工 程 数 学

主编　张尧庭
主审　严士健

中央广播电视大学出版社

（京）新登字 163 号

工 程 数 学
主编　张尧庭
主审　严士健
*
中央广播电视大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京印刷三厂印刷
*
开本 787×1092　1/16　印张 16　千字 327
1993 年 10 月第 1 版　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—25000
定价 9.00 元
ISBN 7-304-00848-2/O・67

序　言

本书实际上是三部分：概率论、数理统计和积分变换。由于积分变换离不开复变函数，因此介绍一些必备的复变函数的知识；概率论、数理统计就是根据原来的教材《概率统计》（中央广播电视大学出版社 1986 年版）改写的。

这次重新编写的目的是两条：(1)减少内容和学时，使教材能适合大专层次的要求；(2)突出计算机模拟演示等电视教学的手段，使教材更适应电视教学的特点。为了适应电视课与面授课的需要，本书分为两篇：第一篇概率论与数理统计；第二篇复变函数与积分变换。

为了使这本教材便于自学，这次改写时，突出重点，把一些适合本科学生的材料用小字排印，学有余力的学生，也可以自学。想用本书作为本科教材的，把小字排印部分也作为教学内容就可以了。这次编写，无论是概率统计、还是复变函数和积分变换，都力求结合工科学生的实际水平，不强调严格、细致的数学推导（这类推导一部分写成附录供参考），而是强调如何理解概念，能用它来分析问题，解决问题。习题的训练也侧重于这一方面，书末附有答案以便读者查对。

全书的编号统一使用三个号码，定理 3.1.2 表示第三章，第一节的第二个定理；公式的标号(2.4.1)也是这样，它表示的是第二章、第四节的第一个标号的公式。凡是小字排印的段落、章节，都是供参考的，不是大纲所要求的。习题的数目也稍多一些，以供选择，使一些学有余力的学生有用武之地。书末附有人名和名词的索引，使读者便于查找有关的内容。总之，我们希望这次改编后的教材能更便于学生自学，并对本课程发生兴趣。是否能达到目的，读者是最有发言权的，因此欢迎批评指正。

初稿由魏振军（概率论部分），张尧庭（数理统计部分），廖祖纬（复变函数与积分变换部分）分头执笔。其后对初稿进行了仔细的研究讨论和修改。初稿、修改稿曾多次得到严士健、叶其孝、刘秀芳教授的帮助，他们不辞辛劳、仔细审阅了全文，提出许多宝贵的意见，我们在此表示衷心的感谢。我们还要感谢吴昌炽、王静龙、王可宪、徐建兰等同志，他们也对书稿提出了修改的建议。我们还感谢在编写过程中给我们提供各种方便和帮助的同志。总之，没有大家的帮助，我们是难以完成任务的，至于书中错误或疏漏之处，限于我们的水平和能力，请读者批评指正。

编　者

1992 年 10 月

目　录

第一篇　概率论与数理统计

第二篇　复变函数与积分变换

第一篇　概率论与数理统计

本篇分四章：

第一章内容是随机事件及概率。主要引入随机事件和概率的概念、事件的运算以及相应的概率公式。重点是加法公式和乘法公式。

第二章内容是随机变量及其分布。引入离散型随机变量、连续型随机变量及相应的各种分布，这一章的重点是二项分布及正态分布。引入分布后，介绍了随机变量的矩，重点是期望值和方差。

第三章内容是二维随机变量。介绍联合分布、边缘分布、独立性等概念；介绍协方差和相关系数的概念；说明大数定律与中心极限定理的意义。熵与信息是不要求的，作为参考材料。

第四章内容是数理统计。介绍数理统计中的一些基本概念和基本方法，重点是最大似然估计与回归分析。第四章最后还附了选读教材，介绍条件分布、贝叶斯公式以及贝叶斯推断，这一部分内容也是不要求的。

第一章　随机事件及概率

§1.1　引　　言

必然现象和随机现象

自然界和社会上的现象是多种多样的，它们大体上可分为两类，一类称为必然现象。例如，水在一个大气压下加热到100℃必然沸腾；同性电荷互相排斥。另一类称为随机现象，即带有随机性、偶然性的现象。例如，抛掷一枚硬币，其结果可能是出现正面，也可能是出现反面，事先无法肯定。播下的种子，可能发芽，也可能不发芽，事先也不能断定。

必然现象具有某种"因果规律"，即只要实现某些确定的条件，就肯定会发生某个结果。如上面所举的例子，一个大气压和加热到100℃就是条件，这些条件一经实现，则必然发生水沸腾"这一结果。物理学、化学、数学中的许多定理、定律都是阐明必然性的因果规律。随机现象反映了另一种规律，例如，抛掷一枚质地均匀而且对称的硬币，掷少数几次看不出什么规律，如果掷的次数很多，就可发现：出现正面

的次数大约占一半左右。据此，我们说“出现正面”有 1/2 的机会，或者说“出现正面”的可能性为 1/2。1/2 就是反映掷硬币“出现正面”这一事件的内部规律的一个数值。又如，一个农场新运到一批小麦种子，播种前人们最关心的问题是种子能不能发芽。如果单独说某一粒种子能不能发芽意义并不大，重要的是要弄清楚能发芽的种子占全部种子的百分比有多大？或者说“种子能发芽”这一事件发生的可能性有多大？假设在相同的条件下，对这批种子进行发芽试验，结果如表 1.1.1 所示：

表 1.1.1

试种的粒数 n	5	10	50	100	200	300	400	500
发芽的粒数 m	5	9	46	97	192	286	378	476
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	1	0.9	0.92	0.97	0.96	0.953	0.945	0.952

从表中看到：当试验的小麦粒数很多时，小麦发芽的频率接近于常数 0.95(在 0.95 附近摆动)。据此我们说，这批小麦能发芽的可能性为 0.95，或者说，这批小麦的发芽率为 0.95。0.95 就是反映这批小麦“种子能发芽”这一事件内部规律的一个数值。

类似的例子很多，一台自动车床在一定条件下进行大量生产，它所加工的产品的合格率常常是稳定的；一门火炮在一定条件下进行射击，个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差，但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性，如一定的命中率，一定的分布规律等等。

随机现象的统计规律性

这种在一定条件下对某种现象的大量观测中表现出来的规律性，我们称之为随机现象的统计规律性。随机现象常常表现出这样那样的统计规律，这正是概率论所研究的对象。

本章从对随机现象的观察入手，介绍事件与概率等基本概念，重点是概率运算的加法公式和乘法公式。

§1.2 事件与概率的概念

随机试验

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察或试验。如果每次试验的可能结果不止一个，且事先不能肯定会出现哪一个结果，这样的试验称为随机试验。

随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。通常用大写英文字母 A、B、C…等表示。例如，掷一颗骰子，“掷出 6 点”是一个随机事件；再如，100 个灯泡中，有 3 个次品，现任取一个，则“取出的是正品”也是一个随机事件。

概率是度量事件发生可能性大小的一个数量指标

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生。既然有可能性，就有可能性大小的问题，概率就是度量事件发生可能性大小的一个数量指标。也就是说，事件 A 发生的可能性大小就是事件 A 的概率，用 $P(A)$ 表示。

有两个特殊的事件必须说明一下：第一个是必然事件，即在一定条件下必定发生的事件，用 Ω 表示。例如，盒中有 2 个白球 3 个红球，现随机取出 3 个，则取出的

3 个球中，“含有红球”这一事件，即为必然事件。第二个是不可能事件，即在一定条件下绝对不会发生的事件，用$\varnothing$表示。在上例中，事件“不含红球”即为不可能事件。必然事件与不可能事件都是确定性的，但为了今后讨论问题方便起见，将它们也都当作随机事件。

必然事件和不可能事件

直观上很容易理解，必然事件发生的可能性是百分之百，所以它的概率是 1，而不可能事件发生的可能性是 0，所以它的概率是 0，即有

$$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0 \tag{1.2.1}$$

而任一事件 A 发生的可能性不会小于 0，也不会大于百分之百，所以 A 的概率介于 0 与 1 之间，即有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1.2.2}$$

那么，怎样获得某事件发生的概率呢？下面几节就来回答这个问题。

§1.3 古典概型

对于一类简单问题，我们可以比较容易求得事件发生的概率。例如，抛掷一枚硬币，这个试验只有两个可能结果：“正面向上”(记为事件 A)或“反面向上”(记为事件 B)。如果这个硬币质地均匀，又是对称的，则 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，因为我们没有理由认为哪种结果出现的可能性更大，也就是说，事件 A 与事件 B 出现的机会是均等的——这就是等可能性。又如，一个盒子中有 10 个球，其中 9 个是红球，1 个是白球，它们的大小、重量、质地都一样。从这个盒子中任意取一个球，取到白球的概率是$\frac{1}{10}$，因为 10 个球各个被取到是等可能的，而只有一个是白球。在这里实际上是从“比例”转化为“概率”。静态地说，在这个盒子中，白球占的比例是$\frac{1}{10}$；动态地说，从这个盒子中随机取一个球，取到白球的概率$\frac{1}{10}$。这就是告诉我们，在“静态”向“随机”转化时，“比例”相应于“概率”。而当我们要求出取到白球的概率时，只要找出它在“静态”时相应的比例。

问题 1.3.1 袋中有大小、形状完全相同的 10 个球，7 个是红球，3 个是白球，从袋中随机摸出一个球，摸到白球的概率是多少？

上面讨论的随机试验，其可能结果只有有限个，而且它们的出现是等可能的，我们称这样一类随机试验的概率模型为古典概型。

古典概型定义

类似的分析，不难得到古典概型中某事件 A 出现概率的计算公式：

如果试验只有 n 个等可能结果，其中导致事件 A 出现的结果有 k 个，则事件 A 出现的概率

$$P(A)=\frac{\text{导致 } A \text{ 出现的结果数}}{\text{等可能结果总数}}=\frac{k}{n} \tag{1.3.1}$$

古典概型中事件概率的计算公式

可以用古典概型计算的概率称之为古典概率。(1.3.1)式也称作概率的古典定

义。

可见，对于古典概型，只要弄清楚等可能结果总数及导致事件 A 出现的结果数，就可以求得事件 A 的概率。这样就把求概率问题转化为计数问题。排列组合是计算古典概率的重要工具。

例 1.3.1 掷一枚均匀硬币两次，求出现"恰有一次是正面"的概率。

解 掷一枚硬币有两个等可能结果：正、反；掷两枚硬币有 $2\times2=4$ 个等可能结果，它们是：

正正 正反 反正 反反

其中"正反"、"反正"都导致事件"恰有一次是正面"(记为 A)出现，故 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

问题 1.3.2 也许有人会对例 1.3.1 作如下分析：这个试验有 3 个可能结果："不出正面"、"出一个正面"、"出两个正面"，只有一个结果导致事件 A 发生，因此 $P(A)=\frac{1}{3}$，这样分析对吗？

例 1.3.2 掷两个均匀骰子，求出现点数之和为 8 的概率。

解 设 X 为第一个骰子掷出的点数，Y 为第二个骰子掷出的点数。该试验共有 $6\times6=36$ 个等可能结果。令事件 A 为"两个骰子点数之和为 8"，即 A 等价于"$X+Y=8$"，只有(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2)这 5 个结果之一出现时 A 才出现(见图 1.3.1)。因此 $P(A)=P(X+Y=8)=\frac{5}{36}$。

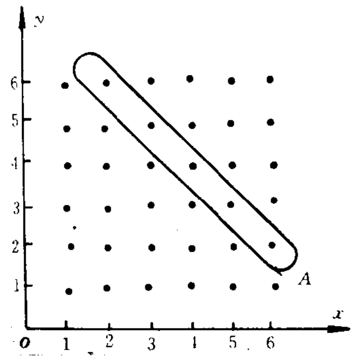


图 1.3.1

例 1.3.3 盒中装有 3 个白球，2 个黑球，从中任取两个球，求以下事件的概率。

(1)取出的两个球都是白球；

(2)取到一白一黑。

解 令 $A=\{$取出的两球都是白球$\}$

$B=\{$取到一白一黑$\}$

盒中一共有 5 个球，任取 2 个，有 C_5^2 种等可能取法。导致 A 发生的取法有 C_3^2 种，导致 B 发生的取法有 $C_3^1C_2^1$ 种，于是得

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

$$P(B)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

例 1.3.4 设有 N 件产品，其中有 M 件次品，现从这 N 件中随意取出 n 件，求 n 件中恰有 m 件次品的概率。

解 从 N 件中取 n 件，共有 C_N^n 种等可能取法。令 $B=\{$恰有 m 件次品$\}$，因为这一事件可以看作在 M 件次品中取了 m 件，在 $N-M$ 件正品中取了 $n-m$ 件所构

成的，因而导致 B 发生的取法有 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$种，故所求概率

$$P(B)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

问题 1.3.3 从 1、2、3、4、5、6、7、8、9 九个数字中任取一个，求取得 2 或 3 的倍数的概率。

问题 1.3.4 从 0，1，2，…，9 十个数字中任取两个，求这两个数的和等于 3 的概率。

问题 1.3.5 某人有一串钥匙共 8 把，其中只有一把能够打开门锁，现从这串钥匙中随意取 3 把去开门，求能把门打开的概率。

§1.4 频率与概率

在上节中，我们给出了古典概型中事件概率的计算方法。但是，许多随机试验的结果并不都是有限个，而且，即使是有限个，也未必是等可能的。例如，一射手向一目标靶射击，“中靶”与“不中靶”一般不是等可能的，那么，如何知道他中靶的概率是多少呢？如何知道他在 10 次射击中，没有一次中靶的概率是多少？有两次中靶的概率又是多少呢？为回答此类问题，我们需要对随机现象作进一步的研究。

下面，我们就从几个简单试验开始，揭示随机事件一个极其重要的特性：频率稳定性。

1. 掷硬币试验

由§1.3 中所述，若硬币是均匀的，我们得到“正面向上”的概率为$\frac{1}{2}$。现在让我们进行抛掷硬币的试验来验证它。

把一枚均匀硬币掷 50 次，结果如表 1.4.1 所示。第一列是抛掷的次数，记作 n，第二列列出抛掷的结果，记作 H（正面向上）和 T（反面向上）。到任何指定的一次抛掷，出现 H 的总数列在第三列，并记为 $n(H)$。最后，出现 H 的频率，用 $n(H)/n$表示，列在第四列。$n(H)/n$ 画在图 1.4.1 中。另一个把一枚硬币掷 500 次的结果画在图 1.4.2 中。

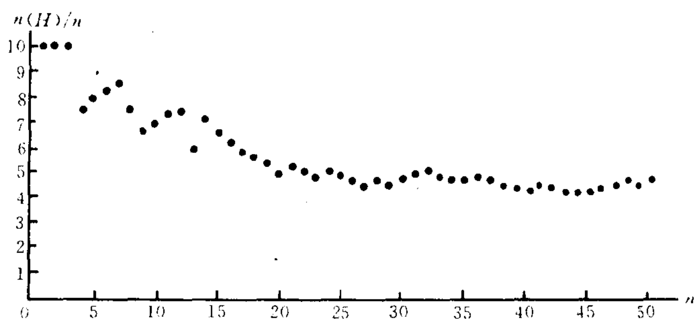


图 1.4.1

表 1.4.1

n	H 或 T	$n(H)$	$n(H)/n$	n	H 或 T	$n(H)$	$n(H)/n$
1	H	1	1.0000	26	T	12	0.4615
2	H	2	1.0000	27	T	12	0.4444
3	H	3	1.0000	28	H	13	0.4643
4	T	3	0.7500	29	T	13	0.4483
5	H	4	0.8000	30	H	14	0.4667
6	H	5	0.8333	31	H	15	0.4839
7	H	6	0.8571	32	H	16	0.5000
8	T	6	0.7500	33	T	16	0.4848
9	T	6	0.6667	34	T	16	0.4706
10	H	7	0.7000	35	T	16	0.4571
11	H	8	0.7273	36	H	17	0.4722
12	H	9	0.7500	37	T	17	0.4595
13	T	9	0.6923	38	T	17	0.4474
14	H	10	0.7143	39	T	17	0.4359
15	T	10	0.6667	40	T	17	0.4250
16	T	10	0.6250	41	H	18	0.4390
17	T	10	0.5882	42	T	18	0.4286
18	T	10	0.5556	43	T	18	0.4186
19	T	10	0.5263	44	T	18	0.4091
20	T	10	0.5000	45	H	19	0.4222
21	H	11	0.5238	46	H	20	0.4348
22	T	11	0.5000	47	H	21	0.4468
23	T	11	0.4783	48	H	22	0.4583
24	H	12	0.5000	49	T	22	0.4490
25	T	12	0.4800	50	H	23	0.4600

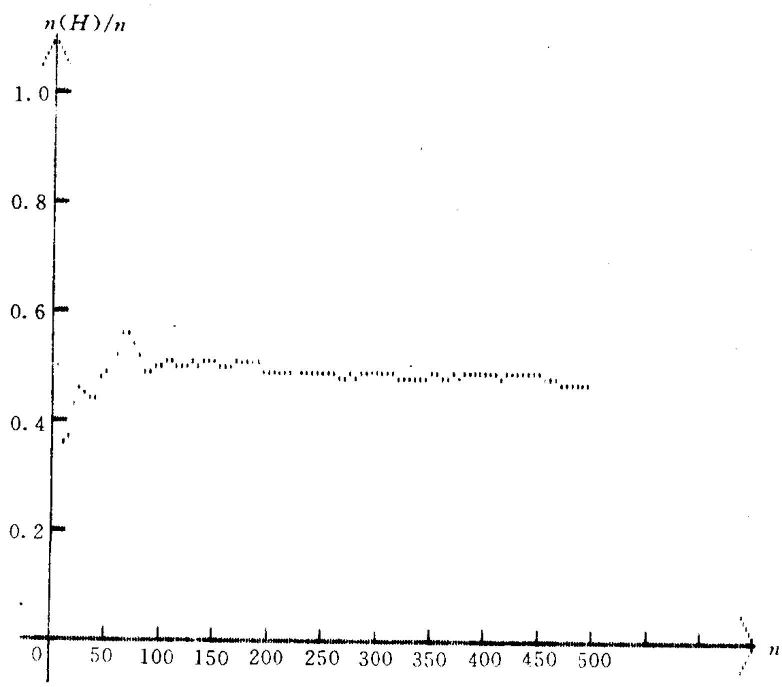


图 1.4.2

值得注意的是 H 出现的频率如何变得稳定并接近$\frac{1}{2}$。

问题 1.4.1 如果你们班上每个人各自进行 10 次掷硬币试验，并记录出“H”还是“T”，得到的序列会相同吗？

问题 1.4.2 如果你们班上每个人各自进行 200 次掷硬币试验，并画出随 n 增加 H 出现的频率变化图，你们会看到什么共同的规律？

历史上，著名统计学家蒲丰(Comte de Buffon，1707～1788)和皮尔逊(Karl Pearson，1857～1936)曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如表 1.4.2 所示：

表 1.4.2

试验者	掷硬币次数 n	“正面向上”次数 $n(H)$	频率 $n(H)/n$
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表中的数字容易看出，“正面向上”出现的频率总在$\frac{1}{2}$附近波动，且抛掷次数越多，一般来说，越接近于$\frac{1}{2}$。$\frac{1}{2}$是“正面向上”的概率。

在充分多次试验中，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且，试验次数越多，一般摆动越小。这个性质叫做频率的稳定性。

在寻求随机现象的规律时，常常采用模拟的方法。例如，代替掷一个均匀骰子，我们可以从一个恰好装有 6 个球(这 6 个球的大小、形状完全相同，分别标上 1，2，3，4，5，6 的记号)的袋中任意摸一个球。类似地，代替从一付纸牌中摸出一张，我们可以从一个装有 52 个球的袋子里摸出一个球(给球标上适当记号)，以适当的方式用装球的袋子代替骰子、纸牌，只要我们没有改变这些机会游戏中的机会，这样袋中摸球就能很好地模拟一些随机现象。如果你能编制计算机程序的话，也可以在计算机上模拟你所要观察的某些随机现象。这样在短时间内就可以进行大量随机试验，更便于观察到随机现象的统计规律性。以下有些试验，我们就是在计算机上进行的。

下面的高尔顿(Francis Galton，1822～1911)钉板试验进一步验证了频率的稳定性。

2. 高尔顿钉板试验

这个试验是由英国生物统计学家高尔顿设计的，它的试验模型如图 1.4.3 所示。

自上端放入一小球，任其自由下落，在下落过程中当小球碰到钉子时，从左边落下与从右边落下的机会相等，碰到下一排钉子时又是如此，最后落入底板中的某一格子。因此任意放入一球，则此球落入哪一个格子，事先难以确定，但是试验证明，如放入大量小球，则其最后所呈现的曲线，几乎总是类同的。也就是说，小球落

入各个格子的频率趋于稳定。下面就是我们在计算机上进行高尔顿钉板试验 400 次得到的两组结果(图 1.4.4)。

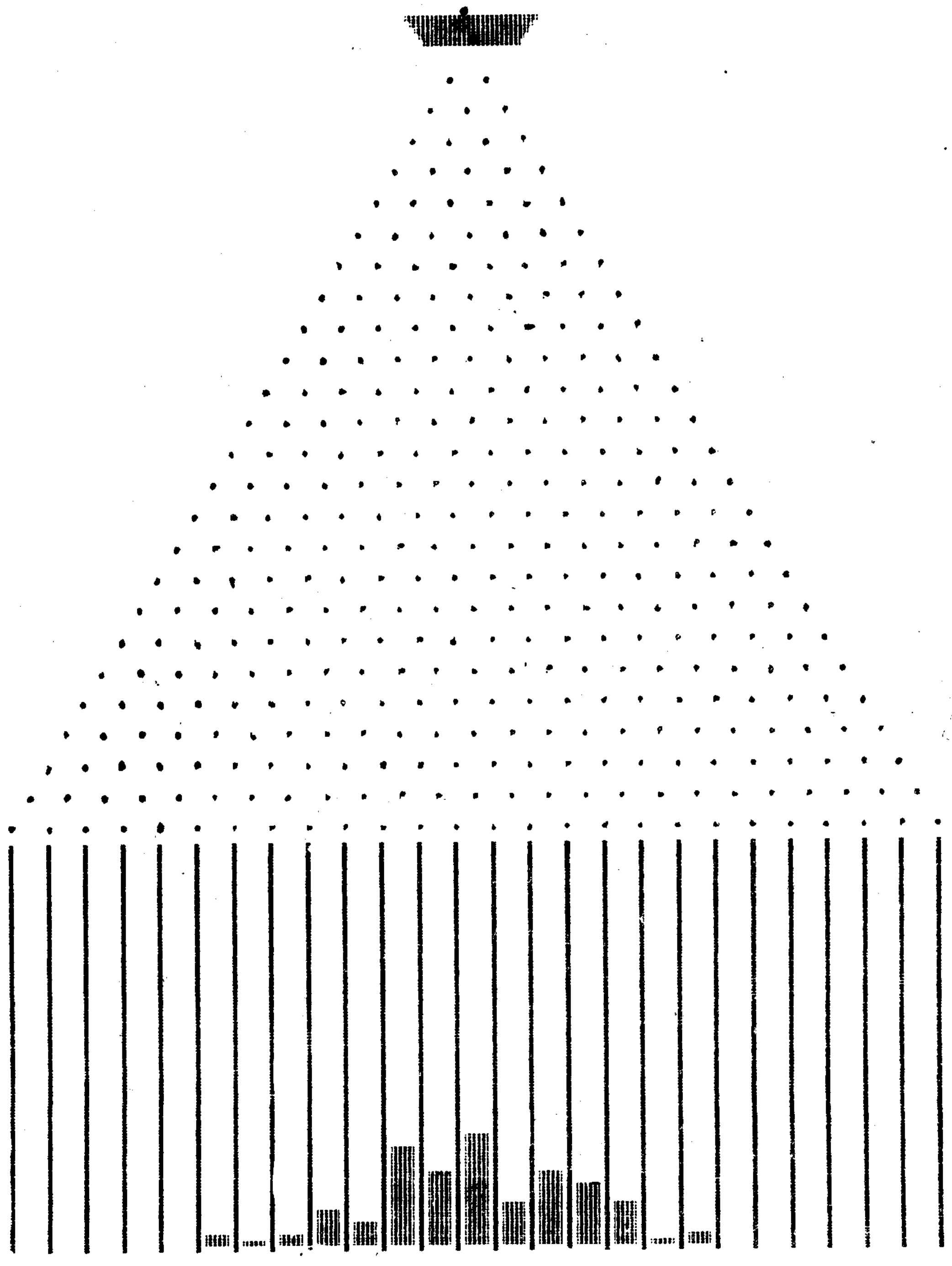


图 1.4.3 高尔顿钉板试验

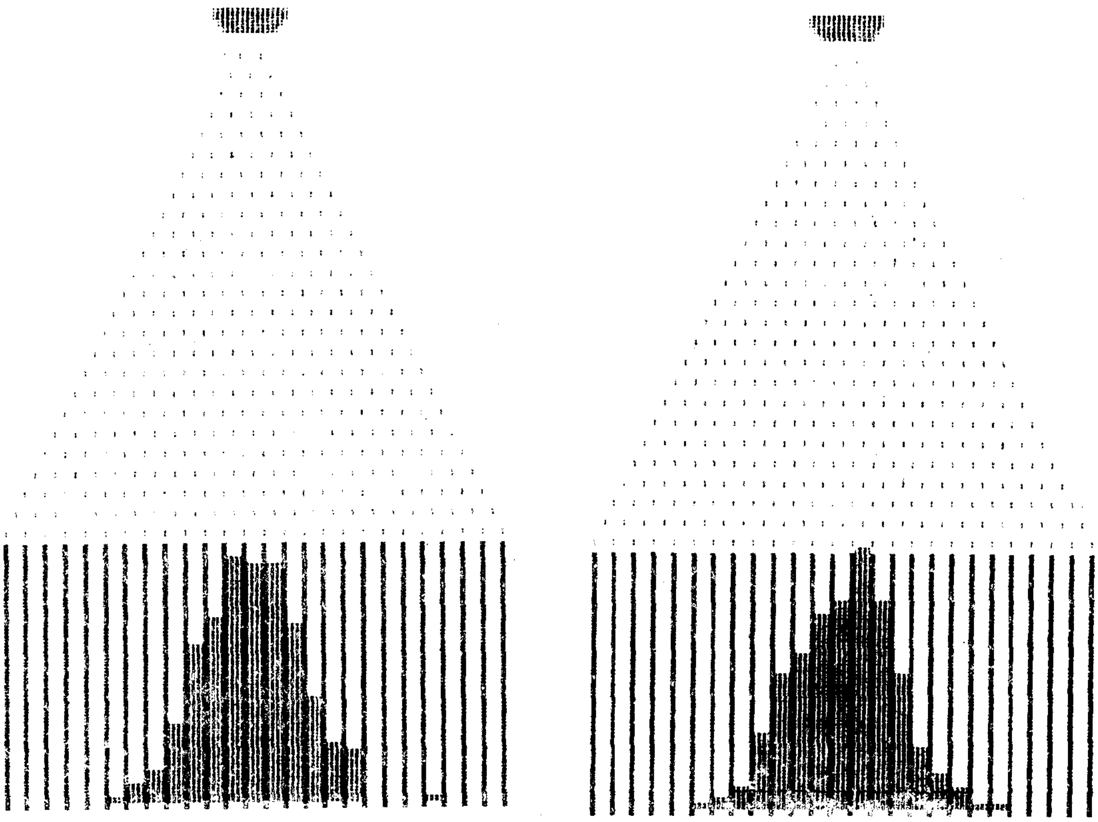


图 1.4.4

大量重复后不难从中看出规律。根据这个规律，我们可以说，小球落入各个格子的概率是一定的。在第三章中，我们将进一步研究这个规律。

3. 掷骰子试验

掷一个均匀骰子，如果在试验中，掷出"3"或"6"时，记录"S"，否则记录"F"。将这样的试验进行 n 次，我们得到一个由 S 和 F 组成的序列，在每次试验之前，我们不能预言将出现 S 还是 F。

例如，进行 12 次试验，得到的序列如下：

$S\ F\ F\ F\ F\ S\ F\ S\ S\ S\ F\ F$

记 $n(S)$ 为 n 次试验中出现 S 的次数，则 $n(S)/n$ 为 n 次试验中 S 出现的频率。将上述结果列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{n(S)}{n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$

这些结果画在图 1.4.5 中。

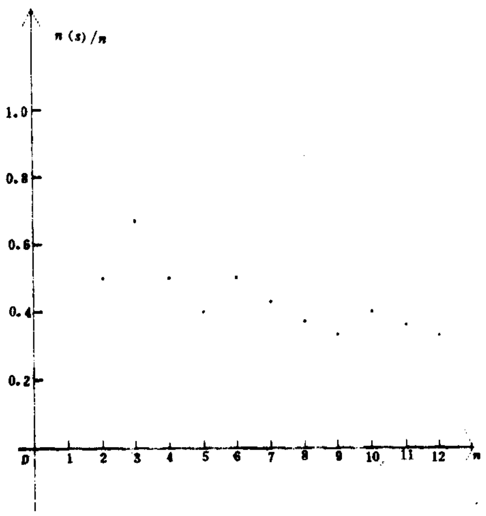


图 1.4.5

可以看到，频率 $n(S)/n$ 摆动得很厉害（在 0.2 到 1.0 范围内）。没有明显的规律，因为在此我们只有很少的试验次数。当试验次数越来越多时，频率的摆动一般将变得越来越小。下面是根据 60 次和 600 次试验结果作出的图形（见图 1.4.6 和图 1.4.7）。规律就能显示出来。

问题 1.4.3 从 600 次试验的图形，你发现什么规律？

我们再给出另外两个根据 600 次的试验记录得到的图形（见图 1.4.8）

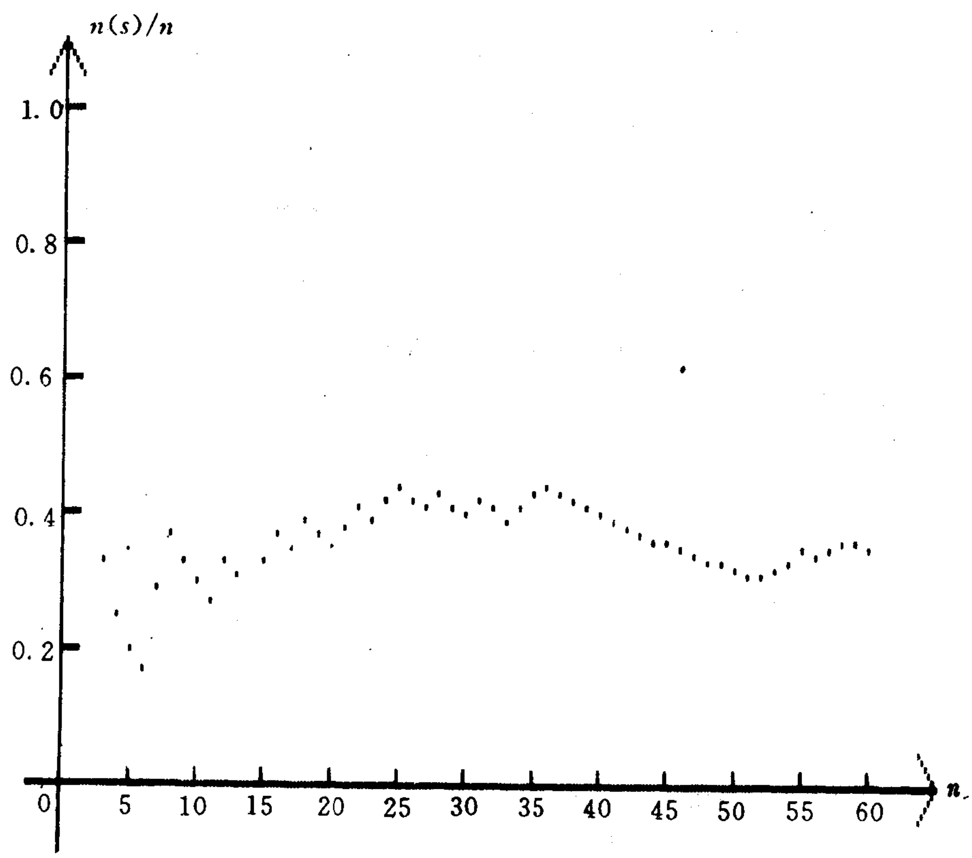


图 1.4.6

不难发现，随着试验次数的增加，S 出现的频率趋于在⅓附近稳定，且试验次数越多，一般越接近于⅓。

另一方面，由于掷骰子试验是古典概型，试验共有6个等可能结果："掷出1点"，…，"掷出6点"，而导致 S 出现的结果有2个，因此 $P(S)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$。

可以看到频率 $n(S)/n$ 在一定程度上反映了事件 S 发生可能性的大小，尽管每做一串(n 次)试验，所得的频率 $n(S)/n$ 可能各不相同，但只要 n 相当大，$n(S)/n$ 与概率 $P(S)$ 通常是会非常接近的。因此，概率是可以通过频率来"测量"的，或者说，频率是概率的一个近似。

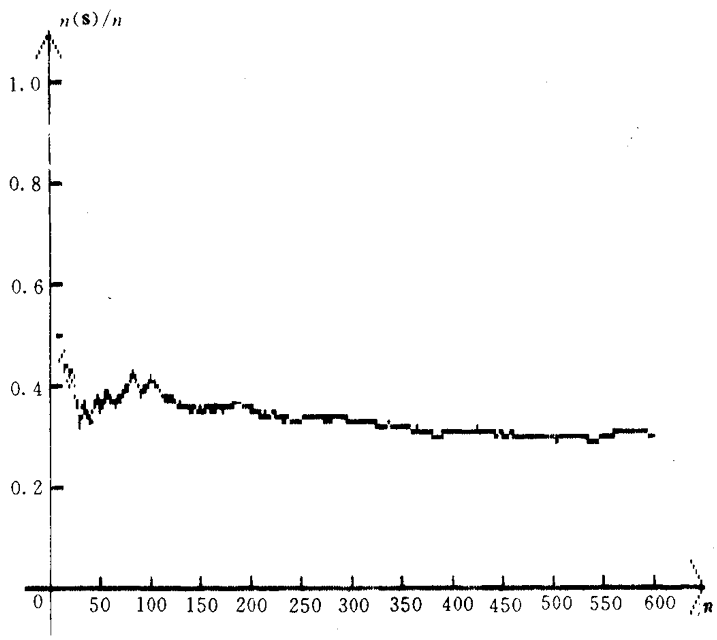


图 1.4.7

在实际中，当概率不易求出时，人们常取试验次数很大时事件 A 出现的频率作为 A 的概率 $P(A)$ 的近似值。

可见，若我们希望知道某射手中靶的概率，应对这个射手在同样条件下大量射击情况进行观察记录，若他射出 n 发，中靶 m 发，当 n 很大时，可用 $\frac{m}{n}$ 作为他中靶概率的估计。

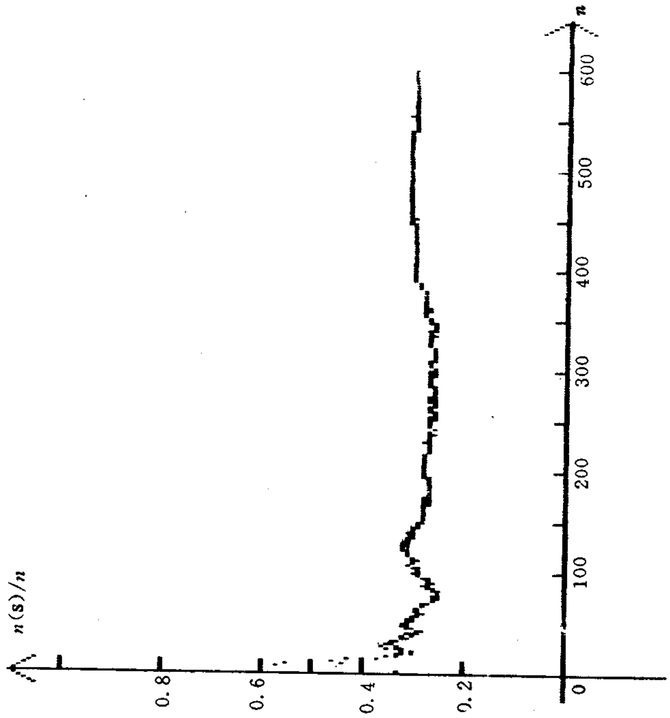
问题 1.4.4 我们说某事件发生的概率是0.8，是否指每做10次试验，该事件必发生8次？

问题 1.4.5 频率与概率有什么关系？

4. 蒲丰投针试验

平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一族平行线，向平面上任投一根长为 $l(l<a)$ 的针，针与某一平行线相交的概率是多少呢？

法国科学家蒲丰最早设计了这个随机投针试验，并于1777年给出了针与平行线相交的概率的计算公式：


n(s)/n
0.8
0.6
0.4
0.2
0
100
200
300
400
500
600
n

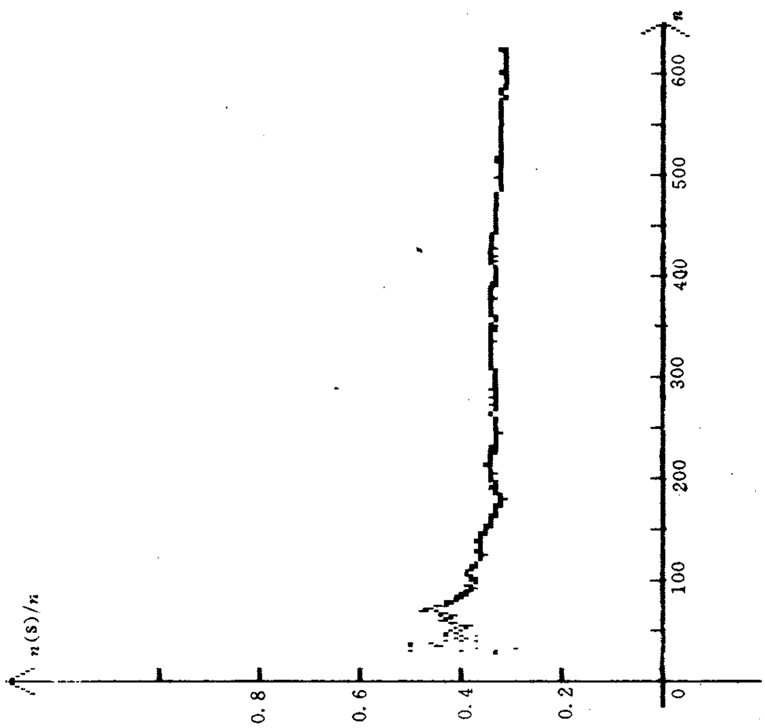

n(s)/n
0.8
0.6
0.4
0.2
0
100
200
300
400
500
600
n

图1.4.8