通过问题学解题

〔美〕L.C.拉松　著

陶懋颀　单墫
苏　淳　严镇军　译

常庚哲　校

安徽教育出版社

责任编辑　杨晓原

通过问题学解题
安徽教育出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行　六安新华印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：12.875　字数：200,000
1986年6月第1版　1986年9月第1次印刷
印数：20,000
统一书号：7276·505　定价：1.95元

目　　录

第一章　探索法

在这一章里，我们将讨论求解数学问题的探索法．曾经思考过探索法的人们，总结了一些有用的方法．在这些方法中，我们应集中注意以下几个：

(1)寻找一种模式；(2)画一个图形；(3)提出一个等价的问题；(4)改变问题；(5)选择有效记号；(6)利用对称性；(7)区分种种情况；(8)反推；(9)反证法；(10)利用奇偶性；(11)考虑极端情况；(12)推广．

我们对上述这些解题方法的兴趣不在于如何描述它们，而是如何应用它们，认真琢磨别人怎样运用这些简单而有效的方法的实例，有助于我们改进自己的解题技巧．

首先，我们对每节末尾的问题进一言：不要把本节所谈的探索法当作解题的唯一方法．虽然选择这些问题是为了给应用这方法以实践机会，但是注意力过分狭窄，可能是有害的．一个问题，通常可有几种解法，并且常有一些明显不同的探索法．所以不要以“先入为主”之见处理每个问题，更不要带有某个问题只能用某一种特殊的探索法来求解的框框．提出一个问题时，关键是把它解出来．正是用一切方法去解题而积累了经验，才使人们得到可能解题成功的高度洞察力．

1.1寻找一种模式

实际上，所有解题的人，总是通过自己相信问题结果的合理性，得到关于问题的一种感性认识。这样有助于对俯拾可得的特例进行验证；从而启发进一步求解这个问题的思路。

1.1.1. 证明n个（不同的）元素组成的集合，恰有2^n个（不同的）子集合 .

当问题是用命令形式写出来的时候，一个初学者可能会束手无策，不知道如何下手。假如问题是写成一种带疑问的语句，例如

(i) 由n件不同物体组成的一个集合，能造成多少个子集合？

(ii) 证明或否定：一个n元集合有2^n个子集合 .

在这两种形式的陈述中，都有这样的暗示：建议从检验少量特殊情况着手。这正是如何求解每个问题的办法：对结论持有怀疑直到信服为止 .

解法一 我们先检验当集合含有0、1、2三个元素时会发生什么情况。检验的结果如下表所示：

n	S的元素	S的子集	S的子集数
0	无	$\varnothing$	1
1	x_1	$\varnothing$, $\{x_1\}$	2
2	x_1, x_2,	$\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},\{x_1,x_2\}$,	4
3	x_1,x_2,x_3	$\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},\{x_1,x_2\}$, $\{x_3\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_2,x_3\}$	8

我们造这个表的目的，不仅是验证结论，而且是建立如何处理一般情况的可能图景。因此，我们意在尽可能地系统化。在本题中，注意到当$n=3$时，我们先列出了$\{x_1, x_2\}$的子集，接着在第二行里给前一行中每个子集添加一个元素x_3。这就是使我们能处理更大的n值的关键想法。例如，当$n=4$时，$S=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$的子集是$\{x_1, x_2, x_3\}$的8个子集（已在表中列出），加上给这8个子集中的每一个添入x_4而得的子集。于是4元集合有$2^4(=16)$个子集。基于这种想法的证明，是数学归纳法的一个简单应用（见2.1节）。

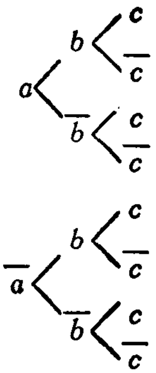
解法二 上述解答方法的另一途径可作如下讨论：对于每个n，以A_n表示具有n个（不同的）元素的一个集合的（不同的）子集数。设S为一个$n+1$元集合，并记其中元素为x。那么在S的不含x的子集与含x的子集之间，存在一一对应。（即，一个不含x的子集T与$T\cup\{x\}$相对应）。前一类型的子集即是$S-\{x\}$的一切子集。$S-\{x\}$是个n元集，因此必定有

$$A_{n+1}=2A_n.$$

这个递归关系对于$n=0, 1, 2, 3, \cdots$都是成立的。与$A_0=1$这件事联合起来，即有$A_n=2^n$（$A_n=2A_{n-1}=2^2A_{n-2}=\cdots=2^nA_0=2^n$）。

解法三 子集的另一种系统的计数法，可从构思一棵“树”得出。

对于$n=3$而$S=\{a, b, c\}$的情形，树可画出如下：



子集

$\{a, b, c\}$

$\{a, b\}$

$\{a, c\}$

$\{a\}$

$\{b, c\}$

$\{b\}$

$\{c\}$

$\varnothing$

树的每一枝，对应着S的一个不同的子集.（元素名称上方打“—”小杠，表示它不含于这一枝所对应的集合）.这棵树是分三步构成的,（对应着S的三个元素）.

S的每个元素有两个可能：它或者属于该子集或者不然.这种不同的归属法就用两条枝来代表.每考虑一个元素时，枝的数目即加倍.于是，对于一个三元素集合，枝的数目就是$2\times2\times2=8$.对于n元素，枝的数目是

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n}=2^n.$$

这就是说，n元集有2^n个子集.

解法四 如果我们按照子集所含元素的个数来数子集的数目，例如，当$S=\{a, b, c, d\}$时，其子集是

元素个数		子集个数
0	$\varnothing$	1
1	$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$	4
2	$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{a,d\}$,$\{b,c\}$,$\{b,d\}$,$\{c,d\}$	6

3	$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\{b,c,d\}$	4
4	$\{a,b,c,d\}$	1

这个例子立即可以提示下列解法。设S为一个n元集合，则

$$S\text{ 的子集数}=\sum_{k=0}^{n}(S\text{的具有}k\text{个元素的子集数})$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

上列等式链中的最后一个等号，可由二项式定理得出．在

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

中，令$x=1$和$y=1$即可．

解法五 另一种系统考虑的出发点由表1.1说明．这个表列出了$S=\{x_1,x_2,x_3\}$的子集．为了解这里的方法，注意最左边一列与第二列．

表1.1

子集	三数组	二进位数	十进位数
$\varnothing$	(0,0,0)	0	0
$\{x_3\}$	(0,0,1)	1	1
$\{x_2\}$	(0,1,0)	10	2
$\{x_2,x_3\}$	(0,1,1)	11	3
$\{x_1\}$	(1,0,0)	100	4
$\{x_1,x_3\}$	(1,0,1)	101	5
$\{x_1,x_2\}$	(1,1,0)	110	6
$\{x_1,x_2,x\}$	(1,1,1)	111	7

即三数组列中1的出现的位置间的对应关系．具体说来，如果A是$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的一个子集，对于$i=1,2,\cdots,n$，定义a_i如下：

$$a_i=\begin{cases}1 & 若 x_i\in A,\\ 0 & 若 x_i\notin A.\end{cases}$$

很清楚，现在我们可以把S的子集A与$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$（即一个由0和1组成的n数组）当作同一个东西.反之,每个如此的n数组也对应着S的一个唯一的子集。于是S的子集数等于0和1组成的n数组的数目.后一集合显然与小于2^n的非负二进位数集之间有一一对应.因此，每个小于2^n的非负整数恰好对应着S的一个子集,反之也对，所以S必定有2^n个子集.

在通常情形下，我们对每个例题只给出一种解法——用以解释所考虑探索法的解法。在这第一个例子中，我们只是想再解释一下前面讲过的主张，即一个问题通常可以用各种不同的方法求解。需要记取的教训是，在探索问题的最初阶段，必须保持灵活性。如果一种办法看来不能奏效，不要失望，而要寻求新办法。不要墨守着某种单一的办法而坐等有一个机缘来到使你能顿开茅塞.

1.1.2. 设$S_{n,0}$,$S_{n,1}$和$S_{n,2}$表示*Pascal*三角形中第n行里分别从左边的第一、第二、第三个元素起始，同其后与它们每隔二个元素的元素的和，试对于$S_{100,1}$的值作一个猜测.

解 我们从检验低阶情形开始,以便找到可以推广的方法。在表1.2每行中下面未划线的各项之和，即为$S_{n,0}$，下面划了一条线与二条线的各项之和即分别为$S_{n,1}$和$S_{n,2}$,表中右边三列表明，在每个情形下，和数中有两个是相等的，而第三个和数则或者大1(上标“+”)或者小1(上标“-”)。同时还可看出，不等的项的标记在这个序列中按6为周期变化着。于是，由前n行所形成的图形我们自然期望着对于$n=8$，不等的项出现在中间一列并且比其余二项大1.

我们知道 $S_{n,0}+S_{n,1}+S_{n,2}=2^{n}$ （见1.1.1）.由于$100=6\times16+4$，我们期望着不等的项在第三列（$S_{100,2}$），并且比其余二项多1．于是$S_{100,0}=S_{100,1}=S_{100,2}-1$，而$S_{100,1}+S_{100,1}+S_{100,1}+1=2^{100}$．由这几个等式，我们猜想

$$S_{100,1}=\frac{2^{100}-1}{3}$$

这个猜测的证明，是数学归纳法的一次直接的应用（见第2章）．

表 1.2

Pascal三角形	n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$
1	0	1^{+}	0	0
1 $\underline{1}$	1	1	1	0^{-}
1 $\underline{2}$ $\underline{\underline{1}}$	2	1	2^{+}	1
1 $\underline{3}$ $\underline{\underline{3}}$ 1	3	2^{-}	3	3
1 $\underline{4}$ $\underline{\underline{6}}$ 4 $\underline{1}$	4	5	5	6^{+}
1 $\underline{5}$ $\underline{\underline{10}}$ 10 $\underline{5}$ $\underline{\underline{1}}$	5	11	10^{-}	11
1 $\underline{6}$ $\underline{\underline{15}}$ 20 $\underline{15}$ $\underline{\underline{6}}$ 1	6	22^{+}	21	21
1 $\underline{7}$ $\underline{\underline{21}}$ 35 $\underline{35}$ $\underline{\underline{21}}$ 7 $\underline{1}$	7	43	43	42^{-}

1.1.3. 设$x_1,x_2,x_3\cdots$是非0实数组成的数列，满足下列关系

$$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}\qquad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

建立x_1与x_2应满足的充分与必要条件，使得x_n对于无穷多个

n的值是整数．

解 为了对这个序列有所认识，我们要算出前几项，并把这为数不多的几项用x_1和x_2表示出来。我们得到（略去代数运算过程）：

$$x_3=\frac{x_1x_2}{2x_1-x_2},$$

$$x_4=\frac{x_1x_2}{3x_1-2x_2},$$

$$x_5=\frac{x_1x_2}{4x_1-3x_2}.$$

就本题而言我们很幸运，因为计算是能进行的，并且出现了一种方法、用归纳法容易证得

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2},$$

在其中归并含n的项，得

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(x_1-x_2)n+(2x_2-x_1)}.$$

由这个形式可见，如果$x_1\neq x_2$，分母的大小到后来必定超过分子，因此x_n就不会是整数。可是如果$x_1=x_2$，序列的一切项都相等，因此，x_n对于无穷多个n的值等于整数的充分与必要条件是$x_1=x_2=$整数．

1.1.4. 找出如此的正整数n和a_1，a_2，…，a_n，使得$a_1+\cdots+a_n=1000$，而乘积$a_1a_2\cdots a_n$尽可能地大．

解 当问题中含有一个使得对问题的分析变复杂的参数时，通常有益的办法是在思考阶段中暂时把它换成一个容易控制的量。在这个问题中我们可以先检验一系列用2、3、4、5、6、7、8、9…替代1000而得到的特殊情形。用

这个方法可使我们发现，在取值最大的乘积中

（ i ） 没有a_i可以比 4 大；

（ ii ） 没有a_i会等于 1 ；

（ iii ） 所有的a_i可取的值是 2 或 3 （因为 $4=2\times 2$ 同时 $4=2+2$ ）．

（ iv ） 至多有两个a_i等于 2（因为 $2\times 2\times 2<3\times 3$ 而 $2+2+2=3+3$ ）．

所有这些都是易于证明的．因此，当参数等于我们手头这个问题中的1000时，最大的乘积必定是 $3^{332}\times 2^2$ ．

1.1.5． 设S是一个集合而$*$是S上的一个二元运算，它满足下列两条法则

对于在S中的一切x，$x*x=x$，

对于S中的一切x、y、z，$(x*y)*z=(y*z)*x$。

证明，对于S中的一切x、y，有$x*y=y*x$ ．

证 下面写出的简洁解法，实际上是经过相当一段拼凑而得到的结果；得出解答的过程只能描写为一次探索的过程．（主要的方法是在第二个条件中因子所具有的循环性质）．我们有，对于S中的一切x，y，$x*y=(x*y)*(x*y)$ $=[y*(x*y)]*x=[(x*y)*x]*y=[(y*x)*x]*y=[(x*x)*y]*y=[(y*y)]*(x*x)=y*x$。

问题

用寻求规律的办法对下列问题进行分析，提出适当的猜测，并且想想如何能证明它们 ．

1.1.6． 从 2 与 7 开始，数列 2 、 7 、 1 、 4 、 7 、 4 、 2 、 8 ，…的造法是，把这个数列相邻的前二项相乘，如得到一个一位数，此数即作为第三项；如得到二位数，则此二

位数的二个位上的数依次作第三、第四项，以此类推。证明数字 6 在上述序列中出现无穷多次 .

1.1.7. 以S_1表示正整数序列 1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6 …而从S_n定义序列S_{n+1}的办法是，给在S_n中可被n整除的项加1，其余不变。例如，S_2是 2 、 3 、 4 、 5 、 6 、 7 ，…，S_3是 3 ， 3 ， 5 ， 5 ， 7 ， 7 ，…等。试定出所有能使在S_n中的前$n-1$项都是n的整数n来 .

1.1.8. 证明一个有限集的全体子集，可以下列方式列成一个表：

(i)居表中第一位的是空集

(ii)每个子集恰好在表中出现一次，并且

(iii)获得表中以后每个子集的方法，或者是给前一个子集添加一个元素或者是从前一个子集中删去一个元素 .

1.1.9. 定出在$(x+y)^{1000}$的展开式中奇二项系数的个数（见 4 . 3 . 5 ） .

1.1.10. 一个著名的定理断言：素数$p>2$可以写成两个整数完全平方之和（即$p=m^2+n^2$，其中m与n是整数）的充分必要条件是p等于 4 的一个倍数再加 1 ，试对于什么样的素数$p>2$可以写成下列形式提出一个猜测。在下列式子中x与y是整数（不必是正整数）：

(a) x^2+16y^2，(b) $4x^2+4xy+5y^2$（见1.5.10）

1.1.11. 如果(a_n)是有如下性质的数列：对于$n\geqslant 1$，$(2-a_n)a_{n+1}=1$，问：当n趋向于无穷时，a_n将如何？（见 7 . 6 . 4 ）

1.1.12. 设S是一个集合，且设$*$是S上满足下列法则的一个二元运算

对于S中的一切x、y，　$x*(x*y)=y$，

对于S中的一切x、y，　$(y*x)*x=y$，

证明，对于S中的一切x、y有$x*y=y*x$．

补充例题

大多数用归纳法的问题都以发现一种图景为基础．所以，在§2.1、§2.2、§2.3、§2.4节中的问题便提供了本节探索法的补充实践机会．另外也可见于1.7.2、1.7.7、1.7.8、2.5.6、3.1.1、3.4.6、4.3.1、4.4.1、4.4.3、4.4.15、4.4.16、4.4.17．

1.2　画一个图形

凡可能时，用一个图形、一个图解给问题以几何直观描绘对于解题是大有益处的。图形表示常常使得易于理解有关的数据并且形象地引起对相互关系与依赖性的注意．

1.2.1． 一条长度一定的弦沿着半个圆周滑动．此弦的中点及弦两端在底边上的射影形成一个三角形的三个顶点．证明，这个三角形是等腰三角形并且其形状决不会改变．

证　以AB表示半圆的底边，以XY表示那条弦，M是弦的中点，C与D分别是X与Y在AB上的射影（图1.1）．以N表示M在AB上的射影，那么N是CD的中点，由此即知$\triangle CMD$是等腰的．

为了证明三角形的形状与弦的位置无关，只须证明$\angle MCD$保持不变，或者证明对于XY的一切位置$\angle XCM$是常数，为了证明这一点，延长XC交整圆于Z（图1.2）．于是CM平行于ZY（因为C与M分别是XZ与XY的中点）．因此$\angle XCM=\angle XZY$．但$\angle XZY$等于弧XY的一半，而这

个弧度只依赖于弦XY的长度．命题得证．

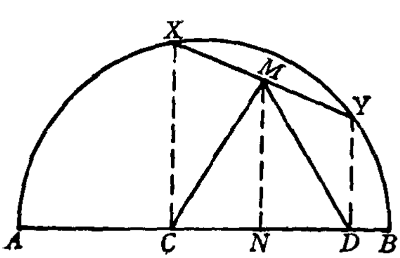


图 1．1

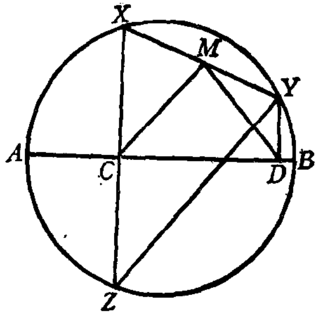


图 1．2

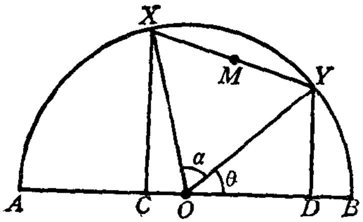


图 1．3

有人可能会问：怎么会想到把XC这么延长一下呢？正是这一步使得证明变得很优美，并且，这的确是全部推导中关键的一步，这表明利用辅助线和弧（通常是用反射、延长或旋转而找到的）是几何中常常使用的手段．正是对于这个事实的认识，增加了人们求解巳给问题的可能的途径．

这个问题的另一个巧妙的解法，是给点引入坐标并使用解析方法．为了证明三角形的形状与弦的位置无关，只须证明高与底之比$\frac{MN}{CD}$是一个常数．

以O表示AB的中点，并设$\theta=\angle YOB$．显然，整个状况完全决定于θ（图1.3）．