面间的动摩擦力为其重量的  $0.1$  倍。求对应于轮  $C$  转角的广义力。



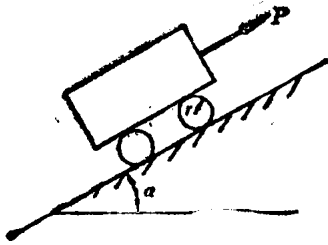
题 1-5图



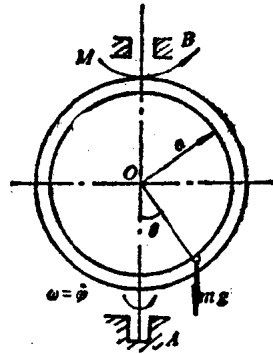
题 1-6图

1-6  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三齿轮互相啮合。 $A$  轮半径为  $r_1$ , 质量为  $m_1$ ;  $B$ 、 $C$  轮半径均为  $r_2$ , 质量均为  $m_2$ 。各齿轮可视为均质圆盘。已知在  $A$  轮上作用一顺时针方向的转矩  $M$ ,  $B$  轮与  $C$  轮则分别受到一顺时针方向的阻力矩  $M'$ 。求对应于  $A$  轮转角  $\varphi$  的广义力。

1-7 车子沿倾角为  $\alpha$  的斜面运动, 车重  $W_1$ , 所有轮子共重  $W_2$ , 半径均为  $r$ , 可视为均质圆盘。若轮在斜面上只滚不滑, 小车上作用一平行于斜面的拉力  $P$ , 求广义力。



题 1-7图



题 1-8图

1-8 质量为  $m$  的小球在半径为  $a$  的圆管内运动, 圆管可绕铅直轴  $AB$  转动, 圆管上作用有使其角速度保持不变的转矩  $M$ , 求广义力。