研究生教材 研究生教材

高等量子力学 II

白铭复　陈健华　田成林　编著

2

■ 研究生教材 ■

白铭复 陈健华 田成林 编著

高等量子力学 II

国防科技大学出版社

[湘]新登字 009 号

内 容 简 介

本书是作者另一本书——《高等量子力学 I》的姊妹篇，讲述相对论性量子理论。第一章讲述相对论量子力学，第二章讲述场的量子理论的基本框架，第三章讲述相互作用，主要是讨论电磁相互作用理论及其简单的应用。书末附有与正文内容密切配合的习题。本书的特点是内容简明精练，结构严谨，物理图像清晰，数学处理简捷，便于初学者学习。本书可作为物理专业及有关专业研究生的高等量子力学课或量子电动力学课的教材或参考书，也可供高年级本科生、教师和科研工作者参考。

高等量子力学 II

白铭复 陈健华 田成林 编著

责任编辑 徐 飞
责任校对 朱宝龙

国防科技大学出版社出版发行
（邮码：410073 电话：4436564）
湖南省新华书店经销
国防科技大学印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32 印张：7.5 字数：188 千字
1994 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数：1～1100 册

ISBN 7-81024-307-1
O·38 定价：8.00 元

前　言

目前,“高等量子力学”已被列入许多物理类专业研究生的教学计划中，主要介绍在本科生的“量子力学”课程中没有涉及或讲得不够，而在研究生的专业学习中所需要的有关内容。这部分内容按性质又可分为两个部分，一部分仍属于非相对论性的量子力学，包括基本原理的表述形式方面的某些普遍理论；另一部分则为相对论性的量子理论,包括相对论量子力学和场的量子理论。在《高等量子力学Ⅰ》中介绍了前一部分的内容，本书将介绍后一部分的内容。由于两本书在内容上的相对独立性，Ⅱ既可以作为Ⅰ的后续课程来学，也可以在本科生的“量子力学”课程的基础上直接阅读。

关于相对论性量子理论，已有很多内容丰富、材料详尽的专著,但适用于作非理论物理专业的研究生教材的,目前尚不多见。为了适合这方面的需要，本书在取材、叙述方式、论证方法等方面，都更多地注意了教学上的要求和特点，力求简明清晰，便于自学，便于读者在较短的时间内准确地掌握理论的精髓和应用的方法。为此,不得不略去了量子场论中的某些专题及相关的应用,例如重整化理论、色散关系、束缚态问题等。

全书分为三章。第一章为相对论波动方程,介绍了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程,其中对方程的协变性、与非相对论波动方程的关系、Dirac 双线性协变量、氢原子四分量波函数等均作了较详细的讨论。第二章为场的量子化，首先对经典场与量子场的关系、对称性与守恒定律、场的正则量子化方案进行了一般性的讨论，然后分别讨论了标量场、旋量场和电磁场的量子化。其中对非相对论性的 Schrödinger 场的量子化问题也作了充分的讨论，

以便读者能更好地理解相对论量子场和非相对论量子场（非相对论量子力学中的二次量子化方法）之间的关系。为了保持协变形式，对电磁场的处理采用了 Gupta 和 Bleuler 引入的不定度规方法。第三章为量子场的相互作用，简略地讨论了除引力之外的三种相互作用；较详细地介绍了 S 矩阵，微扰论，Feynman 图以及量子电动力学中的 Feynman 规则；在应用方面，主要介绍了量子电动力学中的一些典型实例，其中包括电子间的 Breit 作用。对于截面的计算，采用了较为简单的将 4 阶 Dirac 矩阵还原为 2 阶 Pauli 矩阵的方法，也使得公式的物理意义较为鲜明。

书中使用的单位为自然单位：$c=\hbar=m_e=1$.

四维时空中的张量的分量脚标用希腊字母表示（如 A_μ，$T_{\mu\nu}$），取值 1，2，3，4. 前三个值为空间的直角坐标分量，第四个值为时间坐标（it）分量。三维空间中的张量分量脚标用拉丁字母表示（如 A_i，T_{ij}），取值 1，2，3. 四维矢量的缩写记号为分量字母去掉下标，而三维矢量在书中的缩写记号为分量字母去掉下标并使用黑体字。例如：

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,y,z,it)=(\boldsymbol{x},it)$$

$$\partial=(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$=(\boldsymbol{\partial},\ -i\partial_t)=(\nabla\ ,\ -i\partial/\partial t)$$

对张量指标的求和运算采用习惯记法，用重复指标表示（Einstein 规则）。两个四维矢量的内积简记作 $A\cdot B$，即：

$$A\cdot B\equiv A_\mu B_\mu=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+A_4B_4$$

复共轭运算用“$*$”表示，厄米共轭运算用“$+$”表示。

况蕙孙教授审阅了本书的书稿，在此表示衷心的感谢。

作　者

目　录

第一章　相对论波动方程

以非相对论性力学为经典对应（经典极限）的量子力学，自然也是非相对论性的，它只能描述速度远小于光速的粒子的行为。为了概括高速范围的微观现象，必须考虑相对论效应，这就需要建立相对论性的量子理论。

在量子力学的诸原理当中，只有波动方程（Hamilton 算子）的形式涉及到是否满足相对论协变性要求的问题。例如在 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi$$

当中，能量的动能和势能部分显然都是非相对论性的：前者为 $T=p^2/2m$，后者为瞬时相互作用势。因而所写的方程也是非相对论波动方程（$v\ll c$）。由此可见，为了建立相对论性的量子理论，初步的尝试，可采取以下做法：不改变量子力学的其他基本原理，而用相对论性的波动方程来取代非相对论波动方程。

所寻求的相对论波动方程显然必须满足以下条件：

1）其经典对应为相对论力学。例如，自由粒子的能量和动量必须满足相对论力学的关系

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$$

2）具有相对论协变性；

3）$v\ll c$ 时，退化为已知的非相对论 Schrödinger 方程；

4）要求微分方程是线性的。

照以上思路建立起来的初步的相对论性量子理论，通常被称为相对论量子力学。本章将讨论描写自旋为零和自旋为 1/2 的两

类粒子的相对论波动方程，即 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程，并讨论后者对电子的应用，以及这种初步理论的内在困难和局限性。

§1 自由粒子的波动方程

1.1 Klein-Gordon 方程

自由粒子的非相对波动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi \tag{1.1}$$

它可以由非相对论经典力学中的能量和动量的关系

$$E=\boldsymbol{p}^2/(2m) \tag{1.2}$$

经代换

$$E\rightarrow i\partial/\partial t \qquad \boldsymbol{p}\rightarrow -i\nabla \tag{1.3}$$

然后作用于波函数上得到。

在相对论力学中，能量和动量的关系不是式(1.3)，而是

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2 \tag{1.4}$$

或

$$p_\mu p_\mu=-m^2 \tag{1.5}$$

其中 p_μ 是能量动量四维矢量 p 的分量：

$$p=(\boldsymbol{p},\ iE) \tag{1.6}$$

用四维符号代换关系式(1.3)可简单地写作

$$p_\mu\rightarrow -i\partial_\mu \tag{1.7}$$

现在由相对论公式(1.5)出发，经代换(1.7)式后作用于波函数上，得到一个新的波动方程

$$(\partial^2-m^2)\psi=0 \tag{1.8}$$

其中

$$\partial^2=\partial_\mu\partial_\mu=\nabla^2-\partial^2/\partial t^2 \tag{1.9}$$

方程(1.8)显然是线性的，对应于相对论力学；后面（§5）还

将证明，它的非相对极限正是方程(1.1). 因为 ∂^2 是四维标量，即在 Lorentz 变换下不变：

$$\partial'^2 = \partial^2$$

故方程(1.8)的不变性只需由波函数的不变性来保证。换言之，波动方程(1.8)的相对论协变性，要求波场 $\psi(x)$为 Lorentz 标量场：

$$\psi'(x') = \psi(x) \tag{1.10}$$

以上讨论表明，式(1.8)是(1.1)的一个合理的相对论推广。这个相对论性波动方程是由 O. Klein，W. Gordon，E. Schrödinger 分别独立给出的（1926 年），一般称为 Klein-Gordon 方程，可简称 K-G 方程。有的学者也称之为相对论 Schrödinger 方程。

1.2 Dirac 方程

方程(1.1)的另一种相对论推广是由 Dirac 给出的(1928 年)，被称为 Dirac 方程。

在方程(1.1)中，时间变数和空间变数是明显不对称的，对前者是一阶导数，对后者则是两阶导数。而在相对论协变的方程中，时空变数应以对称的形式出现，或者对时间的导数与对空间的导数一样，也是两阶的；或者对空间的导数成为与对时间的导数一样，都是一阶的。K-G 方程属于前一种情况，Dirac 考虑了后一种情况。

在一般情形下，波函数除时空变数外，还可能依赖于粒子的内禀参数，例如自旋。由于内禀量子数通常只取有限个分立值，波函数对它们的依赖关系可用波函数的有限个分量来表示。例如与其第一个本征值相应的波函数可表为波函数的第一个分量$\psi_1(x)$，因而，一般可假定波函数具有 n 个分量。

n 分量的波函数所满足的常系数线性一阶齐次偏微分方程（组）的一般形状为

$$c_\mu \partial_\mu \psi + c_0 \psi = 0 \tag{1.11}$$

其中 ψ 为 n 分量波函数的 $n\times 1$ 矩阵，$c_\mu(\mu=1,2,3,4)$和 c_0 为 $n\times$

n 的常数（与时空变数无关）矩阵。方程必须是常系数的，是由于方程对时空平移不变性（即时空均匀性）的要求。

另一方面，由于与建立 K-G 方程时同样的考虑，要求 ψ 的每个分量，因而整个 ψ 满足方程(1.8)：

$$(\partial^2 - m^2)\psi = 0 \tag{1.12}$$

这个方程限制了方程(1.11)中的待定的常数矩阵。

为了与(1.12)式对比，需将(1.11)式化为二阶微分方程。为此，以$(c_\mu\partial_\mu - c_0)$作用于式(1.11)，得到

$$(c_\mu c_\nu \partial_\mu \partial_\nu + c_\mu c_0 \partial_\mu - c_0 c_\mu \partial_\mu - c_0^2)\psi = 0$$

其中

$$c_\mu c_\nu \partial_\mu \partial_\nu = c_\mu^2 \partial_\mu^2 + \sum_{\mu<\nu} (c_\mu c_\nu + c_\nu c_\mu) \partial_\mu \partial_\nu$$

可见，要使上面的方程与式(1.12)一致，必须有

$$\begin{cases} c_\mu^2 = 1 \\ c_\mu c_\nu + c_\nu c_\mu = 0, \ \mu \neq \nu \\ c_\mu c_0 - c_0 c_\mu = 0, \ c_0^2 = m^2 \end{cases}$$

或

$$\left.\begin{aligned} & c_\mu c_\nu + c_\nu c_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \\ & c_\mu c_0 - c_0 c_\mu = 0, \ c_0^2 = m^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

其中已将单位矩阵简记为数 1.

可见，为了使(1.11)式能够成为一种相对论波动方程，其中的五个待定常数矩阵必须满足(1.13)式。此外，为了使(1.11)式给出的 Hamiltonian 是厄米算子，要求这些矩阵也是厄米的。

按以下思路不难做出(1.13)式的一组解。首先，$c_\mu^2=1$ 表明 4 个 c_μ 矩阵的本征值都是±1；又 c_μ 之间的反对易关系要求每个 c_μ 的迹都是零：

$$\mathrm{T_r} c_\mu = \mathrm{T_r} c_\mu c_\nu^2 = \mathrm{T_r} c_\nu c_\mu c_\nu = - \mathrm{T_r} c_\nu^2 c_\mu = - \mathrm{T_r} c_\mu$$

即每个 c_μ 的本征值之和为零。从而，每个 c_μ 的本征值中的$+1$ 和

-1 重复的次数必相同。因此，c_μ 的维数，即 ψ 分量的个数 n，必为偶数。但 $n=2$ 的情况是被排除的。在 2×2 的厄米矩阵中求解方程(1.13)中的 c_μ，令某一个已对角化，可解得另两个矩阵，三者形成 Pauli 矩阵，但不存在与前三者反对易且平方为 1 的第四个矩阵，所以必须考查 4×4 的矩阵解。在 c_4 为对角的表象中，将所有 c_μ 都分割为四个 2×2 的子块，代入方程(1.13)并利用厄米性条件，可解得一组解 $c_\mu=\gamma_\mu$：

$$\gamma_l=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_l\\ i\sigma_l & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.14}$$

其中 σ_l 为 Pauli 矩阵

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1.15}$$

γ_4 中的 1 为 2×2 的单位矩阵。Pauli 矩阵具有如下常用的代数性质：

$$\sigma_l\sigma_j=\delta_{lj}+i\epsilon_{ljk}\sigma_k \tag{1.16}$$

$$[\sigma_l,\ \sigma_j]_+=2\delta_{lj} \tag{1.17}$$

$$[\sigma_l,\ \sigma_j]=2i\epsilon_{ljk}\sigma_k \tag{1.18}$$

$$\sigma_l^+=\sigma_l \tag{1.19}$$

容易验证，γ 矩阵满足

$$[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu]_+\equiv\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu} \tag{1.20}$$

$$\gamma_\mu^+=\gamma_\mu \tag{1.21}$$

式(1.13)中的矩阵 c_0 与 γ_μ 对易，故只能是单位矩阵的倍数（直接计算或引用 Schur 引理），又 $c_0^2=m^2$，故 c_0 的解可取为单位矩阵的 m 倍：

$$c_0=m$$

将所得的 c_μ 和 c_0 代入式(1.11)，便得到了 Dirac 方程的协变形式：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{1.22}$$

其中 ψ 为四分量的波函数，已写成 4×1 的矩阵。以 γ_4 左乘式(1.22)，有

$$\left[\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_4\gamma_i\partial_i + m\gamma_4\right]\psi = 0$$

令

$$\alpha_l = i\gamma_4\gamma_l,\ \beta = \gamma_4 \tag{1.23}$$

上式可改写为

$$\left.\begin{aligned} & i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \\ & H = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m \end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

由式(1.20)和(1.21)易证

$$\left.\begin{aligned} & [\alpha_i,\ \alpha_j]_+ = 2\delta_{ij} \\ & [\alpha_i,\ \beta]_+ = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

$$\alpha_i^+ = \alpha_i,\ \beta^+ = \beta \tag{1.26}$$

可见四个 $\{\alpha_i,\ \beta\}$ 与四个 γ_μ 一样，都是平方为1（单位矩阵）的厄米矩阵，且互相反对易。将式(1.14)代入式(1.23)，可写出 α_i、β 在 β 对角化表象中的形式

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},\quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

式(1.24)是 Dirac 方程的 Hamilton 形式。

满足式(1.20)和(1.21)的 γ 矩阵的形式并不是唯一的。当从所取的表象变到另一表象时，γ 矩阵将经历一个相似变换

$$\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$$

γ_μ 与 γ_μ 是等价的，同样满足式(1.20)和(1.21)，S 是么正矩阵。关于 α_i、β 也有类似的情形。上面所取的使 $\gamma_4=\beta$ 为对角的特殊表象，称为 Pauli-Dirac 表象。

1.3 自旋

在《高等量子力学 I》中已经表明，粒子的角动量可由波函数在空间转动下的变换性质决定；反之，角动量算子也决定了波函数的转动性质。简言之，角动量算子是转动算子的生成元。自旋是粒子的内禀角动量，是与空间转动相伴随的内禀转动（变换波函数的分量）的生成元。若波函数 ψ 有 n 个分量（写为 $n\times1$ 矩阵），则自旋算子 $S_i(i=1,2,3)$ 可写为 $n\times n$ 矩阵。考虑一个空间转动操作，转轴沿矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向，转角为 $\alpha=|\boldsymbol{\alpha}|$. 若状态 ψ 经此转动后变为 ψ'，则有

$$\psi'(\boldsymbol{x}',\ t)=\exp(-i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\alpha})\psi(\boldsymbol{x},\ t) \tag{1.28}$$

其中 $\boldsymbol{x}'$ 为点 $\boldsymbol{x}$ 经此转动后变到的位置。自旋算子满足角动量的一般关系

$$[S_l,\ S_j]=i\varepsilon_{ljk}S_k \tag{1.29}$$

$$S_l^+=S_l \tag{1.30}$$

式(1.28)具体地给出了粒子的自旋与波函数（态矢）在空间转动下的变换性质的关系。由此，在已知波函数的变换性质时，即可写出粒子的自旋算子。例如，已知满足 K-G 方程的波函数为 Lorentz 标量，变换关系为式(1.10)．特别地，在空间转动下，式(1.10)化为

$$\psi'(\boldsymbol{x}',t)=\psi(\boldsymbol{x},t)$$

将上式与式(1.28)对照，得出

$$\boldsymbol{S}=0$$

由此得出结论：K-G 只能描述自旋为零的粒子。

再如，电磁场方程的协变性要求场的标、矢势$(\boldsymbol{A},\ i\varphi)$构成四维矢量。特别地，在空间转动下的变换关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}',t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\\ \varphi'(\boldsymbol{x}',t)=\varphi(\boldsymbol{x},t)\end{cases}$$

其中已假定所取的为无穷小转动，即 $\alpha=|\boldsymbol{\alpha}|$ 为无穷小的转角。由

简单的几何关系可知，此时有

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{x}$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 按同样的方式变换，即可写出 $\boldsymbol{A}$ 的上述变换关系。以分量形式写出的此关系为

$$\begin{cases} A_l'(\boldsymbol{x}') = A_l(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_{jlk}\alpha_j A_k(\boldsymbol{x}) \\ A_4'(\boldsymbol{x}') = A_4(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

对于无穷小转动，式(1.28)可写为

$$\psi_\mu'(\boldsymbol{x}') = \psi_\mu(\boldsymbol{x}) - i(S_j)_{\mu\nu}\alpha_j\psi_\nu(\boldsymbol{x}) \tag{1.31}$$

对比以上两式，得出电磁场的自旋矩阵

$$\left.\begin{aligned} (S_j)_{lk} &= - i\varepsilon_{jlk} \\ (S_j)_{4\mu} &= (S_j)_{\mu 4} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

或

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 的自旋为 $s=1$，φ 的自旋为 $s=0$. 由此得出结论：电磁场只能描写自旋为 1 和零的粒子（矢光子和标光子）。

在一般情况下，当已知波动方程时，由方程对空间转动的不变性（空间各向同性），可以确定波函数的转动变换的生成元，从而得出自旋矩阵。例如，对 Dirac 方程实施无穷小转动后，以(1.28)式代入，由方程的不变性便可得到 S_i 与 γ 矩阵的对易关系，从而解出自旋矩阵 S_i. 对于已写成 Hamilton 正则形式的波动方程，例如 Dirac 方程（1.24），所说的对易关系也可直接由总角

动量守恒（即 J 与 H 对易）的关系导出。

将式(1.24)代入

$$[S_l + L_l,\ H] = 0$$

注意到所有矩阵与空间的微分算子对易，以及

$$[L_l,\ p_j] = i\epsilon_{ljk} p_k$$

可得

$$[S_l, \alpha_k] p_k + [S_l, \beta] m + i\epsilon_{ljk} \alpha_j p_k = 0$$

此式是算子方程，作用于任一 ψ 都成立，这必须有

$$\left.\begin{aligned} [S_l,\ \alpha_k] &= i\epsilon_{lkj}\alpha_j \\ [S_l,\ \beta] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

由上式的第二式可解出

$$S_l = \begin{pmatrix} a_l & 0 \\ 0 & b_l \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

其中 a_l 和 b_l 为待定的 2×2 矩阵。代入(1.34)的第一式，又得

$$\begin{cases} a_l\sigma_k - \sigma_k b_l = i\epsilon_{lkj}\sigma_j \\ b_l\sigma_k - \sigma_k a_l = i\epsilon_{lkj}\sigma_j \end{cases}$$

两式相减，得

$$[a_l - b_l,\ \sigma_k]_+ = 0$$

2×2 矩阵$(a_l - b_l)$总可展为单位矩阵和三个 Pauli 矩阵的线性组合，代入上式并利用式(1.17)，可知此组合的 4 个系数全为零，故有

$$a_l - b_l = 0 \tag{1.36}$$

代回前方程中，得

$$[a_l,\ \sigma_k] = i\epsilon_{lkj}\sigma_j$$

将此式两边乘 2 后减去式(1.18)，得

$$[2a_l - \sigma_l,\ \sigma_j] = 0$$

但与三个 Pauli 矩阵都对易的矩阵只能是单位矩阵的倍数（将 $2\times$