高等学校教材

有限单元法的程序设计

河海大学 姜弘道 陈和群

水利电力出版社

内 容 提 要

本书是为已经初步掌握了有限单元法基本原理的大学生、研究生以及工程技术人员，进一步学习有限单元法的程序设计方法与技巧而编写的。全书由浅到深分章详细介绍了弹性力学平面问题3结点三角形单元直接解程序、空间问题20结点等参数单元分块直接解程序、以及自振特性与动力反应的3结点三角形单元直接滤频法程序和振型叠加法程序。

书中所附程序既具有典型性又具有实用性，可直接用来解决有关的生产实际问题。

本书可作为高等学校工科大学生与研究生的教材或自学参考用书，也可供工程技术人员学习与应用。

高等学校教材
有限单元法的程序设计
河海大学　娄弘道　陈和群
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　10印张　223千字
1989年10月第一版　1989年10月北京第一次印刷
印数0001— 2090　册
ISBN 7-120-00838-2/TV·278
定价1.80元

前　言

有限单元法，作为求解偏微分方程边值问题的一种有效的数值方法，已经在各个工程领域得到广泛的应用，并取得了很好的效果。与此相适应，许多高等学校已为工科大学生、研究生开设了介绍有限单元法的必修课或选修课，并先后出版了若干种教材，既满足了教学上的需要，又为推广有限单元法发挥了很大的作用。然而，有限单元法是一种适宜于用计算机实施具体计算的方法，为了能真正掌握有限单元法，除了懂得其理论，还必须对如何根据有限元的理论编制相应的计算程序有一定的了解与掌握。本书就是为了弥补懂得有限单元法理论与在实际应用中编制程序能力之间的差距而编写的。

全书共分四章。第一章在简述有限单元法程序设计的一般原则与要求之后，对求解弹性力学问题的有限元位移法的分析步骤与一般公式作了归纳性的介绍。第二章详细介绍了弹性力学平面问题的3结点三角形单元直接解程序。第三章详细介绍了弹性力学空间问题的20结点等参数单元分块直接解程序。第四章介绍了平面动力问题中计算结构动力特性的直接滤频法程序以及计算结构动力反应的振型叠加法程序。此外，还有一个附录介绍了20结点等参数单元程序中采用的应力成果的计算方法。本书若用作教材，可以根据教学时数的多少，选用一、二章，或一、二、三章，或一、二、四章，或全部四章。

本书要求读者具备弹性力学问题的有限单元法与FORTRAN77语言方面的知识。为了便于教学以及工程技术人员自学，在编写本书时力求做到深入浅出、难点分散、重点突出，而且不在细节上过多追求程序设计的技巧。例如，在第二章中，突出了整体劲度矩阵的一维变带宽存贮与线性代数方程组的三角分解解法；在第三章中，突出了20结点等参数单元的单元劲度矩阵的形成、面力等效结点荷载的形成以及整体劲度矩阵的分块。

本书承主审人大连理工大学赵洒义副教授、陈美珍副教授提出十分宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。我校计算中心吴旭光副教授也为本书提供了有关材料，谨致谢意。

由于作者水平所限，书中难免有不少缺点乃至错误，敬请读者批评指正。

河海大学　　姜弘道　陈和群

1989年1月于南京

目　录

第一章 绪　论

第一节 引　言

许多工程问题的分析，诸如固体力学中位移场与应力场的分析、流体力学中渗流场的分析、传热学中温度场的分析，等等，都可以归结为在边界条件下求解该问题的支配方程（通常是偏微分方程）。由于工程实际问题的边界条件往往比较复杂，要想获得满足边界条件的支配方程的精确解是很困难的；又由于工程师所需要的是每个问题的解的数值大小，而不只是其解析表达式，因此，在工程科学里，各种有效的数值解法受到普遍的重视。有限单元法（亦称有限元法）就是从20世纪50年代以来随着电子计算机应用日益广泛而迅速发展起来的一种极其有效的偏微分方程的通用数值解法。在有限单元法中，通过剖分将连续体离散化为由许多单元在结点处连结而成的有限个单元的集合体，又通过插值将偏微分方程的解在每个单元内的分布用该单元结点上的值来表示，再应用变分原理(或应用加权余量法）建立用来确定各结点处解的数值大小的支配方程(一般是线性代数方程组)。它既有比较坚实的理论基础，又能统一各类工程问题的求解方法，便于应用电子计算机进行大量数值运算，因此，有限单元法已经成为许多工程领域的工程技术人员所乐于采用的计算分析方法。

有限单元法最初是在固体力学中发展起来的。与固体力学中的其它数值解法相比，它具有下面一些显著的优点：它便于处理复杂的边界条件；便于解决不均质材料或各向异性材料的问题；便于分析由杆件、板、壳、实体组成的组合结构以及需要先确定渗流场、温度场再确定位移场、应力场的混合问题；它能够处理材料非线性或几何非线性问题；它能够解决结构动力分析问题；最后，它便于编制灵活、通用的计算程序，能够被广大工程技术人员很方便地用来解决他们所面临的各种各样的工程实际问题。

有限单元法是以电子计算机为计算工具的数值解法，它的上述优点只有在使用电子计算机的条件下才能显示出来，它的应用与发展都离不开电子计算机的硬件与软件。跟任何用电子计算机解题的过程一样，用有限单元法解题也包括问题分析、算法设计以及在计算机上实现算法三个阶段。

有限单元法的问题分析已有许多专著进行了详细的讨论，我们要求本书的读者已经具备这方面的必要知识，所以将在下一节只对解弹性力学问题的有限元位移法予以概括说明。它的主要内容是建立离散化的计算模型；规定计算模型的已知量和未知量；建立由已知量确定未知量的有关公式。

有限单元法的算法设计就是建立起能提供计算机用以实现上述有关公式的算法。以后将会发现，对有限单元法的算法设计影响最大的是线性代数方程组的解法以及该方程组的系数矩阵（即结构整体劲度矩阵）在计算机内的存贮方式。为了清晰起见，本书在介绍第一个程序时采用流程图（亦称框图）来表示算法。所谓流程图是用各种形状的框及箭头连

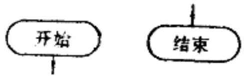
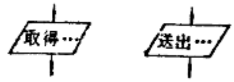
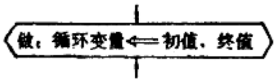
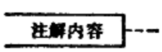
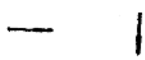
符号	符号的名称	符号的含义
	起止框	表示算法的开始或结束
	输入/输出框	输入给予变量的值或输出常量及变量的值
	处理框	表示某一种处理或运算
	循环框	表示在初值至终值间进行循环
	判断框	根据框内关系或条件的结果确定下面执行哪一框
	调用过程框	调入并执行某个子算法
	注解框	插入必要的说明及注解
	流线	指示执行算法的次序
	引入连接符	指出流程图中位于另外一处的框流入的位置
	引出连接符	指出流程图中位于另外一处的待执行的框

图 1-1

结起来的表示计算过程的图。本书所采用的框的形状及其含义如图1-1所示，框内将写上该框执行的具体内容。

为了在计算机上实现有限单元法的计算，还必须把在算法设计中用流程图表示的算法步骤，转换为用某一种计算机程序设计语言表示的步骤，也就是通常所说的“编制程序”。本书所用的程序设计语言是FORTRAN，并假定读者已具备这方面的基础。

任何一个编好了的程序必须经过调试才能正式投入使用。所谓调试程序就是对大量的考题试运行程序，以检验程序所有组成部分、所有功能的正确性。若运行结果不对，则必须找出错误原因予以排除。

以上所述用计算机解题的过程可以用图1-2的流程图来表示。

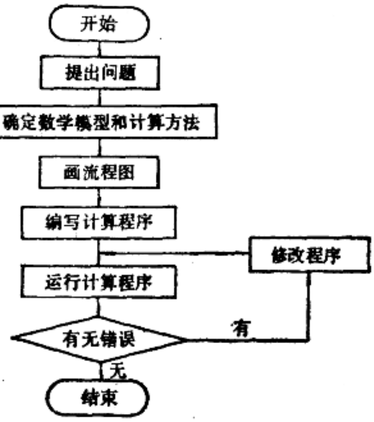


图 1-2

事实表明，无论是学习有限单元法的大学生或研究生，还是用有限单元法分析工程实际问题的工程师，他们在掌握有限单元法的理论方面并没有太大的困难，但是在进行有限单元法的算法设计并在计算机上实现这个算法方面却会遇到很大的困难。本书的目的就是试图弥补懂得有限单元法的理论与在实际应用中编制程序的能力之间的差距，指出如何实现从理论到程序的重要转变。为此，本书针对弹性力学的静力问题，在第二章中介绍了平面问题3结点三角形单元的有限元程序，在第三章中介绍了空间问题20结点等参数单元的有限元程序；针对弹性力学的动力问题，在第四章中介绍了平面问题的动力有限元程序。对于所介绍的程序，有关的理论与公式只是以归纳的形式扼要地予以介绍，重点放在弄清楚程序的整体结构和编制程序的思路，并通过对程序清单的详细解释，弄清楚每个子程序的功能与接口条件。编制上述程序的思路同样可以用在有限单元法的其它应用领域，而对于其它的单元类型，也只要将具体程序稍加改动即可。

现在我们来指出进行有限单元法的程序设计时所应遵循的主要原则。

首先，程序必须是正确的。亦即程序必须经得起计算实践的考验，不仅对于通常遇到的情况要能得出正确的结果，而且对于很少遇到的特殊情况也要能得出正确的结果。这就要求程序设计者在调试程序时把一切可能遇到的情况都通过考题检验，让程序的各个部分、每个角落都在考题时走到过，运行过，不留下任何死角。

其次，程序应该是尽可能高效率的。有限元程序一般都要求解几百阶，甚至成千上万阶的线性代数方程组，对计算机的存贮容量与运算速度均有较高的要求。这就迫使程序设计者在编制程序前必须详细地分析、研究问题，根据问题的特点与计算机的资源条件采用较好的计算方法，努力达到存贮省、时间短、精度高三者完美的统一。

由于种种原因，一个有限元程序在使用过程中往往需要不断地修改与完善，例如要增加某种单元，修改某种材料模型，等等。因此，程序还应该便于修改、增删一些内容。为了达到这个要求，较好的办法是采用模块式的程序结构。所谓模块式结构的程序就是将一个规模较大的有限元程序，化整为零，划分为若干个模块，每个模块都具有一定的功能，执行一个方面的运算，具有很大的独立性和灵活性，但它又是根据前面模块做出的结果，按一定的要求进行加工，形成新的结果供后面的模块使用。这些结果便是各个模块之间的

接口信息。模块化的程序结构要求接口信息越简单越好，这样就能使得修改一个模块或增加一个模块都不致对整个程序有很大的影响。

最后，有限元程序往往比较复杂，但它是要提供给用户使用的，因此，有限元程序还应该易读、易懂、易用。所谓易读、易懂，主要是指每个模块的功能很清楚，便于读程序的人理解，各个模块的接口信息要设计得简单、明了，以便读程序的人可以清楚地看到各个模块之间的相互关系。所谓易用，则是指输入数据的意义明确并易于准备，便于检查；输出结果要易于整理分析，最好能直接供工程上采用。

若编出的程序能符合上述原则，那么可以说它的质量是好的。

第二节　有限单元法的分析步骤概述

本书只涉及以结点位移为基本未知量的弹性力学问题的有限元位移法，其静力分析的步骤可概括如下。

1.离散化

就是用有限多个有限大小的单元在有限多个结点上互相连接而成的离散结构物代替原来的连续弹性体。在平面问题与空间问题中常用的单元分别如图1-3与图1-4所示。

离散结构物的基本未知量是所有可动结点的结点位移值。以后用$\{\delta_i\}$表示第 i 个结点的结点位移列阵，用$\{\delta\}^e$表示单元的结点位移列阵，用$\{\delta\}$表示整个结构的未知结点位移列阵。

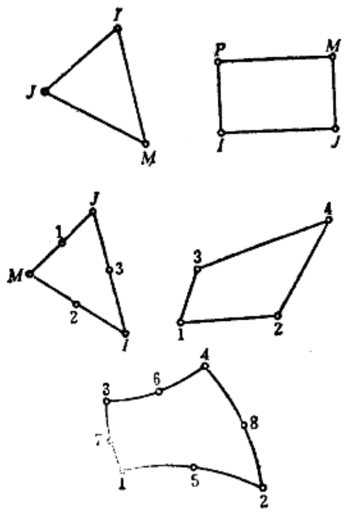


图 1-3

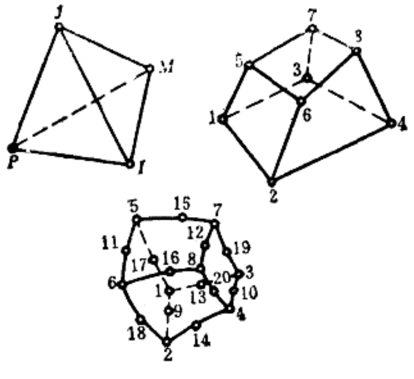


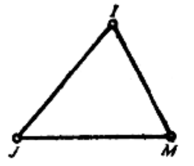
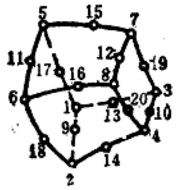
图 1-4

作用在离散结构物上的荷载是结点荷载。以后用$\{R_i\}$表示第 i 个结点的结点荷载列阵，用$\{r\}^e$表示单元的结点荷载列阵，用$\{R\}$表示整个结构的结点荷载列阵。其中$\{r\}^e$是将单元所受的实际荷载（集中力、分布体力及分布面力）按静力等效的原则移置到结点而

得到的，而$\{R\}$则是由$\{r\}^e$集合而得到的。

由于单元所受的荷载都已被移置到结点上，所以每个单元只受有结点对它作用的所谓结点力，单元的结点力列阵用$\{F\}^e$来表示。

对于平面问题的3结点三角形单元以及空间问题的20结点等参数单元，它们的$\{\delta_i\}$、$\{\delta\}^e$、$\{R_i\}$、$\{r\}^e$、$\{F\}^e$如下表所示：

单元类型	$\{\delta_i\}$	$\{\delta\}^e$	$\{R_i\}$	$\{r\}^e$	$\{F\}^e$
	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_m \\ Y_m \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ \vdots \\ X_{20} \\ Y_{20} \\ Z_{20} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \vdots \\ U_{20} \\ V_{20} \\ W_{20} \end{Bmatrix}$

在离散结构物中，通常是已知物体的形状和大小(即各个结点的坐标值以及各个单元的结点组成)，物体的弹性常数(即每个单元的E、μ)，物体所受的外力(即$\{R\}$)以及物体所受的结束情况，而需要求解的基本未知量是每个可动结点的结点位移值，即$\{\delta\}$，并要根据$\{\delta\}$进一步求出每个单元的应力分量。

2.单元分析

有限单元法中的单元分析就是根据单元的结点位移列阵$\{\delta\}^e$确定单元的位移分量列阵$\{f\}$、应变分量列阵$\{\varepsilon\}$、应力分量列阵$\{\sigma\}$以及结点力列阵$\{F\}^e$。对于平面问题以及空间问题，$\{f\}$、$\{\varepsilon\}$、$\{\sigma\}$分别为

	$\{f\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{\sigma\}$
平面问题	$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$

空间问题 $\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$

为此，先建立单元的位移模式，即由插值公式得

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e, \tag{1-1}$$

其中$[N]$是形函数矩阵，它的具体表达式将在以后有关章节中给出。

接着，将（1-1）式代入几何方程

$$\{\varepsilon\}=[\partial]\{f\}, \tag{a}$$

即可求得

$$\{\varepsilon\}=[\partial][N]\{\delta\}^e=[B]\{\delta\}^e, \tag{1-2}$$

其中

$$[B]=[\partial][N], \tag{1-3}$$

称为应变转换矩阵，将它乘以单元的结点位移列阵$\{\delta\}^e$，就得到单元的应变分量；$[\partial]$是个微分算子矩阵，在平面问题中，它是

$$[\partial]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \tag{b}$$

在空间问题中，它是

$$[\partial]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{c}$$

再将（1-2）式代入物理方程

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{d}$$

即可求得

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e=[S]\{\delta\}^e, \qquad (1\text{-}4)$$

其中

$$[S]=[D][B], \qquad (1\text{-}5)$$

称为应力转换矩阵，将它乘以单元的结点位移列阵，就得到单元的应力分量；$[D]$是弹性矩阵，在平面应力问题中，它是

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}; \qquad (1\text{-}6a)$$

在平面应变问题中，须将（1-6a）式中的E与μ分别用$\frac{E}{1-\mu^2}$与$\frac{\mu}{1-\mu}$来代替；在空间问题中，它是

$$[D]=\begin{bmatrix}D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0\\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0\\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3\end{bmatrix}, \qquad (1\text{-}6b)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\\ D_2&=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\\ D_3&=\frac{E}{2(1+\mu)}\end{aligned}\right\}. \qquad (e)$$

为了能由$\{\delta\}^e$确定$\{F\}^e$，须对单元利用虚功方程。由于从离散结构物中割离出来的单元只受到结点力的作用，因此，虚功方程可以表示为

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=\iiint_{V^e}\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dxdydz, \qquad (f)$$

其中$\{\delta^*\}^e$是单元的虚结点位移，$\{\varepsilon^*\}$是相应的单元的虚应变，三重积分是在单元的体积V^e内进行的。将由（1-2）式得来的$\{\varepsilon^*\}=[B]\{\delta^*\}^e$代入（$f$）式，得

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=(\{\delta^*\}^e)^T\iiint_{V^e}[B]^T\{\sigma\}dxdydz,$$

由于虚位移是任意的，从而$(\{\delta^*\}^e)^T$也是任意的，于是得

$$\{F\}^e=\iiint_{V^e}[B]^T\{\sigma\}dxdydz, \qquad (g)$$

再将（1-4）式代入（g）式，即得

$$\{F\}^e=\iiint_{V^e}[B]^T[D][B]dxdydz\{\delta\}^e, \tag{1-7}$$

记

$$[k]^e=\iiint_{V^e}[B]^T[D][B]dxdydz, \tag{1-8}$$

（1-7）式就成为

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e, \tag{1-9}$$

其中$[k]^e$称为单元的劲度矩阵，亦即结点力转换矩阵，将它乘以单元的结点位移列阵，就得到单元的结点力列阵。

对于平面问题，取z方向的厚度为t，（1-8）式成为

$$[k]^e=\iint_A[B]^T[D][B]tdxdy, \tag{1-10}$$

其中A是单元的面积。

3.结构的整体分析

有限单元法中结构整体分析的首要任务就是建立求解基本未知量，即结构的未知结点位移列阵$\{\delta\}$的整体结点平衡方程组

$$[K]\{\delta\}=\{R\}, \tag{1-11}$$

其中$[K]$是结构的整体劲度矩阵，$\{R\}$是结构的整体结点荷载列阵。

为此，对离散化结构应用最小势能原理。设离散结构共有NE个单元，在实际平衡状态单元的形变势能为U^e、外力势能为V^e、总势能为Π_p^e，则离散结构的总势能Π_p为

$$\Pi_p=\sum_{e=1}^{NE}\Pi_p^e=\sum_{e=1}^{NE}U^e+\sum_{e=1}^{NE}V^e, \tag{h}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}U^e&=\iiint_{V^e}\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dxdydz\\V^e&=-\left(\{f\}^T\{P\}+\iiint_{V^e}\{f\}^T\{p\}dxdydz+\iint_{S^e}\{f\}^T\{\overline{p}\}ds\right)\end{aligned}\right\}, \tag{i}$$

这里的$\{P\}$、$\{p\}$、$\{\overline{p}\}$分别是作用在单元上的集中力列阵、分布体力列阵与分布面力列阵，S^e是指作用着面力的单元表面。

将（1-1）、（1-2）、（1-4）三式代入（i）式，便可以将U^e、V^e用$\{\delta\}^e$表示为

$$\left.\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2}\iiint_{V^e}(\{\delta\}^e)^T[B]^T[D][B]\{\delta\}^e dxdydz \\ &= \frac{1}{2}(\{\delta\}^e)^T[k]^e\{\delta\}^e \\ V^e &= -(\{\delta\}^e)^T([N]^T\{P\}+\iiint_{V^e}[N]^T\{p\}\,dxdydz+\iint_{S^e}[N]^T\{\overline{p}\}ds) \\ &= -(\{\delta\}^e)^T\{r\}^e \end{aligned}\right\} \qquad (j)$$

其中

$$[k]^e=\iiint_{V^e}[B]^T[D][B]dxdydz$$

即是（1-8）式所示的单元劲度矩阵；

$$\{r\}^e=[N]^T\{P\}+\iiint_{V^e}[N]^T\{p\}\,dxdydz+\iint_{S^e}[N]^T\{\overline{p}\}ds \qquad (1\text{-}12)$$

即是计算单元等效结点荷载列阵的公式。

现在将（j）式中的U^e、V^e用$\{\delta\}$来表示。由于列阵$\{\delta\}$比列阵$\{\delta\}^e$的阶数升高了，因此必须将$[k]^e$以及$\{r\}^e$的阶数相应升高到分别与$[K]$以及$\{R\}$一样。现将阶数升高后的$[k]^e$记为$[K]^e$、$\{r\}^e$记为$\{R\}^e$，那么(j)式就可以改写为

$$\left.\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]^e\{\delta\} \\ V^e &= -\{\delta\}^T\{R\}^e \end{aligned}\right\}, \qquad (k)$$

其中$[K]^e$虽然阶数与$[K]$一样，但它仅在与所考察单元的结点号相应的行、列上有非零元素，并且就是$[K]^e$中的元素，其它行、列上的元素均为零。$\{R\}^e$也有类似情况。

现将（k）式代入（h）式，得

$$\Pi_p=\sum_{e=1}^{NE}\frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]^e\{\delta\}-\sum_{e=1}^{NE}\{\delta\}^T\{R\}^e. \qquad (l)$$

根据最小势能原理，应有

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial\{\delta\}}=0, \qquad (m)$$

将（l）式代入（m）式，得

$$\sum_{e=1}^{NE}[K]^e\{\delta\}=\sum_{e=1}^{NE}\{R\}^e, \qquad (n)$$

将（n）式与（1-11）式比较，得

$$[K]=\sum_{e=1}^{NE}[K]^e, \qquad (1\text{-}13)$$

$$\{R\}=\sum_{e=1}^{NE}\{R\}^e. \qquad (1\text{-}14)$$

上述两式表明，结构的整体劲度矩阵$[K]$与整体结点荷载列阵$\{R\}$可以由组成结构的所有单元的劲度矩阵及单元的结点荷载列阵叠加得到。

在将结构的整体结点平衡方程组（1-11）式建立起来后，对于具有非零已知结点位移的情况，还须修改（1-11）式，详见第二章。

若将考虑过非零已知结点位移的整体结点平衡方程组仍写作（1-11）式，接下去便可采用一种恰当的计算方法进行求解。在将{ δ }解出后，便可利用（1-4）式计算各个单元的应力分量，并根据需要对计算成果进行必要的整理、分析。

在以上的分析中，除了结构的离散化以及成果的整理、分析还或多或少需要人工进行外，其余各步均可编制通用程序后由电子计算机来执行。对于一个已经离散化的结构，用有限单元法进行计算的流程图之一如图1-5所示，下一章介绍的平面问题程序就是按照这个流程图编制的。

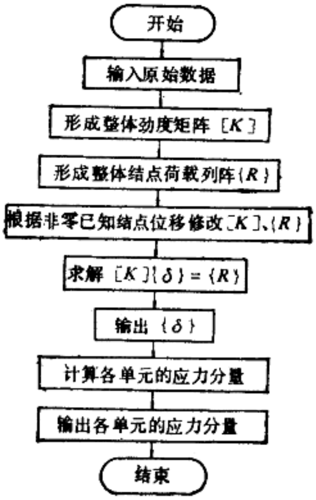


图 1-5

第二章　平面问题的有限元程序设计

本章介绍平面问题中3结点三角形单元的有限元直接解程序。在第一节给出有关计算公式后，按图1-5所示流程图，逐框介绍该程序的设计方法与思路，特别对于[K]的一维变带宽存贮以及线性代数方程组的三角分解解法作详细讨论。最后一节给出完整的源程序及其使用说明，并通过例题说明此程序的使用方法。

第一节　3结点三角形单元的计算公式

（1）位移模式　对于图2-1所示的3结点三角形单元，其位移模式为

$$\left.\begin{aligned}u&=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m\\v&=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}1)$$

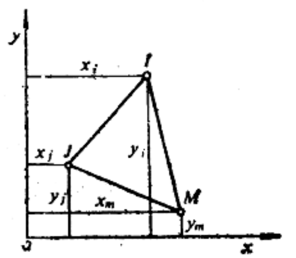


图 2-1

其中形函数

$$N_i=\frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy),\qquad (i,j,m)\qquad(2\text{-}2)$$

系数a_i、b_i、c_i为

$$\left.\begin{aligned}a_i&=x_jy_m-x_my_j,\\b_i&=y_j-y_m,\\c_i&=x_m-x_j,\end{aligned}\right\},\qquad (i,j,m)\qquad(2\text{-}3)$$

A是三角形ijm的面积

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\1 & x_j & y_j\\1 & x_m & y_m\end{vmatrix}=(b_jc_m-b_mc_j)/2,\qquad(2\text{-}4)$$

x_i、x_j、x_m和y_i、y_j、y_m分别是i、j、m三点在$x-y$坐标系中的坐标值。

（2-1）式也可以改写成（1-1）式的形式，即

$$\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0\\0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\\u_m\\v_m\end{Bmatrix},\qquad(2\text{-}5)$$

可见形函数矩阵[N]为

$$[N]=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \tag{2-6}$$

（2）应变转换矩阵$[B]$　将（2-6）式代入（1-3）式，得

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{a}$$

再将（2-2）式代入(a)式，得

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}, \tag{2-7}$$

（2-7）式可以写成分块矩阵的形式

$$[B]=[B_i \quad B_j \quad B_m], \tag{2-8}$$

其中

$$[B_i]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}. \qquad (i,\ j,\ m) \tag{2-9}$$

将（2-7）式代入（1-2）式，得

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}. \tag{2-10}$$

注意到$[B]$中元素全是常量，因此3结点三角形单元是常应变单元，显然它也是常应力单元。

（3）应力转换矩阵$[S]$　将（2-8）式代入（1-5）式，得

$$[S]=[D][B_i \quad B_j \quad B_m]=[S_i \quad S_j \quad S_m], \tag{b}$$

其中

$$[S_i]=[D][B_i] \qquad (i,\ j,\ m) \tag{c}$$

对于平面应力问题，将（1-6a）式以及（2-9）式代入（c）式，得

$$[S_i]=\frac{E}{2(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2}c_i & \frac{1-\mu}{2}b_i \end{bmatrix} \qquad (i,\ j,\ m) \tag{d}$$

将（d）式代入（b）式，再将$[S]$代入（1-4）式，得

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{2(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_i & \mu c_i & b_j & \mu c_j & b_m & \mu c_m\\ \mu b_i & c_i & \mu b_j & c_j & \mu b_m & c_m\\ \frac{1-\mu}{2}c_i & \frac{1-\mu}{2}b_i & \frac{1-\mu}{2}c_j & \frac{1-\mu}{2}b_j & \frac{1-\mu}{2}c_m & \frac{1-\mu}{2}b_m\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix}, \tag{2-11}$$

对于平面应变问题，须将上式中的E与μ分别用$\frac{E}{1-\mu^2}$与$\frac{\mu}{1-\mu}$来代替。

（4）单元劲度矩阵$[k]^e$　将（2-8）式代入（1-10）式，得

$$[k]^e=\iint_A\begin{Bmatrix}[B_i]^T\\ [B_j]^T\\ [B_m]^T\end{Bmatrix}[D][B_i\ B_j\ B_m]t\,dx\,dy$$

$$=\begin{Bmatrix}[B_i]^T\\ [B_j]^T\\ [B_m]^T\end{Bmatrix}[D][B_i\ B_j\ B_m]tA$$

$$=\begin{bmatrix}k_{ii} & k_{ij} & k_{im}\\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm}\\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm}\end{bmatrix}, \tag{2-12}$$

其中

$$[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_s]tA,\qquad (r、S=i,j,m) \tag{e}$$

对于平面应力问题，将（1-6a）式以及（2-9）式代入（e）式，得

$$[k_{rs}]=\frac{Et}{4(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_rb_s+\frac{1-\mu}{2}c_rc_s & \mu b_rc_s+\frac{1-\mu}{2}c_rb_s\\ \mu c_rb_s+\frac{1-\mu}{2}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1-\mu}{2}b_rb_s\end{bmatrix}, \tag{2-13}$$

对于平面应变问题，须将上式中的E与μ分别用$\frac{E}{1-\mu^2}$与$\frac{\mu}{1-\mu}$来代替。

（5）单元结点荷载列阵$\{r\}^e$根据(1-12)式，平面问题的$\{r\}^e$可由下式计算：

$$\{r\}^e=[N]^T\{P\}+\iint_A[N]^T\{p\}t\,dx\,dy+\int_s[N]^T\{\bar{p}\}t\,dS, \tag{2-14}$$

其中t是单元的厚度，A是单元的面积，S是单元的周边。现在将(2-14)式中的三项分别予以考察。