工 程 机 械 优 化 设 计

陈育仪　编著

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 7 年 · 北京

内 容 简 介

本书从工程机械设计应用角度出发，说明了优化设计的条件、优越性及发展方向；阐述了工程机械优化设计中所涉及的机构运动学、计算工况载荷、目标函数以及约束条件等有关概念；对有限元和随机振动在工程机械优化设计中的应用也做了简明的介绍。书中具体说明了轮式起重机、液压挖掘机、装载机及其他工程机械优化设计的方法。

本书对于建筑、铁道、煤矿、冶金、水电等部门从事工程机械设计的人员实用价值较大，可供高等院校机械设计专业的教师和学生参考。

工 程 机 械 优 化 设 计

陈育仪　编著

中国铁道出版社出版

责任编辑　刘启山

封面设计　翟　达

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

河北省永清县印刷厂印

开本：787×1092毫米 1/16　印张：19.875字数：501 千

1 9 8 7 年7月　第1版　第1次印刷

印数：0001—5,500册　定价：3.65 元

前　言

工程机械广泛用于房屋建筑、筑路工程、水利建设、国防施工和工矿运输等事业，它对减轻繁重的体力劳动，保证工程质量，加快建设速度，提高劳动生产率都起着巨大的作用。

传统的工程机械设计方法是在经验设计的基础上进行简化计算的。至于工程机械的优化设计，那是七十年代才发展起来的一种新的设计方法。它是从机构运动学开始，逐步地发展到工程机械的零部件设计上来的。经验证明：优化设计无论是在提高产品质量和性能上，还是在降低产品的成本上都比经验设计优越。随着计算机的计算技术发展，这种优越性会更加得到充分的显示。因此它在工程机械设计中的应用日渐增多，也越来越受到从事这方面设计的人员欢迎。

书本是为从事工程机械设计人员编写的。在编写过程中力求理论简单明了，紧密联系实际，避免繁锁的理论推导，便于工程设计人员的阅读和运用。全书内容着重于工程机械优化设计方法的运用，对于工程机械的结构仅仅简略地加以叙述。在这些内容中，系统地叙述了工程机械的机构运动学、计算工况载荷、目标函数以及约束条件等有关概念。上述内容集中在本书的后三章内。

本书编写时还力求应用最新的设计方法。如对有限元和随机振动在工程机械优化设计中的应用，作了简明的介绍，这是为扩大工程机械设计领域，为工程设计人员掌握最新的设计方法而编写的。

由于编写时间的仓促，加之水平有限，书中难免有错误之处，敬请使用本书的广大工程设计人员以及其他读者批评指正。

编　者

1985年3月

目　录

第1章 绪　论

无论在工程机械中，还是在其他机械中，随着时间的推移，优化设计的方法越来越多地得到广泛运用。这个方法是伴随电子计算机发展起来的一门新兴学科，是建立在近代数学最优化方法和计算机程序设计之上的，成为解决复杂设计问题的一种有效工具，并且是计算机辅助设计（CAD）应用中的一个重要方面。它用在机械设计中，常常能根据产品的要求，合理地确定和计算各项参数，以期达到最佳设计目标。例如：重量、成本、性能和承载能力等。这一切在生产实践中都得到了证明。可见，优化设计已成为现代机械设计理论和方法中的一个重要内容，并且愈来愈受到从事机械设计的工程技术人员的重视。

原来工程机械设计都是采用传统的设计方法：凭经验或者是近似的设计。这种设计方法既费工费时，而且设计出来的产品又笨重，机械性能低，成本也高。造成这种结果的原因是：传统的设计是在有限的几个方案中，比较和选择其中一个较好的方案进行设计的。这就使设计工作带来了局限性，同时选择的方案也没有十分精确的评价标准来衡量其优劣。总之设计工作是在摸索中前进。这样的设计，往往使一个产品需要经过几轮的设计，不断从中改进，最后才能达到一定的水平，结果设计周期拉的很长。随着对产品设计质量要求的提高和设计周期要求的缩短，这种设计方法已越来越显得适应不了发展需要。因此，近廿年来，由于计算机的应用，使设计领域中产生了一场深刻的革新，如用理论设计代替经验设计，用精确设计代替近似设计，用优化设计代替一般设计，用动态分析代替静态分析等等，所有这一切，都需要使用高速、高精度、大贮存量的计算机来完成。正是在这种情况下，工程机械中运用优化方法设计的实例也日趋增多。现在，不论是零部件的设计，还是整机的设计，应用优化方法已不再是个别的现象，而是屡见不鲜。本书就是在这个基础上，进一步把它们加以综合、提高，使它们更好地为工程机械设计服务。

设计过程的计算机化，自然就要为设计过程能自动择取最优方案建立一种迅速和有效的方法。工程机械优化设计就是在这种迫切要求下产生和发展起来的一种自动择优的方法。这种方法，通过大量的计算和比较择优选取，无疑对传统设计或计算机辅助设计都能起重要的作用，并且成为今后设计工作中的核心部分。

工程机械优化设计是指机构运动学与动力学的优化、机械零部件的优化、齿轮传动承载能力与体积的优化以及总体结构布置参数的优化等方面的内容。在这些领域中，目前发展较快的是机构动力学的优化设计。如：轮式起重机三铰点的变幅机构，液压挖掘机的反铲装置和装载机的工作装置等都应用了机构动力学的优化设计，这与原来的拼凑法相比较，充分显示它省工省时省料和质量好的优越性。

由于工程机械的优化设计涉及面很广，在工程机械中就牵连到机械动力学特性问题，这是近十几年来新开拓的领域。随着生产发展的实践证明：作为工程机械设计基础的静态设计，无论是对工程起重机，还是挖掘机或装载机都愈来愈满足不了要求，而新兴起来的动态设计，在动态测试十分迅速发展的情况下，也逐渐得到发展，成为一个很有希望的设计方法。所谓动态设计或动态性能优化设计，意思就是在工程机械设计过程中，寻求一个经济合

理的结构，使它的动态性能满足预定的要求。

由此而知，动态设计是建筑在动态测试基础上的。60年代中期出现的各种动态测试仪器，特别是出现的快速富里哀分析（FFT），结合时序分析、相关分析、功率分析等，更加完善了各种动态系统。因此，用动态测试所得到的数据，为动态设计提供了可靠的依据。

目前国内外对工程机械中的瞬时、随机振动的研究还只是刚刚起步，各种资料积累的也很少，还不能形成一门独立的动态设计学科。因此本书只对动态测试及数据处理如何运用到工程机械的优化设计中去，进行了初步的叙述。尽管如此，这对于静态设计也是一个很大的补充。

工程机械的振动问题，大致分为两个内容：

1．建立工程机械的动力学分析模型

由于工程机械的结构复杂，按照设计图纸直接建立整机的动力学模型是很困难的。为了简化计算，目前普遍应用子结构分析法。以液压挖掘机为例，它可分为正（反）铲装置、回转机构、底架和行走机构等子结构。这样，每个子结构和整体结构相比较要简单的多，这就有可能分别建立每一个子结构的动力学模型，导出其动力特性的数学表达式。最后根据各子结构的相互结合条件，将所有的子结构综合起来，得到整机的动力学模型。

2．动力特性的分析计算

工程机械的动力特性分析计算是指：求解自由振动方程而获得工程机械结构的固有频率特性，由随机振动所引起的上述各子结构动力响应，以及随机疲劳问题，……，等等。这些动力特性的分析计算，在工程机械优化设计中，是作为约束条件的数学模型而被运用的。

正如上面所提到的，目前机械优化设计，还只是对零部件优化的多，对整机优化的少，所获得的结果也不是完美无缺的，还有局限性。随着生产技术的发展，人们经过不断地探索，一定会找出更简便的优化方法，用于整机的优化。如果在一个工程机械产品的设计中，能将各个部件都进行优化设计的话，那末整机的重量、性能及成本等参数，也都会比不经过优化的产品好。因此，零部件的优化是走向整机优化的第一步。

从这一情况出发，本书在第二章内，叙述了工程机械中常用的有约束优化问题的直接解法：随机方向搜索法、复合形法、伸缩保差法和内外、混合惩罚函数法。为了说明有约束优化问题的间接解法，还叙述了部分无约束优化问题，并以工程机械中的某些具体计算问题为例，进一步说明了优化设计的各种解法。同时对随机振动的基本知识作了一般的概述。本章的目的是为建立工程机械的优化设计的数学模型，选择优化方法，提供一些必要的理论知识，对于全书内容起着指导性的作用。

第三章是轮式工程起重机的各个主要部件的优化设计。本章既包含有零部件设计、机构学设计，又有齿轮传动设计和总体方案布置的设计，内容是多方面的。通过这些具体结构的优化设计，阐述了如何建立轮式起重机各个零部件优化计算的数学模型：目标函数及其约束函数，如何处理多目标函数以及选择不同的优化方法。在建立零部件的约束函数中，既有结构力学的简化方法，也有有限元法。前者的固有频率是用瑞利法、李兹法和传递矩阵法求得；后者的固有频率是通过刚度矩阵、质量矩阵来求解结构的振动方程——求行列式的特征值。对于起重机的回转平台在起重机行驶过程中的附加冲击载荷的估算，是通过动态测试，将所测得的数据进行处理得到的。这就更加符合实际工况，比静态设计向前推进了一步。

第四章是叙述液压挖掘机的主要部件的优化设计方法。这里的内容大致和第三章相同。和起重机结构件不同的是：挖掘机的零部件是在随机载荷下工作的，疲劳破坏是设计挖掘机

零部件主要考虑的问题之一，因此本章阐述了如何对挖掘机的正（反）装置的结构件，回转平台和底架进行测试，然后运用统计理论计算随机载荷。同时这一章还详细地叙述了正（反）装置的优化设计，这是上一章所没有的。

第五章的内容不仅包括了装载机的主要零部件优化设计，而且还增添了其他工程机械上的典型零部件的优化设计，这是根据相似原理，把更多的工程机械上的优化设计课题，介绍给读者，使刚刚兴起的优化设计这门科学，在设计中得到广泛的运用。

总括全书，前两章的内容是说明了各章节的安排，为学习优化设计提供了必要的理论；后三章是按工程机械产品的分类，叙述了优化设计在工程机械中的运用方法，使理论和实践紧密地结合起来。本书在工程机械优化设计这个总题目下，把近年来发展起来的新的应用科学引进来，是企图为扩大工程机械设计的领域，作一点尝试。

纵观全书的后三章内容，在编排上是为了达到：1. 由局部到整体形成一套完整的设计程序。例如，在轮式起重机优化设计一章中，由选取变幅机构的三铰点位置开始，到确定整机结构参数止；在液压挖掘机优化设计一章中，由选取工作装置的参数开始，到确定整机结构参数止，都贯串着由已知到未知，由简单到复杂的原则，使读者对于每个工程机械的设计过程有个全面的了解。2. 力求避免重复。尽管工程机械有着分门别类的差异，但是它们之间的共同点还是很多的。例如，轮式起重机的底架和轮式挖掘机的底架，起重机的回转机构和挖掘机的回转机构，挖掘机的转向机构和装载机的转向机构，以及上述工程机械的驱动桥，等等，它们无论是在结构型式上，还是在承受载荷上都基本相同。对于这些部件，本书仅选择其中一个部件加以叙述，其他相同的部件都省去，避免重述。因此读者在阅读时可以举一反三，灵活运用所学的知识，这样就会扩大优化设计的应用范围。

这就是本书的总貌。

第2章 工程机械的优化设计和随机振动的基本知识

2.1 工程机械优化设计的概述

随着生产技术的不断发展，对工程机械的要求愈来愈高，人们总希望能获得价廉物美的产品。优化方法就是借助于电子计算机来达到这个目的。优化计算是应用数学的一个重要分支，广泛地用于各个技术领域内。在工程机械的优化设计中，主要是选择并决定设计对象的各项参数。例如，设计一台轮式起重机，必须合理地选择各种机构的运行速度，金属结构件的几何尺寸，以及其他一些必要的参数，使其具有较好的性能与较低的制造成本。在选取各项基本参数时，往往各参数与性能之间发生矛盾：有时为了保证某个零件的必要强度和稳定性，希望它的截面积不能小于某一个极限值。但从降低制造成本的观点来看，又希望截面积的几何尺寸小些，以便节约材料，于是和强度及稳定性要求发生矛盾。优化方法的任务就是在分析的基础上综合各方面的因素，求出一个合理的方案，以期达到最佳或较好的效果。

为了以后各章节的应用，首先介绍一些在工程机械设计中经常遇到的优化方面的内容。

2.1.1 设计变量

在设计过程中，最终必须选择各项独立的参数（变量），称之的设计变量。如果一些设计变量一旦确定后，则设计的对象也就完全被确定了。设计中用哪些变量来表示一个设计对象呢？那得依据各种设计问题的性质而定。在工程机械设计中，常用的变量有几何外形尺寸（例如，长、宽、高或厚等）、构件的长短尺寸、构件的重量、惯性矩、频率，力和力矩等；有时还要用一些代表工作能力的导出量，如应力、挠度、冲击系数等等。总之，设计变量是一些决定设计对象好坏的变量。

若有几个设计变量x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$，可以按照一定的次序排成数组，用向量的形式表示，即：

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=[x_1\ \ x_2\cdots\cdots x_n]^T \qquad (2-1)$$

这就是说，x_i是n维向量X的第i个分量。

对于式（2—1）所表示的重要概念是设计空间，即以n个设计变量为坐标轴组成的空间，称X为n维欧氏空间R^n。那末x_i是R^n中的一个点，并用符号$X\in R^n$表示。

在设计中，选择设计变量的多少往往取决于要求达到设计的精确度和计算机容量的大小。若设计要求精度高，计算机容量又大，那末可多取设计变量，反之少取。在一般情况下，应该尽量减少设计变量的个数，将那些影响设计指标不很活跃的变量略去，选定那些对

设计指标影响很大的参数当作变量，也就是根据过去设计经验或者考虑工艺、结构布置等方面的因素，将那些对设计指标影响较大的基本参数作为设计变量预先确定下来。在工程机械中，多数问题均可以把设计变量看作是连续化的量，并且规定上下限b_i和a_i，即

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots n) \qquad (2-2)$$

工程上的参数有时也不是连续的，而是离散的，例如齿轮的模数、钢板的厚度、型钢的型号等等均是离散变量。关于离散变量的优化设计问题，有几种不同的解决方法：采用整数规划法，或者先按连续变量处理，在取得优化方案之后，再按工艺规范或按坐标系列取整；还有的用设计变量分析法。尽管方法不一，但多数是先以连续变量处理，后拼凑整数。所谓凑整：把实际问题中的设计变量，无论是整型量，离散型量，还是连续量，构成的混合型量都视为连续量，在取得最优解后，再把求得的设计变量舍入到与它最接近的整数值或离散值。工程中的圆整化就是如此。

2.1.2 目标函数

当设计变量值最终被确定后，则设计对象的最基本性能及其经济指标也随之确定。例如设计一台起重机的金属结构件，若其材料、外形几何尺寸及截面形状定出以后，其承载能力及自重也就确定了。把设计时要达到的预期目标，列成函数式，是评价设计方案好坏的依据，这个函数称之为目标函数或评价函数，它是设计变量的函数，其数学表达式为

$$f(X)=f(x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n) \qquad (2-3)$$

在工程实际问题中，优化目标函数有两种表达形式：目标函数的极小化和目标函数的极大化，即

$$f(X)\rightarrow \min \quad \text{或} \quad f(X)\rightarrow \max$$

由于目标函数$f(X)$的极大化和目标函数$f(X)$的极小化是一回事，因此为了算法和程序上的统一起见，在以后的章节中讲最优化就是指极小化。

确立目标函数是整个优化设计中比较重要的问题。在工程机械设计中，目标函数主要是由设计准则来建立的。这种准则可以是运动学和动力学的性质，如运动的误差、主动力和约束反力的最大值、振动的特性等等；在零部件设计中，可以用重量、体积、效率、可靠性、承载能力来表示；对于产品设计，也可将成本价格、寿命等作为所追求的目标。由于目标函数仅作为评选方案的一种标准，所以也可以用一个反映某项设计指标的系数来表示。例如，为了使齿轮传动装置达到最大的承载能力，可以引入一个承载能力系数，当它达到最大值时，也就等价于承载能力最高。由此看来，目标函数不一定有明显的物理意义和量纲。

2.1.3 约束和可行域

目标函数与设计变量之间的关系在几何上可以用曲面或超曲面来表示。也就是说，给定$f(X)$值，则有无限多的$x_1, x_2\cdots\cdots x_n$数值与之对应，在设计空间构成了一个点集。例如，当$n=2$的目标函数$f(x_1,x_2)$，构成了三维空间（以x_1, x_2和$f(X)$为坐标轴）中的一个曲面（图2—1）。显然，在二维设计平面x_1Ox_2中，每个点$(x_1,\ x_2)$都有一相应的目标函数值$f(x_1,\ x_2)$，在图中表示为沿$f(x_1,\ x_2)$轴方向的高度。若有n个设计变量时，则目标函数为$n+1$维空间中的超曲面。具有相等的目标函数值的设计点所构成的曲线称为等值线，如图（2—2）所示。在等值线a上所有的设计点，其目标函数值均为15，在等值线b上的各点目标函数值均为20，等等。

由图2—2可以清楚地看到，等值线反映了目标函数值的变化规律：愈往内层的椭圆代表的函数愈小，其中心点是函数的极值，很形象地说明所讨论问题的几何概念。另外，在许

多优化问题中，在最优点周围，往往是一族近似的共心椭圆族，每一个椭圆就是一条等值线，它们的共同中心点，就是最优点（图2—2中的C点）。因此求最优点就是近似求这些共心椭圆族的共同中心。

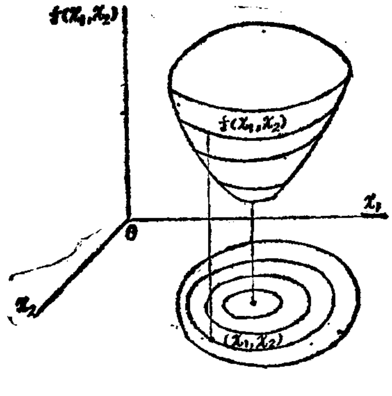

图2—1　二维函数的等值线

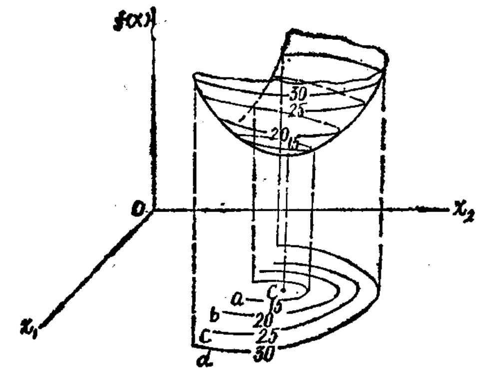

图2—2　等值线

由上得知，目标函数值取决于设计变量。在很多实际问题中，设计变量的取值是有限制的，即必须满足一定的条件。例如一个设计变量代表杆件的截面积，则这个设计变量必须是正值，而不能取负值。再如为了满足强度要求，材料中的应力必须小于许用应力。若应力是某些设计变量的函数时，则这些设计变量的取值必须满足上述条件。这种对设计变量的限制，称为设计约束。在优化方法中，称之为约束条件。这种约束条件可以用数学等式或不等式加以表示，则

$$\left.\begin{array}{ll} h_v(X)=0 & (v=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ g_u(X)\geqslant 0 & \\ & (u=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ p) \\ \text{或}\quad g_u(X)\leqslant 0 & \end{array}\right\} \tag{2—4}$$

式中　X——设计变量；

m——等式约束数；

p——等式和不等式约束总数。

在实际设计中，对约束条件的表示形式可以变更。例如$g(X)\geqslant 0$，可改为$-g(X)\leqslant 0$。为了统一计算，今后规定：不等约束一律采用$g(X)\leqslant 0$的形式。

在工程设计中，约束条件是由实际的设计要求导出的，一般可分为边界约束和性能约束两种：

（1）边界约束　这是考虑设计变量的取值范围（最大允许值和最小允许值），根据式（2—4），可得出两个不等式约束条件：

$$g_1(X)=a_i-x_i\leqslant 0$$
$$g_2(X)=x_i-b_i\leqslant 0$$

当某一个设计变量x_i只取正值才有实际意义时，如面积、长度、重量、……可用如下形式的约束条件表示

$$g(X)=-x_i\leqslant 0$$

（2）性能约束　它是由某种设计性能或指标推导出来的一种约束条件。例如，对零件

的工作应力、变形的限制或者对振动频率、输出扭矩最大波动值的限制，或者对运动学参数如位移、速度、加速度值的限制等等。这种约束一般可以根据设计规范中的设计公式，或者通过物理学和力学的基本分析导出约束函数来表示。

如图2—3所示的曲柄摇杆机构。当要求杆件1转动时，则可以根据曲柄存在条件导出下列几个不等式约束条件：

$$g_{i-1}(X)=x_1-x_i\leqslant 0; \quad (i=2,3,4)$$
$$g_4(X)=x_1+x_4-x_2-x_3\leqslant 0;$$
$$g_5(X)=x_1+x_3-x_2-x_4\leqslant 0;$$
$$g_6(X)=x_1+x_2-x_3-x_4\leqslant 0;$$

若要保证机构在运动中具有良好的传力性能，则其最小传动角γ_{min}必须小于或等于某一允许规定值$[\gamma]$，写成不等式约束条件为

$$g_7(X)=\gamma_{min}-[\gamma]\leqslant 0$$

式中
$$\gamma_{min}=\cos^{-1}\frac{x_2^2+x_3^2-(x_4-x_1)^2}{2x_1x_2}$$

在上述五个数学式中，前四项是边界约束条件式，后一项则是性能约束条件式。

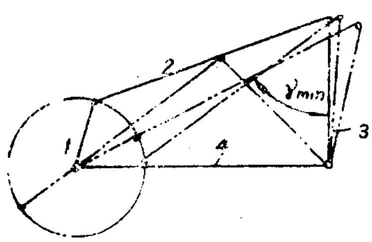

图2—3　曲柄摇杆机构

$x_1=l_1$，$x_2=l_2$，$x_3=l_3$，$x_4=l_4$

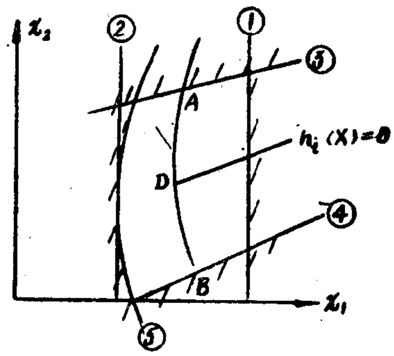

图2—4　二维约束的几何关系

在优化设计中，不等式约束是比较重要的概念。一个不等式约束条件，可将设计空间划分为两部分：一部分满足约束条件$g(X)<0$，另一部分满足约束条件$g(X)>0$；这两部分的分界面称为约束面$g(X)=0$。对于某项设计有m个不等式约束条件，则由m个约束面在设计空间中围成两个区域。凡满足不等式约束方程组$g_i(X)\leqslant 0$的设计变量选择区域，称为可行域，记作

$$D=\{X|\ g_i(X)\leqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots m)\} \qquad (2-5)$$

反之称为不可行域。

凡$X^{(1)}$属于D，数学上可写为$X^{(1)}\in D$，且满足$g_i(X)\leqslant 0$，则称$X^{(1)}$点为内点，或称可行设计方案，否则称为外点，或称不可行方案。

图2—4表示了二维优化设计问题的约束几何关系。直线①、②是设计变量的边界约束，直线③、④及曲线⑤是性能约束，其阴影线的里侧为设计可行域D。在可行域D的曲线AB表示等式约束条件$h_i(X)=0$，这就是说设计变量（x_1,x_2）只能在可行域D内的AB曲线上选取。

2.1.4　优化问题的数学模型

任意一个优化问题都可以归纳为：在满足一定的约束条件下，选取适当的设计变量，使目标函数值达到最优（最小或最大）。其数学表达式为

$$\left.\begin{aligned}&\min f(X) \quad X\in D\subset R^{n}\\ \text{使满足于}\quad &h_{v}(X)=0 \quad (v=1,2\cdots m)\\ \text{及}\quad &g_{u}(X)\leqslant 0 \quad (u=m+1,m+2\cdots p)\end{aligned}\right\} \qquad (2-6)$$

若式（2—6）中的$f(X)$，$h_v(X)$和$g_u(X)$均是X的线性函数，则称这种优化问题为线性规划问题；又若它们不全是X的线性函数时，则称为非线性规划问题。当在可行域D中找到一点X^*，能使$f(X)$值最小，即$f(X^*)$是所有的$f(X)$可能值中最小者，则称X^*为最优点，且称全局最优点或整体最优点。若$f(X^*)$只是局部区域的最优值，则称X^*为局部最优点。

解决实际工程中的优化问题时，首先根据题意及要求列出数学模型，使其符合式（2—6）的形式，然后再选择合适的优化方法解题。所以建立数学模型是解决优化问题时非常重要的一个步骤。对于复杂的问题，建立数学模型是很困难的，有时甚至比求解更为复杂或困难。在这种情况下，往往可以忽略次要因素使问题简化，使之易于列出数学模型。现在举一个工程机械中的实例来说明如何建立数学模型。图2—5表示汽车起重机的蛙式支腿运动简图。支腿摇臂ADB的运动轨迹：当油缸全缩时，支腿收起，处于垂直位置；又当油缸全伸时，支腿放下，摇臂上的D点着地。为了使支腿脚着地后，增大油缸的作用力臂，在支腿摇臂ADB上开有滑槽，使油缸的活塞头由B沿槽BA'向外滑至A点。

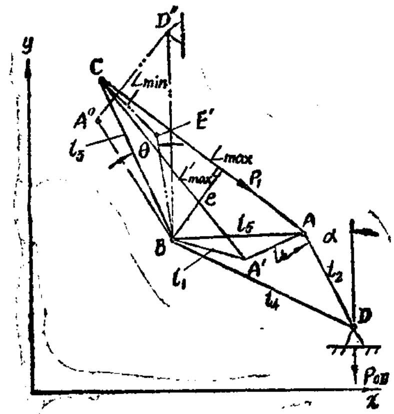

图2—5 蛙式支腿结构运动简图

以支腿摇臂ABD作分离体，对B点取力矩平衡方程，得

$$P_{0D}=\frac{P_1 e}{l_4}\sin\alpha$$

式中 P_1——油缸的作用力；

e——油缸的最小作用力臂，

$$e=\frac{l_1 l_5}{L}\sin\theta$$

其中θ及L——油缸具有力臂e时的转角与长度，计算θ及L的公式，可参考第3章3.7节，

$$\alpha=\sin^{-1}\frac{y_B}{l_4},$$

其中y_B——铰点B的y轴座标。

获得支腿最大着地作用力，是蛙式支腿优化设计的一个目标，因此选择

$$f(X)=-\frac{P_1 e}{l_4}\sin\alpha$$

作为设计的一个目标函数。这个函数受结构的几何条件，油缸的制造工艺、重量以及设计变量自身限制等条件约束。由这些条件建立起来的约束函数为

$$h_1(X)=\cos^{-1}\frac{l_1^2+l_3^2-L^2}{2l_1l_3}+\cos^{-1}\frac{l_1^2+L^2-l_3^2}{2l_1L}$$

$$+\cos^{-1}\frac{l_3^2+L^2-l_1^2}{2l_3L}-\pi=0$$

$$h_2(X)=\cos^{-1}\frac{l_2^2+l_4^2-l_5^2}{2l_2l_4}+\cos^{-1}\frac{l_2^2+l_5^2-l_4^2}{2l_2l_5}$$

$$+\cos^{-1}\frac{l_4^2+l_5^2-l_2^2}{2l_4l_5}-\pi=0$$

$$g_1(X)=y_B-l_4<0$$

$$h_3(X)=\sigma-\frac{\lambda^2\cos\theta_{\min}-\cos\theta_{\max}+\sqrt{(\lambda^2\cos\theta_{\min}-\cos\theta_{\max})^2-(\lambda^2-1)^2}}{\lambda^2-1}$$
$$=0$$

$$h_4(X)=\rho-\sqrt{\sigma^2+1-\sigma\cos\theta_{\min}}=0$$

$$g_2(X)=\frac{P_i-[P_0]}{[P_0]}<0$$

$$g_3(X)=[\Delta L+(T_1+T_2)_{\min}]-L_{\min}<0$$

$$g_4(X)=\Delta L-\frac{\Delta L}{\lambda-1}<0$$

$$g_5(X)=L_{\min}-L_{\max}<0$$

$$g_j(X)=\frac{d_{1i}+d_{2i}}{2}-l_i<0 \qquad (i=1,2,3,4;\quad j=6,7,8,9)$$

式中 $\theta_{\min}=\cos^{-1}\dfrac{l_1^2+l_3^2-L_{\min}^2}{2l_1l_3}$, $\theta_{\max}=\cos^{-1}\dfrac{l_1^2+l_3^2-L_{\max}^2}{2l_1l_3}$,

λ、ρ及σ——比例系数,

$$\lambda=\frac{L_{\max}}{L_{\min}},\quad \rho=\frac{L_{\min}}{l_3},\quad \sigma=\frac{l_1}{l_3},$$

P_i、$[P_0]$——根据外载荷的大小确定的油缸作用力和额定的作用;

ΔL——油缸行程;

d_{1i}、d_{2i}——杆l_i两端铰轴的直径。

上述各式中的几何量可以换成用$X=[x_1x_2\cdots x_n]^T$诸量来表示，此处不再复写了。

2.2 无约束问题的优化方法

2.2.1 最优解存在的必要和充分条件

由数学分析得知，函数$F(x)$在某点处具有极小值的必要和充分条件是除$F(x)$连续外，它的一阶导数在$x=x_0$处必须为零，即$F'(x_0)=0$，同时在$x=x_0$处的二阶导数为正，即$F''(x_0)>0$。同样，在$F'(x_0)=0$的情况下，当$F''(x_0)<0$时，$F(x_0)$是极大值（图2—6）；当$F''(x_0)=0$时，$F(x_0)$在x_0点为驻点（图2—7）。

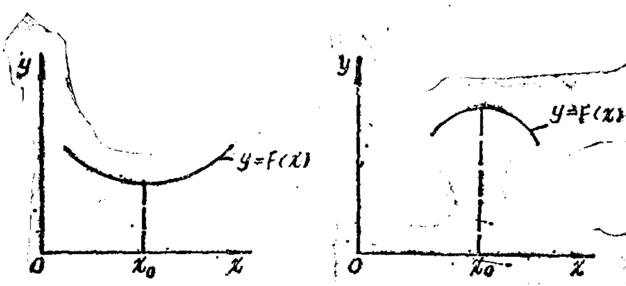

图2－6　F(x)的极值

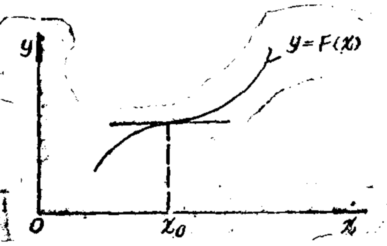

图2－7　F(x)的驻点

对于二元函数$F(x,y)$也具有类似的性质。在$[F''_{xy}(x_0,y_0)]^2<F''_{xx}(x_0,y_0)F''_{yy}(x_0,y_0)$条件下，当$F''(x_0,y_0)>0$时，函数在$x=x_0$，$y=y_0$处，具有极小值；当$F''(x_0,y_0)<0$时，函数在$x=x_0$，$y=y_0$处具有极大值。

推广到多元函数而论，设X为n维向量，即

$$X=[x_1\ x_2\ x_3\cdots x_n]^T$$

目标函数$F(X)$在某一点，例如在M点附近恒有

$$F(X_M)\leqslant F(X)$$

式中　X_M——M点的坐标向量。

则称M点为极小点。此点显然满足条件

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\ 2\cdots) \qquad (2-7)$$

由偏导数$\frac{\partial F}{\partial x_i}$表示的向量，称为梯度。用下面式子表示：

$$\nabla F(X)=\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\ \cdots\ \frac{\partial F}{\partial x_n}\right]^T \qquad (2-8)$$

梯度$\nabla F(X)$的模为

$$\|\nabla F(X)\|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2} \qquad (2-9)$$

由式（2－7）知，若在X_M处，$F(X)$具有极值，则在X_M处的梯度为零向量，即

$$\nabla F(X)=[0\ 0\cdots 0]^T=0$$

式（2－7）或（2－8）是极小值的必要条件，但不是充分条件。

现在求充分条件。用泰勒公式将$F(X)$展开后，得

$$F(X)\approx F(X_M)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{XM}(x-x_{Mi})+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\right)\cdot (x_i-x_{Mi})(x_j-x_{Mj}) \qquad (2-10)$$

写成矩阵的形式为

$$F(X)\approx F(X_M)+[X-X_M]^T\nabla F[X_M]+\frac{1}{2}[X-X_M]^T A_{XM}[X-X_M] \qquad (2-11)$$

式中　A——称海赛Hessian矩阵，且

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \qquad (2-12)$$

A_{X_M}为$X=X_M$时代入式（2—12）后的Hessian矩阵。

因为X_M为极小点，所以$\nabla F(X_M)=0$，从式（2—10）知

$$F(X)-F(X_M)\approx\frac{1}{2}[X-X]^T A_{X_M}[X-X_M]>0 \qquad (2-13)$$

若要满足条件式（2—13），根据矩阵理论知A_{X_M}必须为正定，亦即*Hessian*矩阵在X_M点附近为正定。这就是$F(X)$在X_M点具有极小值的充分条件。

【例2—1】 试证明在点（1，1）处函数$f(X)=x_1^4-2x_2x_1^3+x_3^2+x_1^2-2x_1+5$具有极小值。

【解】

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=4x_1^3-4x_2x_1+2x_1-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_1^2+2x_2$$

用$x_1=1$，$x_2=1$代入上式后得$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$。原函数的

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x_1^2-4x_2+2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=-4x_1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2$$

所以Hessian矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 12x_1^2-4x_2+2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

用$x_1=1$，$x_2=1$代入后得

$$A=\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

它是一个正定矩阵。用$x_1=1$，$x_2=1$代入$f(X)$后得极小值为4。

最后，必须指出：多元函数极小值的必要和充分条件为梯度等于零和Hessian矩阵为正定。这一切只有当$f(X)$为二阶可微时才能得到。另外，所求得的极小点可能是局部地区的极小点。要判断它是否是全可行域上的极小点，在工程优化设计中，往往是采用几个不同的初始点，从几个方向上进行搜索，最后加以判断。

2.2.2 一维搜索法

一维搜索法是目前解决无约束多变量函数问题的主要方法。所谓无约束问题，就是寻找一组几维设计变量$X=[x_1x_2\cdots\cdots x_n]^T$使目标函数为

$$\min F(X)\text{或}\min\phi(X,r^{(K)}) \qquad (2-14)$$

并对X没有任何约束的问题。也就是说不对X建立任何的边界条件和性能条件的约束函数。一维搜索法是类似于"瞎子爬山"，直接从分析函数$F(X)$或$\phi(X,r^{(K)})$的特征出发，构造一类逐步使目标函数值下降的算法，直达到极小点为止。

这个方法的计算步骤通常为：从初始点$X^{(0)}$出发，沿着某一特定方向$S^{(0)}$，求出$F(X)$在此方向上的极值点$X^{(1)}$，然后沿着下一个特定方向$S^{(1)}$进行搜索，求出新的极值点$X^{(2)}$。如此继续下去，直到求出最优点X^*为止。以上每一步都是从某一定点$X^{(K)}$出发，沿着方向$S^{(K)}$寻找最优点$X^{(K+1)}$（图2－8），也就是求目标函数$F(X^{(K)}+\alpha S^{(K)})$的最优点，而此时的$X^{(K)}$及$S^{(K)}$均暂时为定值，只有$\alpha$为变量，这样原问题就转化为一维问题。$\alpha$称为步长。上述只求一个变量($\alpha$)的函数最优值方法，称为一维搜索方法。在这类方法中，通常是先求原函数的一阶导数，并使之等于零，根据此条件求出变量，然后代入二阶导数，再依据二阶导数的正负来判断原函数是极小值或极大值。

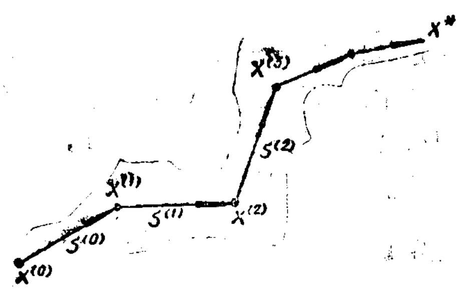

图2－8 极值搜索法步骤示意图

2.2.3 最速下降法

由矢量分析得知，函数$F(X)$的梯度方向是函数值增加最快的方向，负方向是其值下降最快的方向（图2－9）。因此若取这个负方向为每步搜索的方向，就可以逐次求得极小值，那末第K次搜索方向$S^{(K)}$为

$$S^{(K)}=-\frac{\nabla F(X^{(K)})}{\|\nabla F(X^{(K)})\|} \qquad (2-15)$$

式中 $S^{(K)}$——单位向量。

这样第K次搜索迭代的新点$X^{(K+1)}$为

$$X^{(K+1)}=X^{(K)}+\alpha^{(K)}S^{(K)}=X^{(K)}-\frac{\alpha^*\nabla F(X^{(K)})}{\|\nabla F(X^{(K)})\|} \qquad (2-16)$$

式中 $\alpha^{(K)}$——一维搜索最优步长因子。

如果在某步已找到极小点，则在该点的梯度等于零。在实际计算中，步长因子常采用近似算法，所以梯度不可能为零。一般若$\|\nabla F(X^{(K)})\|<\varepsilon$，$\varepsilon$为计算终止值，则停止计算，并认为达到终止值的那一点是极小点。

由于在负梯方向上函数值下降速度最快，所以通常称之为最速下降法或梯度法。

最速下降法的"最速下降"性质，仅在X_n附近出现，对整体来说并不全是如此，最速下降的收敛速度不是最快，通常在搜索开始的几步采用最速下降法，此时下降速度比较快，然后再换用其他方法求最优点。

【例2－2】用最速下降法求函数$f(X)=x_1^2+2x_2^2$的最小值，设初始点$X^{(0)}=[2,2]^T$

【解】先给定$\varepsilon=10^{-2}$。原函数的梯度表达式为

$$\nabla f(X)=[2x_1 \quad 8x_2]^T$$

在$X^{(0)}$的梯度为