高中数学典型错例讲练

TYPICAL MISTAKES IN MATHEMATICS LEARNING

湖北教育出版社

南秀全◇主编

TYPICAL
MISTAKES
IN
MATHEMATICS
LEARNING

高中数学典型错例讲练

CUO LI

GAOZHONG SHUXUE DINGXING

JIANGLIAN

南秀全◇主编

编者 吴远伦 陈有功 宋春雨 南 山
余 石 金大洲 纪尚念 方久平

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学典型错例讲练/南秀全等编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001

ISBN 7-5351-2950-1

Ⅰ.高… Ⅱ.南… Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634-605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 026836 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015 电话:83625580

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷　　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32　　1 插页 19 印张
版 次:2001 年 5 月第 1 版　　2001 年 9 月第 2 次印刷
字 数:471 千字　　印数:5 001—10 000

ISBN 7-5351-2950-1/G·2389　　定价:21.00 元

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

例1 设 $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in R\}$，$N=\{y\mid y=x+1,x\in R\}$，则 $M\cap N$ 等于(　　).

A. $\{(0,1),(1,2)\}$　　B. $\{(0,1)\}$

C. $\{(1,2)\}$　　D. $[1,+\infty)$

错解 解方程组 $\begin{cases}y=x^2+1,\\y=x+1.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=1;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

故选 A.

错因 由于 M、N 都是单变元素表示的集合，所以 M、N 都是数集，$M=[1,+\infty)$，$N=(-\infty,+\infty)$，并不是实数对 (x,y) 表示的元素所对应的平面点集 .

讲评 $\because M=[1,+\infty)$，$N=(-\infty,+\infty)$.

$\therefore M\cap N=[1,+\infty)$，故选答案 D.

启示 解答集合问题，首先应识别集合是数集还是点集，如本题改为：设 $M=\{(x,y)\mid x^2+1,x\in R\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+1,x\in R\}$，则 M、N 的交集为 A.

例2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x\mid p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围 .

错解 由 $x^2-3x-10\leqslant 0$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 5$. 欲使 $B\subseteq A$，只须 $\begin{cases}-2\leqslant p+1,\\2p-1\leqslant 5.\end{cases}$ 得 $-3\leqslant p\leqslant 3$.

$\therefore p$ 的取值范围是 $-3 \leqslant p \leqslant 3$.

错因 上述解答忽略了“空集是任何集合的子集”这一结论．即 $B=\varnothing$ 时，也符合题设．

讲评 ① 当 $B \neq \varnothing$ 时，即 $p+1 \leqslant 2p-1 \Rightarrow p \geqslant 2$. 由 $B \subseteq A$ 得：

$\begin{cases}-2 \leqslant p+1, \\ 2p-1 \leqslant 5.\end{cases}$ 得 $-3 \leqslant p \leqslant 3$.

$\therefore 2 \leqslant p \leqslant 3$.

② 当 $B=\varnothing$ 时，即

$p+1>2p-1$，得 $p<2$.

综合①、②知：$p \leqslant 3$.

$\therefore p$ 的取值范围是 $p \leqslant 3$.

启示 从上述解答中应使我们认识到：解决有关 $A \cap B=\varnothing$、$A \cup B=\varnothing$、$A \subseteq B$ 等集合问题时，容易忽视空集的情形而出现漏解，这需要在解题过程中多角度审视和推敲．

例3 若 $A=\{0,1\}$，$B=\{x \mid x \subseteq A\}$，则 A 与 B 的关系为______．

错解 由于 $B=\{\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing\}$，又 A、B 之间是集合与集合之间的关系．

$\therefore A$ 与 B 的关系为 $A \subset B$.

错因 从 $B=\{\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing\}$ 中可以看到集合 B 中的元素也是集合，其中 A 就是集合 B 的一个元素，因此 A、B 之间的关系是从属关系．

讲解 $\because A=\{0,1\}$，$B=\{x \mid x \subseteq A\}$，

$\therefore B=\{\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing\}$，即 A 是 B 中一元素，

$\therefore A \in B$.

启示 根据集合中元素具有任意性，集合的元素也可能是一个集合，本题就是一特例．

例4 设 S、T 是两个非空集合，且 $S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，令 $x=S\cap T$，那么 $S\cup x$ 等于（　　）

A. x　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. S

错解 $\because x=S\cap T$，$\therefore S\cup x=T$，

$\therefore$ 答案选 B.

错因 $\because S$、T 是两个非空集合，且 $S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，

$\therefore S$ 与 T 的关系用文氏图可能为图 1－1 或图 1－2 所示，无论哪种情况，不可能有 $S\cup x=T$.

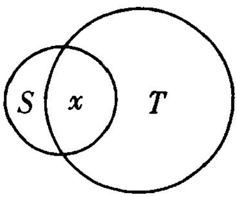
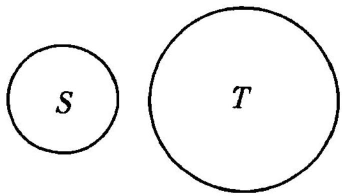


图 1－1



$x=\varnothing$

图 1－2

讲评 解法一：从图 1－1、图 1－2 中知 $S\cup x=S$.

解法二：$\because x=S\cap T$，S、T 为非空集合，且 $S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，

$\therefore x\subset S$，$\therefore S\cup x=S$.

因此选答案 D.

启示 在较难识别集合与集合间的关系时，可利用文氏图，画出符合题意的所有可能的情况，比较直观地得出结论．

例5 设 $A=\{-1,a\}$，$B=\{1,|a|\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围．

错解 $\because |a|\neq -1$，又由 $A\cap B\neq\varnothing$，知 $a=1$ 或 $a=|a|$，$\therefore a\geqslant 0$.

错因 当 $a=1$ 时，$|a|=1$，B 集合中出现了两个重合的元素．

讲评 $\because |a|\neq -1$，又由 $A\cap B\neq\varnothing$ 可知，$a=1$ 或 $a=|a|$，但当 $a=1$

时，B 中有两个重复元素，根据元素的互异性，实数 a 的取值范围是 $a\geqslant 0$ 且 $a\neq 1$.

启示 对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的，因此集合中的元素是没有重复的，在表示一个集合或由已知条件求集合的元素时，要注意用元素的互异性进行检验，以便得到一个准确的答案.

例6 设 $A=\{x\mid x=2+n\sqrt{2},n\in Z\}$，若 $a\in A$，$b\in A$，试判断：$\frac{a}{b}\in A(b\neq 0)$ 是否成立.

错解 设 $a=2+n_1\sqrt{2}$，$b=2+n_2\sqrt{2}$，n_1、n_2 均属于 Z，则：

$$\frac{a}{b}=\frac{2+n_1\sqrt{2}}{2+n_2\sqrt{2}}=\frac{(2+n_1\sqrt{2})(2-n_2\sqrt{2})}{(2+n_2\sqrt{2})(2-n_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(4-2n_1n_2)+(2n_1-2n_2)\sqrt{2}}{4-{n_2}^2}$$

$\therefore \frac{a}{b}\in A$ 成立.

错因 $\frac{4-2n_1n_2}{4-n_2^2}$ 与 $\frac{2n_1-2n_2}{4-2n_2^2}$ 不一定属于 Z，而上面解答错误地把它们当成 Z，由此得出错误的判断.

讲评 设 $a=2+n_1\sqrt{2}$，$b=2+n_2\sqrt{2}$，$n_1\in Z$，$n_2\in Z$，则 $\frac{a}{b}=\frac{2+n_1\sqrt{2}}{2+n_2\sqrt{2}}$

$$=\frac{(2+n_1\sqrt{2})(2-n_2\sqrt{2})}{(2+n_2\sqrt{2})(2-n_2\sqrt{2})}=\frac{2(2-n_1n_2)+2(n_1-n_2)\sqrt{2}}{4-2n_2^2}.$$

$\because \frac{4-2n_1n_2}{4-2{n_2}^2}$ 与 $\frac{2n_1-2n_2}{4-2n_2^2}$ 不一定是整数，从而它不符合集合中元素的确定性这一特征，故 $\frac{a}{b}\in A$ 不成立。

启示 任何一个集合中的元素都具有确定性，即元素 a 与集合 A 间只有两种关系：$a\in A$ 和 $a\notin A$.

例7 已知 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid 2^{x^2+2x-8}=1\}$，且 $A\cap B\supseteq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 与集合 A.

错解 将已知条件简化为：

$B=\{x\mid x=2$ 或 $x=3\}=\{2,3\}$，$C=\{-4,2\}$.

$\because A\cap C=\varnothing$，$\therefore 2\notin A$，$-4\notin A$，又 $\because A\cap B\supseteq C$，即 $A\cap B\neq\varnothing$.

$\therefore 3\in A$，即 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的一个根，于是由 $9-3a+a^2-19=0$ 得 $a=-2$ 或 $a=5$. 当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}=B$，这与 $2\notin A$ 矛盾；当 $a=-2$ 时，$A=\{3,-5\}$.

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时，集合 $A=\{3,-5\}$.

错因 解答不全面，上述解答忽视了 $A=\varnothing$ 这一情况，因为 $A=\varnothing$ 时，"$\varnothing\cap B\supseteq\varnothing$，$\varnothing\cap C=\varnothing$"也满足题意 .

讲评 将已知条件简化为：

$B=\{2,3\}$，$C=\{-4,2\}$.

(1)当 $A\neq\varnothing$ 时，$\because A\cap C=\varnothing$，$\therefore 2\notin A$，$-4\notin A$，

又 $\because A\cap B\supseteq A$，即 $A\cap B\neq\varnothing$，

$\therefore 3\in A$，即 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的一个根，

于是有：$9-3a+a^2-19=0$ 得 $a=-2$ 或 $a=5$.

当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}=B$，这与 $2\notin A$ 矛盾，$\therefore a=5$ 舍去；

当 $a=-2$ 时，$A=\{3,-5\}$ 即为所求 .

(2)当 $A=\varnothing$ 时，也满足 $A\cap B\supseteq C$，$A\cap C=\varnothing$，

$\therefore \Delta=-3a^2+76<0$，解之得 $a<-\dfrac{2\sqrt{57}}{3}$ 或 $a>\dfrac{2\sqrt{57}}{3}$.

综合(1)、(2)知：当 $a=-2$ 时，$A=\{2,3\}$；当 $a<-\dfrac{2\sqrt{57}}{3}$ 或 a

$>\frac{2\sqrt{57}}{3}$时，$A=\varnothing$.

启示 由于集合、集合中的元素、集合的运算等有许多重要的性质和特征，如元素的确定性、互异性和无序性等等，使得每一个较为综合的集合问题中都隐含了许多易于忽视的约束条件，而这些条件在解题过程中起着至关重要的作用．因此，在解集合问题时应养成“前思”、“后想”的习惯，即在解题前想想某个集合有哪些性质？是否为空集？等等；在解答完题目后再思考一下，求出的集合有没有违反性质的？是否遗漏了？等等．这样才能防止出现错误的解答．

例 8 设集合 $M=\{(x,y)\mid\frac{y-3}{x-2}=a+1\}$，集合 $N=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，且 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的值．

错解 集合 $M=\{(x,y)\mid(a+1)x-y=2a-1\}$，要使 $M\cap N=\varnothing$，就是使方程组：

$\begin{cases}(a+1)x-y=2a-1\\(a^2-1)x+(a-1)y=15\end{cases}$无解，

$\therefore a$ 满足条件$\frac{a+1}{a^2-1}=\frac{-1}{a-1}\neq\frac{2a-1}{15}$

解之得：$a=-1$.

错因 上面解答一开始就把集合 M 化为$\{(x,y)\mid(a+1)x-y=2a-1\}$．实际上题给集合与它是不等价的，应补上 $x\neq2$、$y\neq3$ 的限制条件．

讲评 $\because M=\{(x,y)\mid\frac{y-3}{x-2}=a+1\}=\{(x,y)\mid(a+1)x-y=2a-1$，且 $x\neq2$、$y\neq3\}$，$N=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$

$$=\begin{cases}\varnothing & (a=1),\\ y=-(a+1)x+\dfrac{15}{a-1} & (a\neq 1).\end{cases}$$

要使 $M\cap N=\varnothing$,则有以下三种可能:

(i) $a=1$ 时,$N=\varnothing$,满足 $M\cap N=\varnothing$.

(ii)当 $a\neq 1$ 时,有 $\dfrac{a+1}{a^2-1}=\dfrac{-1}{a-1}\neq\dfrac{2a-1}{15}$,

得 $a=-1$.

(iii)当 $a\neq\pm 1$ 时,N 恰有解 $x=2$、$y=3$. 即 $3=-(a+1)\cdot 2+\dfrac{15}{a-1}$. 解之,得 $a=\dfrac{5}{2}$ 或 $a=-4$.

综上,得 $a=\pm 1$ 或 $a=\dfrac{5}{2}$ 或 $a=-4$.

启示 本题如果应用数形结合的思想,那么我们对题意的理解可以更直观些,把集合 M 和 N 理解为坐标平面上的点集,那么 M 表示除去点(2,3)的直线 $m:y=(a+1)x-2a+1$;集合 N 在 $a=1$ 时是空集,当 $a\neq 1$ 时是直线 $n:y=-(a+1)x+\dfrac{15}{a-1}$,那么,以下三种情况均能使 $M\cap N=\varnothing$.

①$N=\varnothing$;

②直线 $m\,/\!/\,n$;

③直线 n 恰巧过点(2,3)又不与 m 重合.

综合以上三种情况,就能得到本题的正确解答.

在集合问题中,一般地涉及到点集若充分地利用数形结合的思想,使问题变得直观明了.

例 9 对自然数 k,用 I_k 表示区间$(2k-1,2k+1]$,试求集合 $M_k=\{a|$ 使方程 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

错解 设 x_1、x_2 是所给方程的两实根,依题设有:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}\Delta=(4k+a^2)-16k^2>0\\ 2k-1<x_1\leqslant 2k+1\\ 2k-1<x_2\leqslant 2k+1\end{cases}\Rightarrow$$

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}a(a+8k)>0\\ 4k-2<x_1+x_2\leqslant 4k+2\\ (2k-1)^2<x_1\cdot x_2\leqslant(2k+1)^2\end{cases}$$

运用韦达定理即有：

$$\begin{cases}4k-2<4k+a\leqslant 4k+2,\\ (2k-1)^2<4k^2\leqslant(2k+1)^2,\text{解得 } 0<a\leqslant 2.\\ a(a+8k)>0.\end{cases}$$

故 $M_k=\{a\,|\,0<a\leqslant 2\}$.

错因 取 $a=1$ 代入原方程；则有：

$x_1=\frac{1}{2}(4k+1+\sqrt{8k+1})>2k+1$，$x_2=\frac{1}{2}(4k+1-\sqrt{8k+1})\leqslant 2k-1$，于是原方程在 I_k 上无实根，可见解答有误。显然，原题是求能“使方程 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$ 在 I_k 上有两个不相等的实数根”的 a 值，即不等式组(Ⅰ)的成立的充要条件．而上述解答中(Ⅰ)和(Ⅱ)不是同解的，(Ⅱ)只是(Ⅰ)成立的必要条件，即能使(Ⅱ)成立的 x_1、x_2 不能确保(Ⅰ)的成立，因此(Ⅱ)确定的$0<a\leqslant 2$不能保证(Ⅰ)成立．

讲评 如图 1－3，抛物线 $f(x)=x^2-(4k+a)x+4k^2$ 与 x 轴的相异两个交点都落在 I_k 内的充要条件是：

$$\begin{cases}f(2k+1)\geqslant 0\\ f(2k-1)>0\\ \Delta=a(a+8k)>0\\ 2k-1<\frac{1}{2}(4k+a)<2k+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2k+1}\\ a<\frac{1}{2k-1}\\ a>0\text{ 或 }a<-8k\\ -2<a<2\end{cases}$$

由此得 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}(R\in N)$.

故 $M_k=\{a\mid 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}(k\in N)\}$.

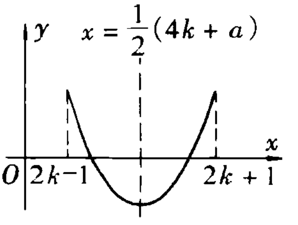


图 1－3

启示 一般地,"求 A,使 B 成立"型题,就是要求使 B 成立的充要条件 A,即 $B\Leftrightarrow A$,若从 B 出发只顾及到 $B\Rightarrow A$ 而忽视了另一面,其结果将导致"解集"的扩大而产生增解 .

例 10 以自然数为元素的集合 S,满足命题"若 $x\in S$,则 $8-x\in S$",写出所有元素个数:

(1)为 1;(2)为 2 的集合 S.

错解 (1)设 $S=\{a\}$,$\because a\in S,8-a\in S$,$\therefore a=8-a$,得 $a=4$,$\therefore S=\{4\}$.

(2)$\because x\in N$,$\therefore x\geqslant 1$,又 $8-x\in S\subseteq N$,$\therefore 8-x\geqslant 1$,得 $x\leqslant 7$,$\therefore x=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.从中任取两个数组成 S,得 S 共有 21 个 .

错因 上面解答把元素个数为 2 的集合 S 当作从 $1,2\cdots 7$ 中任取两个就可组成 S,又错误把求 S 当作求 S 的个数 .

讲评 (1)当 S 只有一个元素时,设 $S=\{x\}$.

$\because x\in S$ 时,$8-x\in S$.

$\therefore 8-x=x$ 得 $x=4$.

$\therefore$元素个数为 1 的集合 S 只有一个,$S=\{4\}$.

(2)当 S 的元素个数为 2 时,设 $S=\{x_1,x_2\}(x_1\neq x_2)$.

$\because x_1\in S$ 时,$8-x_1\in S$.

$\therefore 8-x_1=x_2$,则 $x_1+x_2=8$,且 x_1、$x_2\in N$.

$\therefore$元素个数为 2 的集合 S 共有 3 个,它们是$\{1,7\}$,$\{2,6\}$,$\{3,5\}$.

启示 理解"若 $x\in S$,则 $8-x\in S$"是解此题的关键,不过,有兴趣的同学可进一步思考,满足题设条件的 S 一共有多少个? S 中最多有几个元素?

例 4 已知函数 $f(x)=\lg(x^2+ax+b)$ 的定义域为集合 A,函数 $g(x)=\sqrt{kx^2+4x+k+3}$ 的定义域为集合 B,若 $\overline{A}\cap B=B$,$\overline{A}\cup B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$. 求 a、b 的值及 k 的取值范围 .

错解 $A=\{x\mid x^2+ax+b>0\}$,$B=\{x\mid kx^2+4x+k+3\geqslant 0,k\in R\}$.

$\because \overline{A}\cap B=B$,$\therefore B\subseteq\overline{A}$.

又 $\overline{A}\cup B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$,$\therefore \overline{A}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$.

$\therefore A=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$,即不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集是 $x<-2$ 或 $x>3$.

$\therefore a=-1,b=-6$.

若 $k\geqslant 0$ 时,显然 $B\not\subseteq\overline{A}$,故 $k<0$.

由 $B\subseteq\overline{A}$ 知,方程 $F(x)=kx^2+4x+k+3=0(*)$无实根或两实根都在区间$[-2,3]$内,因此有:

$$\begin{cases}k<0\\ \Delta=16-4k(k+3)<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}k<0\\ \Delta=16-4k(k+3)\geqslant 0\\ F(-2)=5k-5\leqslant 0\\ F(3)=10k+15\leqslant 0\\ -2\leqslant -\dfrac{2}{k}\leqslant 3\end{cases}$$

解得 $k<-4$ 或 $-4\leqslant k\leqslant -\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$所求 k 的取值范围是$(-\infty,-\dfrac{3}{2}]$.

错因 上述解答表面上看是滴水不漏,事实上是对函数概念理解不清,函数定义:"设映射 $f:A\to B$ 中的 A、B 是两个非空集合……"

强调定义域和值域均是非空集合，而上面解答由 $B\subseteq\overline{A}$ 得方程（*）无实根，认为 B 可以为空集因而导致解题错误．

讲评 $A=\{x\mid x^2+ax+b>0\}$，$B=\{x\mid kx^2+4x+k+3\geqslant 0,k\in R\}$．

$\because \overline{A}\cap B=B$，$\therefore B\subseteq\overline{A}$．

又 $\overline{A}\cup B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$\therefore \overline{A}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$．

$\therefore A=\{x\mid x<-2$ 或 $x>3\}$，即不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集是 $x<-2$ 或 $x>3$．

$\therefore \begin{cases}-a=-2+3,\\ b=(-2)\cdot 3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-6.\end{cases}$

若 $k\geqslant 0$，显然 $B\not\subseteq\overline{A}$，故 $k<0$．

由 $B\subseteq\overline{A}$ 知，方程 $F(x)=kx^2+4x+k+3=0$ 两实根都在区间 $[-2,3]$ 内，因此，有：

$$\begin{cases}k<0\\ \Delta=16-4k(k+3)\geqslant 0\\ F(-2)=5k-5\leqslant 0,F(3)=10k+15\leqslant 0\\ -2\leqslant -\dfrac{2}{k}\leqslant 3\end{cases}$$

解之得：$-4\leqslant k\leqslant -\dfrac{3}{2}$．

$\therefore$ 所求 k 的取值范围 $[-4,-\dfrac{3}{2}]$．

启示 求函数定义域或利用函数定义域解题时，一定要注意函数定义域是非空的集合．

例 2 如图 1－4，已知，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30^\circ$，其周长为 16，中位线为 EF，高线为 AH．

求 $EF(y)$ 与高线 $AH(x)$ 之间的函数关系式，并求出 x 的取值范围．

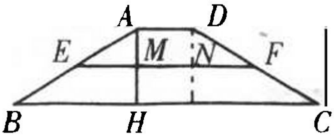


图 1－4

错解 设 $AH=x$，$EF=y$.

$\because \angle ABC=30°$，$\therefore AB=CD=2x$.

又$\because$等腰梯形周长为 16，

即 $AB+CD+BC+DA=16$，

又$\because y=EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$，

$\therefore 4x+2y=16$，$y=8-2x$.

$\because x>0$，$y>0$，即 $8-2x>0$，得 $x<4$.

$\therefore 0<x<4$.

错因 上面解答错在仅仅考虑了函数值 $y>0$，而没有对 y 有所限制，例如 $y>16$，就不能构成梯形.

讲评 $\because AH>0$，$AB>0$，$AD>0$，EF 为中位线，

又$\because AD=EF-2EM=EF-2\cdot\frac{1}{2}BH=y-BH$，

又$\because \angle ABC=30°$，$BH=AH\cdot \mathrm{ctg}30°=\sqrt{3}x$.

$\therefore AD=y-\sqrt{3}x$，又 $y=8-2x$.

$$\therefore \begin{cases} x>0 \\ 8-2x-\sqrt{3}x>0 \end{cases}$$

则 $0<x<16-8\sqrt{3}$.

即所求的函数关系式为 $y=8-2x(0<x<16-8\sqrt{3})$.

启示 根据实际问题建立函数的解析式时，要注意自变量的实际意义，给出准确的定义域.

例 13 设函数 $y=f(x)$的定义域是$[2,3]$，求函数 $y=f(x^2)$的定义域.

错解 $\because 2\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore 4\leqslant x^2\leqslant 9$.

$\therefore$函数 $y=f(x^2)$的定义域是$[4,9]$.

错因 $\because$函数 $y=f(x)$的定义域是$[2,3]$，$\therefore$函数 $y=f(x^2)$中的变量

x^2 应属于集合[2,3]而上面解答求出了 x^2 的值域，这是由于对函数定义域的概念理解不深带来的后果．

讲评 由 $2\leqslant x^2\leqslant 3$，得 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$．即 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$．

∴函数定义域是 $[-\sqrt{3},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{3}]$．

启示 求复合函数 $F(x)=f[g(x)]$ 的定义域时，既要考虑 $g(x)$ 本身有意义，又要考虑 $g(x)$ 必须在 $f(x)$ 的定义域内取值．

例 14 当 k 为何值时，函数 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是一切实数？

错解 由 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为一切实数可知，分母 $kx^2+4kx+3\neq0$ 对一切实数 x 恒成立．

$\therefore\Delta=(4k^2)-4k\cdot3<0$，解之得 $0<k<\dfrac{3}{4}$．

∴当 $0<k<\dfrac{3}{4}$ 时，函数定义域为 R．

错因 关于 x 的方程 $kx^2+4kx+3=0$ 中含有参数 k，由于 x^2 项的系数为 k，所以当 $k=0$ 时，它不是一元二次方程，而此时 $3\neq0$ 恒成立．

讲评 由 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为一切实数，可得分母 $kx^2-4kx+3\neq0$ 对 $x\in R$ 恒成立．

(i)当 $k=0$ 时，则 $3\neq0$ 成立．

(ii)当 $k\neq0$ 时，$\Delta<0$，解得 $0<k<\dfrac{3}{4}$．

综合(i)(ii)知，当 $0\leqslant k<\dfrac{3}{4}$ 时，y 的定义域是 R．

启示 此类题一般认为 $kx^2-4kx+3$ 就是二次三项式，而忽视了二次项系数为 0 这一特殊情况，致使答案不完整．