离散数学普及丛书

离散数学的应用

刘永才 李为鑑 编著

人民邮电出版社

离散数学普及丛书

离散数学的应用

刘永才　李为鑑　编著

人民邮电出版社

内容提要

本书是《离散数学普及丛书》的第四册。主要介绍的是"离散数学"在计算机科学中的应用，内容包括组合逻辑电路设计，故障诊断、编码理论、形式语言和自动机以及算法分析。本书把丛书前三册中讲述的基本知识应用于实际，以帮助读者对概念加深理解，并了解"离散数学"在计算机科学中的应用。

本书读者对象为：非计算机专业的大学生、中专生、工程技术人员以及高级中学的师生。计算机专业的技术人员也可参考。

离散数学普及丛书

离散数学的应用

刘永才 李为鑑 编著

责任编辑： 梁凝

人民邮电出版社出版

北京东长安街[illegible]

河北邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32　　1987年2月第一版

印张：7 24/32 页数：124　　1987年2月河北第一次印刷

字数：176 千字　　印数：1—5,500册

统一书号：15045·总3283—有5480

定价：1.50 元

前　　言

本书是"离散数学普及丛书"的第四本。离散数学在计算机科学的各学科有着广泛应用。作为入门丛书的要求，本书把前三本书讲述的基本知识用于实际当中，概要介绍组合逻辑电路设计、故障诊断、编码理论、形式语言和自动机以及算法分析。各章都有独立性，读者可根据需要，酌情选读。

编　者

1982.3

目　录

第一章　组合逻辑电路

§1　逻辑门电路

电子计算机是一种速度快、精度高、全部工作自动化的先进工具，它和一些自动控制设备一样都是由成千上万个电子线路和机械设备所组成。虽然结构非常复杂，但是这些电子线路归根结底都是由几种最基本的逻辑电路所组成。为了描述和设计这些逻辑电路，就要用到逻辑代数（开关代数）这个数学工具，它是一种最简单的布尔代数。

逻辑运算

逻辑代数和普通代数一样，常用英文字母来表示变元。但是，所不同的是代数变量可取一切实数值或复数值，而逻辑变元仅可取值“0”或“1”。它的运算也不同于普通代数运算，它有三种基本运算—与、或、非。

1．“与”运算

“与”运算定义如下：如果逻辑变元A与B都为“1”，则结果为“1”，否则结果为“0”“与”运算又称逻辑乘或逻辑积。

例如一个照明电路中有两只开关A和B串联，如图1.1所示。显然，只有当两只开关都闭合时，灯D才亮，电路中开关A和开关B之间的联系为“与”的关系。

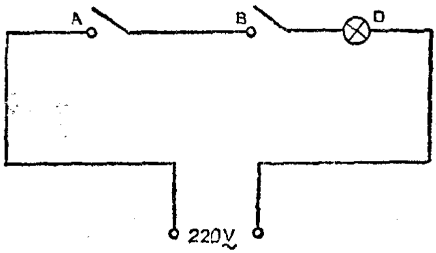


图 1.1

如果约定用 0 和 1 分别表示开关的断开和闭合，并又用 0 和 1 分别表示灯灭和灯亮。那么，灯 D 和开关 A、B 状态的逻辑关系如表1.1所示。

逻辑变元 A 和 B 的逻辑乘可记为 $A \wedge B$，或 $A \cdot B$（简写为 AB）。

表 1.1

A	B	$D = AB$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. "或"运算

"或"运算定义如下：如果逻辑变元 A 或 B 为 1，或两者都为"1"则结果为"1" 否则结果为"0"。"或"运算又称为逻辑加或逻辑和。

例如一个照明电路中有两只开关 A 和 B 并联，如图1.2所示。显然，只要有一只开关闭合时，灯 D 就亮，电路中开关 A

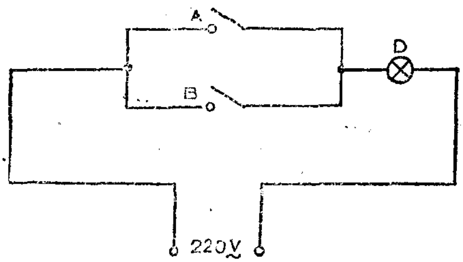


图 1.2

和开关B之间的联系为"或"的关系。

灯D和开关A、B的状态的逻辑关系如表1.2所示。逻辑变元A和B的逻辑和可记为$A \vee B$或$A+B$。

表 1.2

A	B	D = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. "非"运算

对一个逻辑变元进行否定，称为逻辑非，用符号"—"表示。"非"运算又称反相运算或逻辑否定。

例如一个照明电路中用一个"单刀双掷"开关控制灯D_1和灯D_2，如图1.3所示。开关向上合，灯D_1亮，灯D_2灭。开关向下合，灯D_2亮，灯D_1灭。两盏灯的状态相反。对于这种开关的两个触点，分别记作A和$\overline{A}$，当A接通时，$\overline{A}$断开；A断开时，$\overline{A}$接通，因此，两者是"相反"关系，逻辑变元A和$\overline{A}$的逻辑关系如表1.3所示。

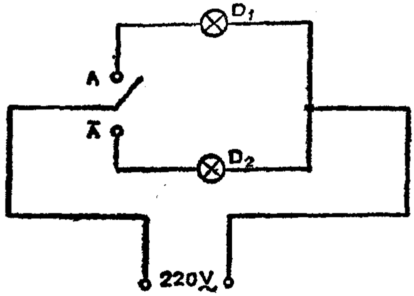


图 1.3

表 1.3

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

根据上面三种逻辑运算，我们可得到一组基本公式。

交换律 $A+B=B+A$ (1.1)

$A\cdot B=B\cdot A$ (1.1′)

结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$ (1.2)

$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ (1.2′)

分配律 $A+B\cdot C=(A+B)(A+C)$ (1.3)

$A\cdot(B+C)=AB+AC$ (1.3′)

0—1律 $\begin{cases}0+A=A & (1.4)\\ 1+A=1 & (1.4')\end{cases}$

$\begin{cases}1\cdot A=A & (1.5)\\ 0\cdot A=0 & (1.5')\end{cases}$

互补律 $A+\bar{A}=1$ (1.6)

$A\cdot\bar{A}=0$ (1.6′)

吸收律 $\begin{cases} A+AB=A & (1.7) \\ A+\overline{A}B=A+B & (1.7') \end{cases}$

$\begin{cases} A\cdot(A+B)=A & (1.8) \\ A\cdot(\overline{A}+B)=AB & (1.8') \end{cases}$

幂等律 $A+A=A$ (1.9)

$A\cdot A=A$ (1.9′)

狄·摩根定律 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ (1.10)

$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ (1.10′)

对合律 $\overline{\overline{A}}=A$ (1.11)

例1 在图1.4中A，B为两个“单刀双掷”开关，写出灯D亮或灭的条件。

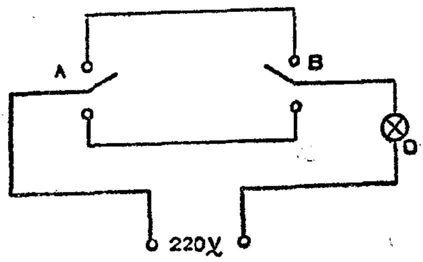


图 1.4

解：当开关A和B同时向上合或向下合时，灯D亮。如果开关A和B中一个向上合，另一个向下合时，则灯D灭。用1表示开关向上合，0表示向下合，那么开关A，B与灯D的逻辑关系如表1.4所示。所以灯D亮或灭的条件为：

$$D=AB+\overline{A}\,\overline{B}$$

例2 写出图1.5中灯D亮的逻辑条件，并加以简化。

解： 电路中有四条通路可使灯D亮，即开关A，B闭合；或A，C，$\overline{A}$闭合；或B，C，$\overline{A}$闭合；或B，C，C，B闭合都可使灯D亮。所以灯D亮的逻辑条件为：

表 1.4

A	B	D
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

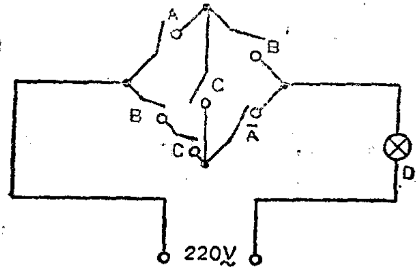


图 1.5

$$
\begin{aligned}
D &= AB + AC\overline{A} + BC\overline{A} + BCCB \\
&= AB + 0 + BC\overline{A} + BC \\
&= AB + BC \\
&= B(A + C)
\end{aligned}
$$

根据$D = B(A + C)$，图1.5的电路可以简化为图1.6所示的电路。

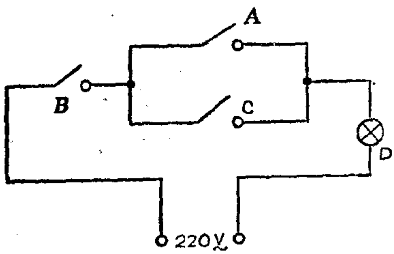
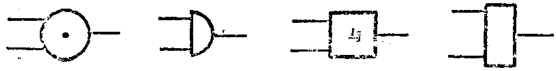
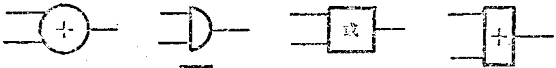
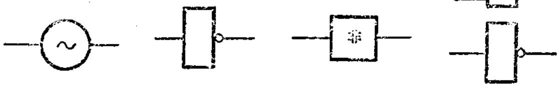


图 1.6

门电路

上面讨论的三种逻辑运算“与”、“或”、“非”都有专门的电路加以实现，这类电路称为门电路。电子计算机中各种复杂的控制关系、算术运算和逻辑运算都能用这些基本电路加以实现。表1.5给出三个门电路的常用符号，其中最右一列符号已逐渐为大家所采用，本书也采用此类符号。在门电路中，左边的线表示输入，右边的线表示输出，这里讨论的门电路，非门的输入端只有一个，其它门电路的输入端都有两个。当然，也存在两个以上输入端的门电路。

表1.5

门电路	符号
与门	
或门	
非门	

有了这些基本门电路，我们可以画出布尔表达式所对应的组合逻辑电路。所谓组合逻辑电路就是指输出仅与输入有关，

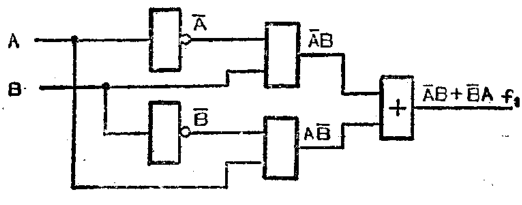


图 1.7

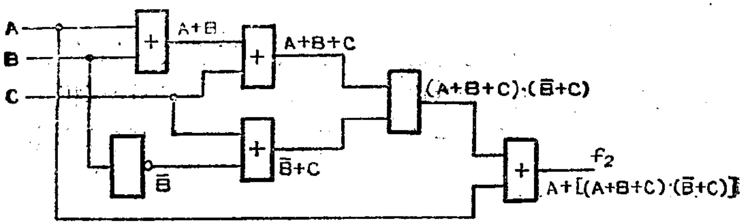


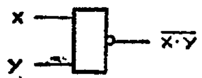
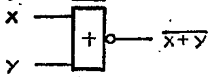
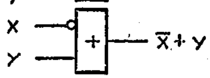
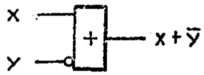
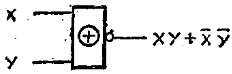
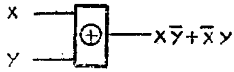
图 1.8

断与电路状态无关的逻辑电路。

例3 求布尔表达式 $f_1=\overline{A}B+A\overline{B}$ 对应的组合电路

解：对应的组合逻辑电路如图1.7所示。

表1.6

门电路	数学记号	符号
与非门	↑	
或非门	↓	
条件门	→	
逆条件门	$\xrightarrow{C}$	
同门	⊙	
异或门（按位加）	⊕	

例4 求布尔表达式 $f_2=A+[(\overline{B}+C)\cdot(A+B+C)]$ 对应的组合电路

解：对应的组合逻辑电路如图1.8所示。

除去表1.5所示的三个基本门电路外，还有六个常用门电路，如表1.6所示。

表1.6中的六个门电路都可用与门，或门，非门组成的电路代替。如图1.7给出的电路就可以代替异或门。以后，我们的讨论仅限于由与门，或门和非门组成的电路。

例5 用与门，非门来表示或非门，反之，用或非门表示与门和非门。

解：因为 $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$

$$x\cdot y=\overline{\overline{x}+\overline{y}}=\overline{\overline{x+x}+\overline{y+y}}$$

$$\overline{x}=\overline{x+x}$$

所以，相应的电路分别如图1.9(a)，(b)，(c)所示。

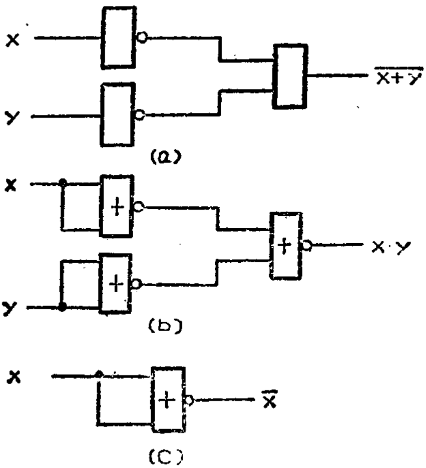


图 1.9

§ 2 组合电路化简

在§1例2中，我们看到图1.5和图1.6的控制电路功能相同。在图1.6中只用到三只双向开关，而图1.5要耗用四只双向开关和一只“单刀双掷”开关。显然图1.6的电路比图1.5的电路简单。本节专门讨论组合电路的化简。

到底采用什么样的布尔表达式能使对应的组合逻辑电路耗用门电路最少、设备简单、设计合理呢？一般说来，布尔表达式比较“简单”，那么，对应的组合逻辑电路耗用的门电路就少，设备就简单。由于不同类型门电路所对应布尔表达式的“简单”标准是不同的，我们无法加以一一讨论，并且所有布尔表达式都能化为由与门、或门、非门组成的“与—或”表达式，所以，我们限于讨论“与—或”表达式的化简。

最简的“与—或”表达式应满足：

1. 乘积项个数应最少。

2. 在满足条件1的情况下，要求每一个乘积项中变元尽可能少。

例如

$$F = A + AB + \overline{A}C \qquad (1)$$
$$= A + \overline{A}C \qquad (2)$$
$$= A + C \qquad (3)$$

上述F的三个“与—或”表达式中，因为(1)式有三个乘积项，而(2)和(3)式中只有两个乘积项，故比(1)式简单，又(3)式中第二个乘积项中变元只有一个，而(2)式中第二个乘积项中变元有两个，(3)式又比(2)式简单，所以(3)式是最简单的“与—或”表达式。这三个式子所对应的组合逻辑电路分别如图1.10(a)，(b)，(c)所示。显然，图1.10(c)的

电路最简单，只耗用一个或门。

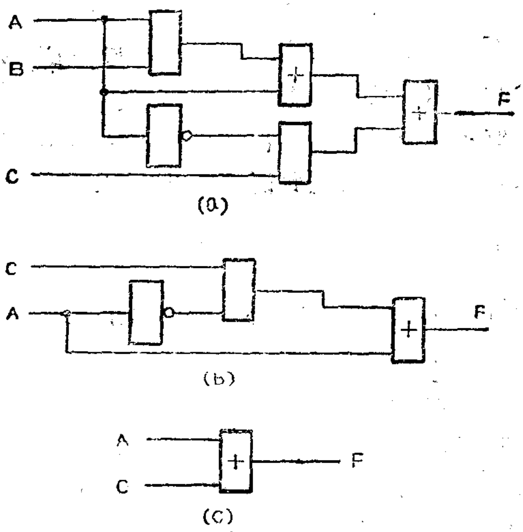


图 1.10

公式化简法

利用公式（1.1）～（1.11）以及由它们产生的一些常用公式，化简一个“与—或”表达式就是公式化简法。它经常用到下列几种方法：

1.并项法

例如

$$A B+A \overline{B}=A(B+\overline{B})=A \cdot 1=A$$

$$A \overline{B} C+A B C=A(\overline{B}+B) C=A \cdot 1 \cdot C$$

$$=A C$$

$$A(B C+\overline{B}\,\overline{C})+A(\overline{B} C+B \overline{C})$$

$$=A(BC+\overline{B}C)+A(\overline{B}\,\overline{C}+B\overline{C})$$
$$=AC+A\overline{C}=A$$

从上面的例子可以看出，在一个"与一或"表达式中，如果有两个乘积项，它们除去一个变元外，其它变元都相同，并且这一个变元分别以自身和它的"非"在该两项中出现，那么，消去此变元，然后把此两项合并为一项，即$AB+A\overline{B}=A$。

2． 吸收法

我们可以利用公式（1.7）：$A+AB=A$，消去多余项。

例如 $A+AB+ABC=A+AB=A$

$$A\overline{B}+A\overline{B}CD=A\overline{B}$$

从上面的例子中可以看出，在一个"与一或"表达式中，如果有两个乘积项，其中一个乘积项出现的变元是另一个乘积项中出现的变元的一部分，那么，可将变元多的一项吸收掉。

3． 消去法

我们可以利用公式（1.7′）：$A+\overline{A}B=A+B$，消去多余的因子。

例如 $AB+\overline{A}CD+\overline{B}CD=AB+(\overline{A}+\overline{B})CD$

$$=AB+(\overline{AB})CD=AB+CD$$

$$A+B+\overline{A}\,\overline{B}C=A+B+\overline{(A+B)}C=A+B+C$$

从上面的例子可以看出，在一个"与一或"表达式中，如果有两个乘积项，其中一个乘积项的"非"是另一个乘积项的因子，那么，在另一个乘积项中可消去此因子。

上面三种化简方法是常用的，但有时不能直接运用这三种方法，还必须经过配项，才能运用。公式化简法是变化万千