趣味图论

QUWEI TULUN

柯旻 著

青年出版社

趣 味 图 论

柯 昊 编著

中国青年出版社

封面设计：韩　琳
插　　图：朱　静　刘茗著

趣味图论

柯　旻　编著

*

中国青年出版社出版　发行
中国青年出版社印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　5.25印张　70千字
1987年12月北京第1版　1987年12月北京第1次印刷
印数1—4,000册　定价1.10元

内 容 提 要

图论是近年来发展比较快的一个数学分支。由于它的形象和直观，作为一个得力的工具，它已经被广泛地应用于物理学、化学、生物学、计算机科学、运筹学、心理学、语言学、社会学等众多的自然科学和社会科学领域。

本书通过大量日常生活和工作中的生动事实和有趣的智力游戏，比较通俗而全面地介绍了图论的一些基本概念、主要分支、重要定理以及它们的应用，并且还介绍了图论本身的一些重大课题的突破，例如著名的“四色猜想”问题。

本书的目的是使读者对图论这一数学分支能够有所了解，并能从中学会一些分析问题和解决问题的具体方法。

致 读 者

当你翻开这本小册子的时候，也许在想：图论是指什么呢？这里的“图”和一般的图有什么不同吗？

是的，这里的图和一般的图，也就是古希腊数学家欧几里得（约前 330-前 275）所建立的欧几里得几何中的图是不相同的，它属于另一种图。这种图对于你来说可能还是陌生的，然而它的应用范围却是无限广阔的。它可以应用于你的周围，应用于你的生活、学习和工作之中。

1736 年，瑞士大数学家欧勒（1707-1783）① 由解哥尼斯堡七桥问题② 而创立了图论这门学科，到现在已经有两百多年的历史了。然而，由于社会历史条件的限制，在前一百多年间，图论的发展是缓慢的。直到本世纪中叶，随着当代科学技术的飞速发展，随着数学对各个领域的渗透，图论——这门沉睡了多年的学科，才逐渐苏醒过来，开始焕发出青春的活力。由于它所具有的特殊功能——它能解决许多用传统的数学方法无法解决的问题；由于它的形象和直观，因

① 欧勒也译作欧拉。

② 哥尼斯堡是加里宁格勒的旧称。哥尼斯堡原来是德国东普鲁士的城市，1945 年根据波茨坦会议的决定划给苏联，1946 年改称加里宁格勒，是苏联西端沿波罗的海的一个不冻港。十八世纪，那个城市里有七座桥。当时城里居民热衷于解一个难题：一个散步的人怎样能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点。这实际只是一个“一笔画问题”，1736 年欧勒加以解决。答案是不可能。关于一笔画，参看后面第三章，练习三里介绍了七桥问题。

此，作为一个得力的工具，它已经被广泛地应用于物理学、化学、生物学、计算机科学、运筹学、心理学、语言学、社会学等众多的自然科学和社会科学领域。

当前，图论已经成为一门引人注目的十分活跃的学科。随着实践的发展，它的巨大潜力将会被人们进一步认识、发掘和利用。

这本小册子，通过大量日常生活和工作中的生动事实以及有趣的智力游戏，比较通俗而全面地向你介绍图论的一些基本概念、主要分支、重要定理和它们的应用。这里也将介绍图论本身的一些重大课题的突破，例如著名的“四色猜想”问题。本书的另一个意图是：尽可能地把图论和现代科学技术、主要是计算机科学的理论和实践有机地结合起来，由此体现图论方法的实用性和先进性。

本书每章的后面都附有一些练习题，其中打“*”号的题是有一定难度的，解决它们可能要花费你的一点时间，但是这也许是很有趣的事情。所有练习题的详细解答都附在书后，不过请你不要轻易地翻看它们。因为，图论毕竟是一门数学，要学习它不仅要用眼，更重要的是要动脑，要动手，只有这样，才能不仅对图论的基础知识有所了解，并且还能初步掌握图论这个有用的工具，解决日常生活、工作中的有关问题，增进自己分析问题和解决问题的能力。

当你看过这本小册子以后，如果多少能有所收益——即使是微乎其微，也将使我感到莫大的欣慰。

作　　者

目　　录

一 欢乐的春节联欢会

——图的基本概念

除夕之夜，雄伟壮丽的人民大会堂灯火辉煌。东大厅里，灿灿的华灯下面，一只欢叫的孔雀展开绚丽的尾屏，迎接前来参加春节联欢会的首都各界人士。巨大的花篮，百花吐艳，凤蝶翩翩飞舞其间，这一切更增添了晚会的丰采。

游艺厅里，热闹非凡，人们正在玩贴鼻子、光控机器人等，笑声、欢叫声在大厅里回旋。如果你有幸来到这里，一定会被这节日的欢乐气氛感染，也融化到笑的海洋里去。然而，如果你未能遇到这个难逢的机会，也不必因此感到懊丧，或许还能找到一个补救的办法，它也能使你节日过得充实、愉快——让我来给你出一道有关联欢会的有趣的问题吧！

一个关于联欢会的问题

参加联欢会的人这么多，一定有不少人是彼此认识的。假设参加联欢会的人共有 28769 个，而每个人在联欢会上都至少遇到了 1 个熟人，那么，你能证明其中必有 1 个人至少遇到了 2 个熟人吗？

这里的“至少”，是不少于的意思，也就是数学中的“大于或等于”。例如，说某数 a 至少是 2，也就是指 $a \geqslant 2$。

这个问题也许一下子会把你给问住。不过别着急，让我

们拿出笔和纸，一起来分析一下吧。

问题里假设参加联欢会的人共有28769个，这个数目似乎大了点，我们先把它缩小些，只取它的零头9。这样，问题就可以作如下的简化："某小型游艺会有9个人参加。已知他们每个人至少认识其中的1个人。证明：必有1个人至少认识其中的2个人。"

图解这个问题

让我们通过作一个图，来一步步求得这个问题的解决。

先在纸上画出9个空心（或实心）点，这些点用图论的术语就叫做图的"顶点"。每个顶点表示参加联欢会的一个人。再给9个顶点分别标上符号 *a*、*b*、*c*、*d*、*e*、*f*、*g*、*h*、*i*，相应地表示9个不同的人，如图1(*a*)所示。

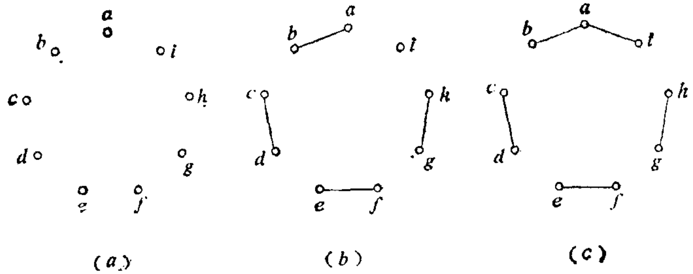


图 1

怎样表示两个人彼此认识呢？如果两个人彼此认识，那就在表示这两个人的两个顶点之间连上一条线，这条线用图论的术语就叫做"边"。已知9个人中，每个人都至少认识其中的1个人，所以9个顶点中的每一个都至少要连上一条边。我们先从顶点 *a* 开始做起。由于题里并没有明确指出 *a* 到底跟谁认识，只知道 *a* 至少跟 *b* 到 *i* 中的一个人认识，所

以，不失一般性，我们不妨假设 a 至少认识 b，这样，在顶点 a 和 b 之间可以连上一条边。同样道理，我们可以假设 c、e、g 至少分别认识 d、f、h，于是在顶点 c 和 d 之间、e 和 f 之间、g 和 h 之间都可以连上一条边，如图1(*b*)所示。这时，还没有出现和2条边相连的顶点，可是你别忘了，顶点 i 还没连边呢！

根据题设，i 也至少认识 a 到 h 中间的一个人，也就是说，在顶点 i 和顶点 a 到 h 之间也至少存在一条边。这时，不论这条边连到 a 到 h 之间的哪个顶点上，都会使这个顶点和2条边相连。比如，我们不妨设 i 和 a 认识，这样，顶点 a 就和顶点 b、i 都有边相连了。这就说明 a 至少和2个人——b 和 i 都认识，于是整个问题得以证明，如图1(*c*)所示。

那么，我原来提出的问题又怎样解答呢？方法和解决简化了的问题是一样的。对于参加联欢会的28769个人来说，先假设其中的28768个人之中的每个人只认识其他28767个人中的一个，这样可以把他们分成14384组，每组两个人彼此认识。而对于剩下来的一个人，他至少和28768个人中的一个认识，比如和其中的甲认识。而甲在前面分组中已经表明他和一个人认识。现在甲又和剩下来的这个人认识，因此，甲就是我们所要找的那个人——他至少认识其他28768个人中的2个人。

原来一个似乎很难理出头绪来的问题就这样解决了。我们应该感谢图，是它帮了忙。

图的基本概念

那么，到底什么是我们所说的图呢？在这里，我们先给

出图的一些基本概念。

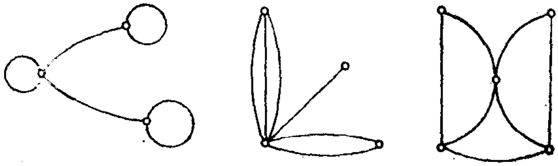
在解决联欢会问题的过程中，我们已经看到，图是由顶点和边组成的。图的每条边恰好连接两个顶点，用图论的术语说，就是这条边“关联”这两个顶点。如果一条边关联顶点 a，b，我们就用（a，b）表示这条边，并且说“顶点” a 和 b 是“相邻”的。如果两条边有一个公共顶点，那么我们就说这两条“边”也是“相邻”的，比如图 1(c)上的边（a，b）和（a，i）就是相邻的边，因为它们有一个公共的顶点 a。

图的顶点一般是有限个，它可以表示求解问题里的人或物或某种状态。图的边一般也是有限条，它表示顶点间的某种关系。例如，在联欢会的问题里，图上的边就表示两个人之间的“认识”关系。如果两个人彼此认识，就在他们相应的顶点间连上一条边，如果两个人不认识，那么他们对应的两顶点间就不存在边。当然，实际问题里的关系是多种多样的，要对具体问题进行具体分析，才能确定图上的边所表示的到底是什么样的关系。

根据边的不同特点，可以把图分成一些不同的类型。

如果一条边只关联同一个顶点，就是说在一个顶点上形成一个圈，那么这样的边就叫做“环”。有的图上，两个顶点之间关联的边多于一条，那么这些边就叫做“平行边”，具有平行边的图就叫做“多重图”。既没有环、又没有平行边的图，就叫做“简单图”。

图 2(a)有 3 条环；图 2(b)有 2 组平行边，因此它是个多重图；图 2(c)既没有环，也没有平行边，因此是个简单图。这里，图 2(a)既不是多重图，也不是简单图，而是个一般意义上的图。



(a)　　(b)　　(c)

图 2

这里我们还要提到两个概念："顶点的度数"和"图的总度数"。顶点的度数是指顶点关联的边的条数。由于一条边总是关联 2 个顶点，因此一条边一定对应 2 度。这样，如果图上有 m 条边，它就一定对应图上所有顶点的度数的总和是 $2m$ 度，这就叫图的总度数，常用符号 d 表示。可知任何一个图的总度数 d 总等于图的边数的 2 倍，有关系式 $d=2m$。

也有的图只由孤立的顶点组成，没有边相连，这样的图叫做"零图"。

图 论 世 界

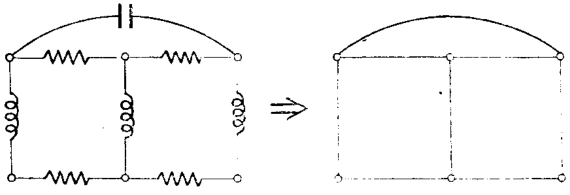
由图的基本概念我们可以看出：图论里的图只包含顶点和边，而和其他的几何要素，例如"形状"、"大小"、"面积"、"体积"等，是无关的。因此，图论里的图，是一种更加抽象的图，然而，它的应用领域却是极其广阔的。

在电网络理论中，最早由德国物理学家基尔霍夫(1824-1887)于1847年把一个电网络抽象成对应的"基本图"来研究，如图 3 所示。在这基础上逐步形成了"网络图论"。

在有机化学的研究中，1857 年，英国数学家凯莱(1821-1895)用图论里"树"的概念①，得到了一组饱和碳氢

① "树"的概念在后面第十章里将要讲到。

化合物 C_nH_{2n+2} 和它们的同分异构物的结构式，如图 4



(a) 电网络　　(b) 基本图

图 3

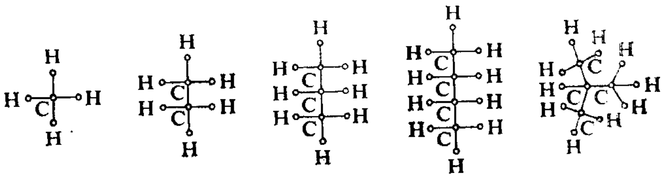
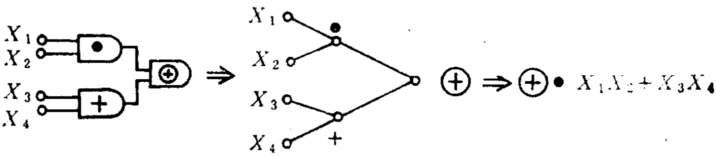


图 4

所示，把图论引进了现代化学领域。

在计算机科学中，图的应用也十分广泛。例如，一个逻辑线路，如图 5(*a*)①，可以抽象成一个图，如图 5(*b*)。由这个图，按照一定的法则，我们可以得到对应逻辑线路的一个表达式，这个表达式我们又可以把它作为一个程序输入到



(*a*) 逻辑线路　　(*b*) 对应的图　　(*c*) 对应的程序

图 5

① 关于这个逻辑线路，后面第十章第 69—73 页还要讲到。

计算机里，如图 5(c)所示。

图不仅应用在自然科学领域里，而且也广泛地应用在社会科学领域里。

在语言学中，可以利用图来分析语句结构。例如图 6 表示的是这样一种判断：当一个句子的结构是“名词+动词+形容词+名词”的时候，是合乎要求的句子，我们把这样的句子叫做合式，否则就是非合式。这样，语句“姑娘穿着花裙子”就是合式，而“姑娘穿着裙子”或“姑娘穿着裙子跳舞”就是非合式。

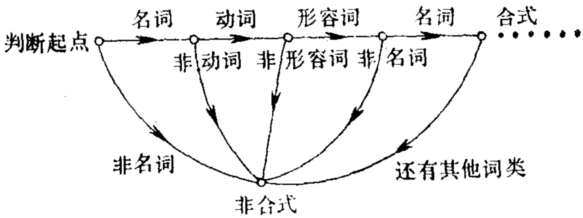


图 6

在社会学或心理学中，也有人利用图来分析一群人之间的相互关系，探讨怎样保持一个稳定的社会结构。图 7 表示的是由 3 个人组成的一个小组，边上的“+”号表示边所关联的 2 个人能很好地共事，而“-”号表示相反的情况。这样，在 4 种不同的关系组合中，图 7(a)、图 7(b)表示的是一种稳定关系，而图 7(c)、图 7(d)表示的是不稳定的关系。

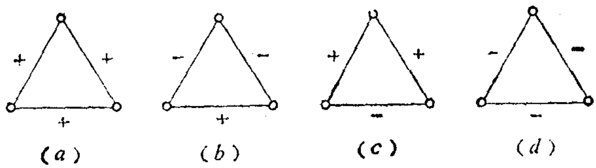


图 7

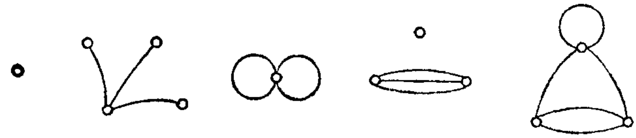
图的具体应用真是举不胜举。在广袤的科学世界里，无论你走进哪个领域，几乎都会碰到图，都会看到它作为人们的好帮手在贡献着自己的力量。愿你也能早日和图交上朋友，你将会发现：它不仅是有趣的，而且也是有用的。

练 习 一

1. 已知在5个学生甲、乙、丙、丁、戊中，甲、乙、丙是一年级一班同学，丁、戊是二年级三班同学。请就5个人之间的同学关系画出相应的图来。

2. 有A、B、C、D、E 5个城市。已知A和B、C之间，B和D之间，D和E之间有直达班机通航。请画出对应5个城市的空中交通图来（如果两个城市之间有空中通路，就在对应的顶点之间连上一条边）。

3. 判断图8各图属于哪种类型。



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

图 8

*4. 某次宴会上，熟人见面互相握手。证明：握过奇数次手的人有偶数个。

*5. 参加某次学术讨论会的共有263个人。已知每个人至少和3位与会学者讨论过问题。证明：至少有一个人和4位以上学者讨论过问题。