

抽象代数学

N. 賈柯勃遜著

卷 2

綫性代数

科学出版社

51.48

7/5

乙

抽 象 代 数 学

N. 賈柯勃遜 著

黃 綠 芳 譯

卷 2

綫 性 代 数

科



第 50 卷 2 版

社

N. JACOBSON
LECTURES IN ABSTRACT ALGEBRA
Vol. II
Linear Algebra
1953

內 容 簡 介

本书是 N. 賈柯勃遜著“抽象代数学”的第二卷，专门介紹綫性代数。本卷虽常使用卷 1 的名詞和結果，但作者尽量使本卷內容自成一体，易于閱讀。书中有許多精选的例子及习题，給讀者大量机会来考察自己对于理論的理解。

本书可作为高等学校理工方面師生的参考书。

抽 象 代 数 学 (卷 2)

N. 賈柯勃遜 著
黃 綠 芳 譯

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可證出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1960 年 3 月第 一 版
1960 年 3 月第一次印刷
(京) 00001—10,000

书号: 2103 字数: 214,000
开本: 787×1092 1/27
印张: 9 25/27

定价: 1.05 元

序

本卷是著者的“抽象代数学”三卷中的第二卷。要理解本卷的内容,对第一卷里所述的羣、环、域、同态等基本概念必須有一定程度的熟悉。但我們曾試使綫性代数的叙述与第一卷的細节知識无关,有时列出特殊結果的参考文献,但若干必需的基本概念則予重述。一句話,我們希望对数学有充分修养及对近世代数的基本概念熟悉的讀者能完全理解地讀完这卷。

本卷着重于抽象概念方面;但时常与这个观点有些出入。形式的計算方法有时給出更明确的結果。再則綫性代数的結果自身不是一个終点,而是用在数学及其应用的各分支的主要工具。所以,掌握构造性的而且可用于数值問題的方法是有用的。这些方法有时需要較长的討論,但我們觉得照所指陈的理由来看,它們的提出是正确的。对于抽象代数很熟練的讀者无疑地会看清捷徑的。有些方法則見于脚註中。

书中含有大量习题,很多是用簡單数字說明理論的,其它是难题,用以考驗优秀的讀者。無論如何,要对本卷内容懂得透澈,細心研究这些习题是必要的。

本卷編写的各阶段中,曾利用許多朋友的意見和評論;特別感謝克里福得(A. H. Clifford)、霍亦才得(G. Hochschild)及卡浦兰斯基(I. Kaplansky)关于本卷早期論述的各种建議。我也大大地感謝三年級同学米勒斯(W. H. Mills)的辛苦地协助証明及关于本卷最后修改的各种建議。

賈柯勃遜

1952年9月于新哈文(New Haven, Conn.)

目 录

序.....	i
第一章 有限維向量空間.....	1
1. 抽象向量空間	3
习题 1	5
2. 右向量空間	5
3. 0 -模	6
习题 2	8
4. 綫性相关	8
习题 3	12
5. 維数的不变性	12
习题 4	13
6. 基及陣	13
习题 5	16
7. 陣論上的应用	16
习题 6	19
8. 向量集合的秩. 行列式秩	19
习题 7	22
9. 商空間	22
10. 子空間的代数	23
习题 8	25
11. 无关子空間, 直接和	25
习题 9	27
第二章 綫性变换	28
1. 定义及例子	28
习题 10	29
2. 綫性变换的合成	29
习题 11	32

3. 綫性变换的陣	32
习题 12	34
4. 陣的合成	34
习题 13	37
5. 基的改变, 陣的等价及相似	37
习题 14	39
6. 綫性变换的秩空間与核空間	39
习题 15	41
7. 綫性方程組	42
习题 16	44
8. 右向量空間里的綫性变换	44
习题 17	45
9. 綫性函数	45
习题 18	47
10. 有限維空間与它的共軛空間之間的对偶性	47
习题 19	49
11. 綫性变换的折轉	50
12. 折轉的陣	51
13. 射影	53
习题 20	55
第三章 单独一个綫性变换的理論	56
1. 綫性变换的最低多項式	56
习题 21	58
2. 循环子空間	58
3. 用最低多項式为指导的向量的存在	60
习题 22	61
4. 循环綫性变换	61
习题 23	65
5. 由綫性变换决定的 $\Phi[\lambda]$ -模	66
6. 有限生成的 σ -模, 这里 σ 是一个主理想整区	67
7. $\mathfrak{S}$ 及 $\mathfrak{R}$ 的生成元素的正規化	69
8. 元素属于主理想整区的陣的等价	70
习题 24	74

9. 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的结构	75
10. 不变性定理	78
11. 向量空间关于綫性变换的分解	81
习题 25	87
12. 特征多项式及最低多项式	87
习题 26	88
13. 定理 13 的直接证明	89
习题 27	92
14. 跡及特征多项式的形式的性质	92
习题 28	94
15. 循环 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环	94
习题 29	95
16. 有限生成的 $\mathfrak{o}$ -模的 $\mathfrak{o}$ -自同态环的决定, $\mathfrak{o}$ 是主理想整区	95
17. 与給定的綫性变换可交换的綫性变换	98
习题 30	99
18. 环 $\mathfrak{B}$ 的心	100
习题 31	101
第四章 綫性变换的集合	102
1. 不变子空间	102
习题 32	104
2. 誘导綫性变换	104
习题 33	106
3. 合成空间列	106
4. 綫性变换集合的可分解性	108
习题 34	110
5. 完全可約性	110
习题 35	111
6. 与算子羣論及模論的关系	112
7. 单独一个綫性变换的可約性、可分解性、完全可約性	113
习题 36	115
8. 空间关于一个綫性变换的准素支空间	115
习题 37	118
9. 交换綫性变换的集合	118

习题 38	119
第五章 双綫性形式	121
1. 双綫性形式	121
习题 39	123
2. 双綫性形式的陣	123
3. 非退化形式	124
习题 40	126
4. 綫性变换关于一对双綫性形式的折轉	126
习题 41	129
5. 綫性变换与双綫性形式間的另一个关系	129
6. 純量积	131
7. 厄米特純量积	133
习题 42	135
8. 厄米特純量积的陣	135
习题 43	137
9. 特殊可除环上对称及厄米特純量积	137
习题 44	141
10. 交錯純量积	142
习题 45	143
11. 威特定理	144
习题 46	151
12. 非交錯斜称形式	151
第六章 欧几里得空間及单式空間	154
1. 笛卡儿基	154
习题 47	157
2. 綫性变换与純量积	157
3. 正交完全可約性	158
4. 对称、斜称及正交綫性变换	159
5. 对称及斜称綫性变换的典型陣	160
习题 48	162
6. 交換的对称及斜称綫性变换	163
习题 49	164

7. 正規及正交綫性变换	165
习题 50	166
8. 半定变换	166
习题 51	168
9. 任意綫性变换的极因子分解	168
习题 52	170
10. 单式几何学	170
习题 53	173
11. 綫性变换的分析函数	173
习题 54	177
第七章 向量空間的积	178
1. 向量空間的积羣	178
习题 55	181
2. 綫性变换的直接积	181
习题 56	182
3. 双侧向量空間	182
习题 57	185
4. 克伦內克积	186
习题 58	188
5. 綫性变换及陣的克伦內克积	189
习题 59	191
6. 张量空間	191
7. 张量的对称类	194
习题 60	197
8. 向量空間的域的扩张	197
9. 关于陣集合的相似性的一个定理	199
习题 61	201
10. 代数的另一定义,代数的克伦內克积	201
习题 62	202
第八章 綫性变换环	203
1. $\mathcal{L}$ 的单純性	203
习题 63	204

2. 算子方法	204
3. $\mathcal{L}$ 的左理想	205
习题 64	207
4. 右理想	208
习题 65	209
5. 綫性变换环的同构	209
习题 66	212
第九章 无限維向量空間	214
1. 基的存在	215
2. 維数的不变性	216
3. 子空間	217
4. 綫性变换及陣	218
5. 共軛空間的維数	220
习题 67	222
6. 綫性变换的有限拓扑	222
习题 68	225
7. $\mathfrak{A}^*$ 的全子空間	225
习题 69	227
8. 对偶空間, 克伦內克积	227
习题 70	230
9. 綫性变换环里双側理想	231
10. 綫性变换的稠密环	233
习题 71	237
11. 同构定理	238
习题 72	240
12. 反自同构与純量积	240
习题 73	244
13. 叔尔引理, 一般稠密性定理	244
14. 綫性变换的不可約代数	247
汉英名詞对照表	250
人名索引	255

第 一 章

有 限 維 向 量 空 間

向量在三維解析几何学里是按几何性质来定义的。这里无须重提。从代数观点来说,主要事实是: 向量 v 乃由它(关于一定坐标系)的三个坐标 (ξ, η, ζ) 完全确定。习惯上记作 $v = (\xi, \eta, \zeta)$, 意味着: v 是这样的向量, 它的 x -, y -及 z -坐标顺序为 ξ, η , 及 ζ 。反过来, 实数的任意有序三元组 (ξ, η, ζ) 决定一个一定向量。所以在 3-空間里, 向量与实数的有序三元组間存在着 1—1 对应。

几何学里关于向量有三个基本运算: 向量的加法, 向量与純量(数)的乘法, 向量的数积。这里也无須再提这些合成的几何定义, 只要說明在三元組上与几何运算对应的代数方法就够了。如果 $v = (\xi, \eta, \zeta)$ 及 $v' = (\xi', \eta', \zeta')$, 則和

$$v + v' = (\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta').$$

向量 v 与实数 ρ 的积 ρv 是向量

$$\rho v = (\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta),$$

而 v 与 v' 的純量积 (v, v') 是实数

$$(v, v') = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'.$$

解析几何学的主要部分——綫性相关論及綫性变换論——只与这些概念中的前两者有关。正是这个部分(的扩张形状)构成本书討論的主要論題。純量积的概念是一种度量概念, 在我們的討論中将放在次要地位。

向量关于加法及用数乘的乘法可有两个扩张方向。一个是: 我們的考虑无须限制于三元組, 而是对于任意正整数 n 来观察 n 元組。另一个是: 我們无须假定坐标 $\xi, \eta, \dots$ 是实数。要保証綫性相关論的有效, 我們只須假定有理运算能够施行; 因此可用任意

域来代替实数域。不仅如此，我們还不难进一步把基础数系的可交換性的假設摘去。

所以我們的討論从一个給定的可除环 Δ 出发；例如， Δ 可取下列的任意一个数系：1) 实数域，2) 复数域，3) 有理数域，4) 模 p 下的剩余域，或 5) 实四維数的可除环。

令 n 是一个固定的正整数，并且令 $\Delta^{(n)}$ 表 n 元組 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的全体，这里 $\xi_i \in \Delta$ 。这些 n 元組叫做向量，而 $\Delta^{(n)}$ 叫做 Δ 上 n 元組的向量空間。如果 $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ，則 $x = y$ 必須而且只須 $\xi_i = \eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。仿照三維实空間情形，我們在 $\Delta^{(n)}$ 里引入两个合成：向量的加法及以 Δ 的元乘向量的乘法。首先，如果 x 及 y 是任意向量，我們定义它們的和 $x + y$ 为向量

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n).$$

关于以 Δ 的元乘向量的乘法有两种可能：一种是由

$$\rho x = (\rho \xi_1, \rho \xi_2, \dots, \rho \xi_n)$$

定义的左乘法，另一种是由

$$x \rho = (\xi_1 \rho, \xi_2 \rho, \dots, \xi_n \rho)$$

定义的右乘法。这两种中的任意一种都可使用，得出的理論是平行的。但此后我們只采用左乘法，得出的所有結果都可轉变为右乘法上結果，这是不待贅言的。

本书的前八章是討論在上面定义的合成下的代数系 $\Delta^{(n)}$ 。我們采用公理的方法，亦即从列举作为代数系 $\Delta^{(n)}$ 的公理的簡單性質来导出所有結果。这些公理定义一个有限維(抽象)向量空間的概念，而代数系 $\Delta^{(n)}$ 是这种空間的例子。不但如此，我們还会知道，有限維向量空間的任意其它例子实际上都与一个代数系 $\Delta^{(n)}$ 等价。

所以，采取公理的观点不是受着导致一般化的愿望的推动，目的还是在于集中注意去弄明白这些代数系的实际性質，以便把結果容易应用于其它具体例子中。着眼点的放寬最后自然导致在討論向量空間里有用的其它更一般概念的考究。这些概念中最重要的是模的概念，它成为单一綫性变换論(第三章)的主要工具。为

着对于这种应用做好准备,这里从讨论一开始即将叙述这个概念.

本章的目的在給向量空間論奠定基础,要討論的主要概念有:基,綫性相关,子空間,商空間及子空間的格.

1. 抽象向量空間 今列出 $\Delta^{(n)}$ 里合成的性質于次,这些代数系的整个理論都可由此导出:

$$A1 \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

$$A2 \quad x + y = y + x.$$

$$A3 \quad \text{有一个元素 } 0 \text{ 存在,使对于一切 } x \text{ 有 } x + 0 = x.$$

$$A4 \quad \text{对于任意向量 } x \text{ 有一个向量 } -x \text{ 存在,使 } x + (-x) = 0.$$

$$S1 \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

$$S2 \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

$$S3 \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

$$S4 \quad 1x = x.$$

F 存在着有限个向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$, 使所有向量都有一种方法, 并且只有一种方法写成 $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ 的形状.

$A1, A2, S1-S4$ 可以直接验证. $A3$ 可由观察 $(0, 0, \dots, 0)$ 具有所需的性質而得証明. $A4$ 可由观察: 如果 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则可取 $-x = (-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n)$ 而得証明. 要証 F, 我們取 e_i 为

$$(1) \quad e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

于是, $\xi_i e_i$ 的第 i 位置是 ξ_i , 而其余坐标是 0. 因此 $\sum \xi_i e_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. 所以, 如果 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则 x 可写成向量 e_i 的“綫性組合” $\sum \xi_i e_i$. 这个关系还指出: 如果 $\sum \xi_i e_i = \sum \eta_i e_i$, 则 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. 从而 $\xi_i = \eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 这就肯定了 F 里的唯一性.

性質 $A1-A4$ 說明: $\Delta^{(n)}$ 在加法合成下是交換羣. 性質 $S1-S4$ 是用 Δ 的元作乘法及这个合成与加法合成間的关系的性質. 性質 F 是有限性基本条件.

今用这些性質来定义一个抽象向量空間. 抽象向量空間是一

个代数系，由 1) 一个交換羣 $\mathfrak{R}$ (它的合成記作 $+$)，2) 一个可除环 Δ 及 3) 对于所有二元組 (ρ, x) 定义的一个函数所組成，这里 $\rho \in \Delta, x \in \mathfrak{R}$ ，而这个函数的值 $\rho x \in \mathfrak{R}$ ，并且适合 S1—S4。仿照 n 元組的几何情形，我們把 $\mathfrak{R}$ 的元称为向量，而 Δ 的元叫做純量。在討論中，通常重点放在 $\mathfrak{R}$ 上，因此就用不很严格的說法，叫 $\mathfrak{R}$ 做“可除环 Δ 上向量空間”。(严格地說， $\mathfrak{R}$ 只是向量空間的羣的部分)。如果于其它假設外，F 也成立，我們說 $\mathfrak{R}$ 是有限維的，或 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上拥有有限基。

由 $\Delta^{(n)}$ ， Δ 及上面定义的乘法 ρx 所构成的代数系是有限維向量空間的一个例子。下面我們將要叙述环論里产生向量空間的一个情况。令 $\mathfrak{R}$ 是带恆等元素 1 的一个任意环，并且假設 $\mathfrak{R}$ 含有一个可除环 Δ ，这个环含有 1。当 $\rho \in \Delta$ 而 $x \in \mathfrak{R}$ 时，我們取环的积 ρx 为积 ρx ；于是，S1—S3 是乘法的分配律与結合律的結果，并且因为 Δ 的恆等元素就是 $\mathfrak{R}$ 的恆等元素，所以 S4 成立。于是，加法羣 $\mathfrak{R}$ ，可除环 Δ 及乘法 ρx 构成一个向量空間。这个空間可以是有限維的，也可以不是有限維的。例如，如果 $\mathfrak{R}$ 是复数域，而 Δ 是实数子域，則 $\mathfrak{R}$ 是有限維的；这因为任意复数可借“向量”1， $\sqrt{-1}$ 有一种方法而且只有一种方法写成 $\xi + \eta\sqrt{-1}$ 的形状。这种类型的另一个例子是 $\mathfrak{R} = \Delta[\lambda]$ ，它是系数在可除环 Δ 上含有超越元素(不定量) λ 的多項式环。我們将会知道，这个向量空間不是有限維的(参看习题 3 的第 1 題)。同样，我們可把多項式环 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ 看作一个 Δ 上向量空間，这里 λ_i 是代数无关元素(或无关不定量)。

向量空間的其它例子可由上面定义的各个空間的子空間得出。令 $\mathfrak{R}$ 是 Δ 上任意向量空間，并且令 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子集合，它是一个子羣，并且在 Δ 的元素的乘法下封閉，这就是說：如果 $y \in \mathfrak{S}$ ，并且 ρ 是 Δ 里任意元素，則 $\rho y \in \mathfrak{S}$ 。于是， $\mathfrak{S}$ ， Δ 及乘法 ρy 构成的代数系显然是一个向量空間；这因为 S1—S4 在 $\mathfrak{R}$ 里成立时，在子集合 $\mathfrak{S}$ 里显然也成立。我們把它叫做給定向量空間 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間，并且也不严格地把 $\mathfrak{S}$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間。例

如,令 $\mathfrak{R} = \Delta[\lambda]$, 并且令 $\mathfrak{S}$ 是次数 $< n$ 的多項式所成的子集合, 則易見 $\mathfrak{S}$ 是一个子空間. 因为次数 $< n$ 的任意多項式有一种方法而且只有一种方法用多項式 $1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}$ 的綫性組合表出, 所以 $\mathfrak{S}$ 是有限維的.

習 題 1

1. 証明: 二次齊次多項式 $\sum_{i < j} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ ($a_{ij} \in \Delta$) 的全体 $\mathfrak{S}$ 是 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2]$ 的一个有限維子空間.

2. 右向量空間 在本章开始时, 我們已指出 n 元組的代数系 $\Delta^{(n)}$ 也可以对于加法及用純量右乘的乘法来討論, 这就引导我們来定义右向量空間的概念. 右向量空間是由一个交換羣 $\mathfrak{R}'$, 一个可除环 Δ 及二元組 (ρ, x') 的一个函数构成, 这里 $\rho \in \Delta$, $x' \in \mathfrak{R}'$, 这个函数的值 $x'\rho \in \mathfrak{R}'$, 并且适合

$$S'1 \quad (x' + y')\alpha = x'\alpha + y'\alpha.$$

$$S'2 \quad x'(\alpha + \beta) = x'\alpha + x'\beta.$$

$$S'3 \quad x'(\alpha\beta) = (x'\alpha)\beta.$$

$$S'4 \quad \text{对于所有 } x' \in \mathfrak{R}', x'1 = x'.$$

根据这个定义得来的理論显然与左向量空間的理論是平行的. 但要知道, 如果可除环 Δ 不是交換环, 則 Δ 上右向量空間就不能看作一个 Δ 上左向量空間. 这因为, 如果用 $\alpha x'$ 代替 $x'\alpha$, 則由 $S'3$ 得

$$(\alpha\beta)x' = x'(\alpha\beta) = (x'\alpha)\beta = \beta(\alpha x').$$

因此要 $S3: (\beta\alpha)x' = \beta(\alpha x')$ 成立, 只能对于一切 x' 有

$$[(\alpha\beta) - (\beta\alpha)]x' = 0.$$

由这个結果及 $S4$ 可推出: $\alpha\beta = \beta\alpha$ 对于所有 α, β 成立.

另一方面, 令 Δ' 是与 Δ 反同构的一个可除环, 并且令 $\alpha \rightarrow \alpha'$ 是 Δ 到 Δ' 上的任意反同构. 如果 $\mathfrak{R}'$ 是 Δ 上一个右向量空間, 則 $\mathfrak{R}'$ 可看作 Δ' 上一个左向量空間. 这可由規定 $\alpha'x'$ 就是 $x'\alpha$ 而得出. 此时,

$$(\alpha'\beta')x' = (\beta\alpha)x' = x'(\beta\alpha) = (x'\beta)\alpha = (\beta'x')\alpha = \alpha'(\beta'x'),$$

故能适合 S3. 其它法则也可直接验证.

3. o-模 在着手系统的讨论有限维向量空间前, 我們要簡短地就扩充为模来讲一下, 这在此后是极有用的. 这种推广是在定义内用带恒等元素的任意环 $\mathfrak{o}$ 代替可除环 Δ . 所以, 我們定义一个(左) $\mathfrak{o}$ -模为一个代数系, 由一个交換羣 $\mathfrak{R}$, 一个带恒等元素的环 $\mathfrak{o}$ 及二元組 (ρ, x) 的一个函数构成, 这里 $\rho \in \mathfrak{o}, x \in \mathfrak{R}$, 而函数的值 $\rho x \in \mathfrak{R}$, 并且适合 S1—S4¹⁾. 由这个定义显見向量空間只是一个 Δ -模, 这里 Δ 是一个可除环.

在向量空間这一特殊情形外, 下面叙述 $\mathfrak{o}$ -模的一个重要例子: 令 $\mathfrak{R}$ 是(用加法合成的)任意交換羣, 并且令 $\mathfrak{o}$ 是整数环. 如果 $x \in \mathfrak{R}$, 而 $\alpha \in \mathfrak{o}$, 我們定义

$$\alpha x = \begin{cases} x + x + \cdots + x, & \text{这里 } \alpha > 0, \text{ 有 } \alpha \text{ 項;} \\ 0, & \text{这里 } \alpha = 0; \\ -(x + x + \cdots + x), & \text{这里 } -\alpha > 0, \text{ 有 } -\alpha \text{ 項.} \end{cases}$$

于是, S1—S4 是熟知的 $\mathfrak{R}$ 里倍数律.

我們也知道, 带恒等元素的任意环 $\mathfrak{o}$ 可看作一个 $\mathfrak{o}$ -模, 这时取 $\mathfrak{o}$ 的加法羣为羣的部分 $\mathfrak{R}$, 并定义 $\alpha x (\alpha \in \mathfrak{o}, x \in \mathfrak{R})$ 为环的积. 性质 S1—S4 是乘法的結合律、分配律及恒等元素律的直接結果.

如向量空間情形一样, 如果模 $\mathfrak{R}$ 的子集合 Θ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子羣, 关于以 $\mathfrak{o}$ 的随意元素所作的乘法是封閉的, 則 Θ 决定一个子模. 今令 $S = (x_a)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个随意子集合, 并令 $[S]$ 表示如

$$(2) \quad \xi_1 x_{a_1} + \xi_2 x_{a_2} + \cdots + \xi_m x_{a_m}$$

形式的和的全体, 这里 ξ_i 是 $\mathfrak{o}$ 里的随意元素, 而 x_{a_i} 是 S 里的随意元素, 我們断定 $[S]$ 是一个子模. 显然 $[S]$ 在加法下及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作乘法下是封閉的. 我們也易知(习题 2 的第 1 題): $0x = 0$ 及 $(-\xi)x = -\xi x$ 在任意模里成立, 且可推得 $[S]$ 含有 0 及 $[S]$ 里任意元素的負元素. 故 $[S]$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子模. 我們还知道, $[S]$

1) 这个定义与通常的定义稍有出入的地方是在于: 通常定义内 $\mathfrak{o}$ 不必带恒等元素, 而只假定适合 S1—S3. 由于本书只着重带有恒等元素的环, 所以这里作这样的改变. 右 $\mathfrak{o}$ -模显然可由以 S'1—S'4 代替 S1—S4 而得.

含有 S 的元素 $x_a = 1x_a$, 并且 $\mathfrak{R}$ 里含有 S 的每个子模都含有 $[S]$. 由于这些性质, 我们说: $[S]$ 是由集合 S 生成的子模.

如果 $[S] = \mathfrak{R}$, 则集合 S 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个生成元素集合. 如果对于某个有限集合 $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathfrak{R} = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, 则说 $\mathfrak{R}$ 是有限生成的模. 如果有一个生成元素集合 S 存在, 使每个 x 有一个而且只有一个方法写成形状 $\sum \xi_i e_i$, ($e_i \in S$), 则 $\mathfrak{R}$ 叫做一个自由模, 而集合 S 叫做一个基. 因此, 条件 F 说明: 一个有限维向量空间是带有有限基的一个自由 Δ -模.

对于任意的 n , 容易作出带有 n 个基元素的一个自由 $\mathfrak{o}$ -模; 它的作法与 $\Delta^{(n)}$ 的作法相同. 令 $\mathfrak{o}^{(n)}$ 表示 n 元组 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的全部, 这里 $\xi_i \in \mathfrak{o}$. 加法及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作的乘法都与前面的定义相同. 如果 e_i 用 (1) 来定义, 则也象 $\Delta^{(n)}$ 的情形, 可以看到这些元素是 $\mathfrak{o}^{(n)}$ 的一个基.

今就 $\mathfrak{o}$ -模叙述等价的基本概念. 令 $\mathfrak{R}$ 及 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是对于同一个环 $\mathfrak{o}$ 定义的两个 $\mathfrak{o}$ -模. 如果有 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的一个 1-1 对应 $x \mapsto \bar{x}$ 存在, 使

$$(3) \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{\alpha x} = \alpha \bar{x},$$

则说 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是 $\mathfrak{o}$ -同构的, 或仅说等价的. 因此, $x \mapsto \bar{x}$ 是羣 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 间一个同构, 对于所有 α 与 x 适合 $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$. 这样一个映照叫做一个 $\mathfrak{o}$ -同构或等价.

如果 $x_i = \sum \alpha_{ij} e_j$, 则由 (3) 得

$$\bar{x}_i = \overline{\sum \alpha_{ij} e_j} = \sum \alpha_{ij} \bar{e}_j = \sum \alpha_{ij} \bar{e}_i.$$

所以, 如果元素 e_i 是 $\mathfrak{R}$ 的生成元素, 则对应元素 $\bar{e}_i$ 是 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的生成元素. 如果 $\sum \alpha_{ij} \bar{e}_i = \sum \beta_{ij} \bar{e}_i$, 则 $\sum \alpha_{ij} e_i = \sum \beta_{ij} e_i$. 由此可见, 如果 $\mathfrak{R}$ 是带有基 e_i 的一个自由模, 则 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是带有基 $\bar{e}_i$ 的自由模. 这些论述解释了等价模有相同性质的一般原理, 故在讨论中毋须加以区别.

今设 $\mathfrak{R}$ 及 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是两个自由 $\mathfrak{o}$ -模, 并设这两个模的基元素都有 n 个. 令 $\mathfrak{R}$ 的基是 $e_1, e_2, \dots, e_n$, 而 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的基是 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. 如果 x 是 $\mathfrak{R}$ 的任意元素, 写出 $x = \sum \xi_i e_i$, 并把它与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的元素 $\bar{x} =$