高等学校试用教材

# 数学分析

## 上册

吉林大学数学系编

人民教育出版社

## 内 容 提 要

本书是根据1977年10月理科数学教材编写大纲讨论会制定的“数学分析教材编写大纲”编写的．可作为综合性大学数学专业和计算数学专业的教材，也可供高等师范院校有关专业使用．

本书比较重视基础理论和分析技巧的讲述，在章节安排上，由浅入深，逐步展开，便于教和学．

全书分上、中、下三册．上册内容包括函数和极限论初步，一元微积分．

数 学 分 析

上 册

吉林大学数学系编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印刷

*

1978年3月第1版　1979年3月第2次印刷

书号 13012·097　定价 0.56 元

# 序

本书是为综合大学数学专业和计算数学专业的同学写的，分上、中、下三册出版.

关于本书的编写意图和使用，我们提出以下几点供教师和同学们参考. 鉴于人类对事物的认识应该是从感性到理性，由浅入深，由易到难的，我们首先讲述一元微积分的基本概念、基本运算和它们的应用，尽快地让学生接触一批感性材料. 我们对极限论的处理是分两步走的. 第一步在上册只对极限概念给出描述性的定义，然后就在这样的基础上，解决一些简单的高等数学问题. 我们认为在这个阶段，在推理上，不宜向学生提出有关严格的极限理论问题. 否则将招致麻烦，打乱整个教学部署. 根据我们的经验，上册部分可以进行得稍快一些，所用讲授时间大约 90 学时左右.

学完了上册，我们就有条件指出它在推理上的不足之处，然后提出严格的极限理论. 大量事实证明，如果没有确切的极限概念，那末在运用极限进行推理和计算时便总不脱离问题的具体背景. 这对于复杂的问题是极不方便，甚至是根本行不通的. 因此在微积分学已经取得许多重大的成就以后，人们还不得不在十九世纪对于微积分基础进行大量而且深刻的研究，提出现今熟知的表述极限的 $\varepsilon$-$\delta$ 和 $\varepsilon$-$N$ 方法，无穷级数的收敛性等等. $\varepsilon$-$\delta$ 方法的精神实质是什么呢？列宁在讲到运动时说：“如果不把不间断的东西割断，不使活生生的东西简单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那末我们就不能想象、表达、测量、描述运动.”我们认为，表述极限时之所以要用 $\varepsilon$-$\delta$ 和 $\varepsilon$-$N$ 方法，也正是这样.

学生一定要学会正确而又灵活地运用严格的极限概念. 在中册里我们讲的是分析基础和无穷级数论. 希望在这个阶段着重培

养学生的论证能力，严谨的习惯，也要教给他们一定的分析技巧. 这个阶段要进行得稍慢一些，多配一点习题课，在有些段落，甚至需要逐字逐句地仔细批改学生的作业. 经过这个阶段认真地学和教，学习下册的困难就不大了. 中册与下册的讲授时间约共 150 学时. 关于中册的内容，还有一点需要说明. 由于综合大学数学专业和计算数学专业的学生都还要在实变函数论的课程里学习勒贝格积分，所以我们在这里只讲分段连续函数的定积分理论.

为了适应不同学校的要求和学生的不同水平，在本书中除必学的内容外，还讲述一些选学内容，用小字排印出来. 这些选学内容可以作为一些学生在学习期间的补充读物，也可以作为他们在假期中复习和进修的材料. 也是为了适应不同的情况，我们在正文的少数地方，即连续函数的基本性质和隐函数存在定理的证明，采取双证的办法. 两种讲法各有利弊，供大家选择. 如有可能，当然希望同时学习这两种证法.

学习数学当然需要认真地听课和阅读，但更重要的是“做数学”. 通过做才能暴露矛盾，然后在解决矛盾中前进. 我们希望同学们能养成认真做题和勇于做“难题”的习惯. 在这本书里，我们也选了一些难度较大的习题，并在书末附有答案和提示，但同学们不要过早地查阅它们，否则就得不到应有的锻炼了.

最后说一下成书的经过. 先是在 1970 年到 1971 年，由伍卓群、严子谦、陈铭俊主要执笔，为我系计算数学专业试办班编写了一套微积分讲义，金淳兆、刘经纶等参加了这项工作. 当时“四人帮”破坏科学，破坏教育，不许讲授基本理论，妄图把全国人民的文化水平拉向后退. 但我们全体试办班教师仍然坚持用一定的篇幅讲授严密的极限理论. 而对于极限论的处理，则吸收了以前我系数学分析课教学的经验，采取两步走的办法. 后来在 1972 年至 1973 年间，遵照敬爱的周总理关于加强基础的指示，又由江泽坚、

伍卓群、刘隆复执笔全面改写了原来的讲义，加强了基础知识和论证的严密性. 1977 年秋我们响应中央的号召，组织了数学分析编写组，再在原有的基础上改写成现在与读者见面的本子，参加这次编写工作的人有江泽坚、刘隆复、吴智泉、严子谦、徐利治、潘吉勋等同志. 复旦大学(主审)、四川大学(主审)、厦门大学、西北大学、新疆大学、北京师范大学、黑龙江大学、昆明师范学院等审稿单位，给我们提出了许多宝贵的意见，也纠正了一些错误，他们对本书付出了极为辛勤的劳动，我们谨于此致以谢意.

这次改写时间很匆促，又限于编者们的水平，所以本书肯定会有许多缺点和错误. 希望读者批评指正.

编　者

1978 年 5 月

# 目　录

# 第 I 篇　函数与极限论初步

我们这门课程叫数学分析，它的内容包括一元及多元的微积分学、无穷级数论和作为理论基础的极限论. 由于构成数学分析的主体的是一元及多元的微积分学，所以有时也就称数学分析这门课程为微积分.

微积分研究的是什么样的问题？使用什么样的方法？它同初等数学有什么联系和区别？所有这些问题，无疑都是大家开始学习这门课程时所关心的问题. 这一篇，作为整个课程的一个引论，目的是初步说明这些问题，同时也要引入一些基本概念，简要地复习一下某些已在中学学过，而又为学习本课程必不可少的内容，为以后各篇的学习作准备.

## 第一章　从初等数学向微积分的过渡

### §1　面 积 问 题

计算面积的重要性是不需多说的. 正因为计算面积的问题在生产斗争、科学实验，以至日常生活中是如此重要，所以它不仅成为初等几何的重要内容，而且在历史上也是微积分学的一个最早的起源问题. 下面就让我们通过面积问题来看一看怎样从初等几何向微积分过渡.

1. 多边形的面积

在初等几何里，我们首先会算矩形、三角形和梯形等简单图形

的面积，进而会算任何多边形的面积. 办法是：把多边形分解成许多三角形；算出这些三角形的面积，然后相加，就是多边形的面积.

特别，对于正多边形，我们有如下的面积公式：

$$S=\frac{1}{2}lh \tag{1}$$

其中 $l$ 是多边形的周长，$h$ 是边心距(图 I-1).

公式 (1) 是这样得来的：联结正多边形的中心 $O$ 和它所有的顶点，得到一些等腰三角形 (图 I-1)，每一个的面积都是 $\frac{1}{2}ah$，这里 $a$ 代表正多边形的边长. 把这些三角形的面积加起来，就是正多边形的面积：

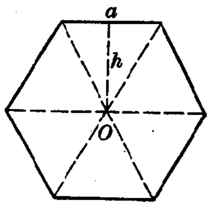



图 I-1

$$S=\left(\frac{1}{2}ah\right)n=\frac{1}{2}(na)h=\frac{1}{2}lh$$

这里 $n$ 是正多边形的边数，所以 $l=na$ 是周长.

2. 圆的面积　割圆术

上面我们已知正多边形的面积 $S$ 等于周长与边心距的乘积的一半，由于当圆内接正多边形的边数无限增加时，多边形的面积和圆的面积越来越接近，因此可以猜想到对于圆也会有类似的公式. 既然半径为 $R$ 的圆的周长是 $2\pi R$，所以面积便很可能是：

$$S=\frac{1}{2}(2\pi R)R=\pi R^2 \tag{2}$$

这正是我们在初等几何里很熟习的公式. 然而要完成这种从多边形到圆的过渡就要求人们在观念上、在思考方法上来一个突破.

问题的困难何在？多边形的面积其所以好求，是因为它的周界是一些直线段，我们可以把它分解成许多三角形. 而圆呢？周界是

处处弯曲的，困难就在一个“曲”字上面．在这里，我们面临着“曲”与“直”这样一对矛盾．

在形而上学看来，曲就是曲，直就是直，非此即彼；唯物辩证法则认为，在一定条件下，曲与直的矛盾可以互相转化．恩格斯深刻地指出：“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾，在一定条件下直线和曲线应当是一回事．”整个圆周是曲的，每一小段圆弧却可以近似地看成直的；就是说，在很小的一段上可以近似地“以直代曲”，即以弦代替圆弧．

按照这种辩证思想，我们把圆周分成许许多多的小段，比方说，分成 $n$ 个等长的小段，代替圆而先去考虑它的内接正 $n$ 边形(图 I-2)．根据公式(1)，这个正 $n$ 边形的面积为

$$S_n=\frac{1}{2}l_nR_n \tag{3}$$

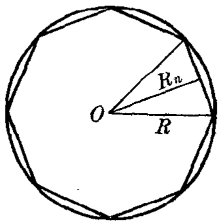


图 I-2

其中 $l_n$ 和 $R_n$ 分别是正 $n$ 边形的周长和边心距．当 $n$ 很大时，内接正 $n$ 边形的面积 $S_n$ 就很近似于圆的面积 $S$；$n$ 越大，近似程度越高．

但是，不论 $n$ 多么大，这样算出来的总还只是多边形的面积，无论如何它只是圆面积的近似值，而不是圆面积的精确值．问题并没有最后解决．

为了从近似值过渡到精确值，我们自然让 $n$ 无限地增大，记成 $n\to\infty$．直观上很明显，当 $n\to\infty$ 时，内接正 $n$ 边形的面积 $S_n$ 将趋近于圆面积 $S$，我们记成

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

其中 lim 是“limit”的缩写，表示极限的意思．同样很明显，当 $n\to\infty$ 时，内接正 $n$ 边形的周长 $l_n$ 趋近于圆周长 $l=2\pi R$，边心距 $R_n$ 趋近于圆的半径 $R$，即

$$\lim_{n\to\infty} l_n = l, \qquad \lim_{n\to\infty} R_n = R$$

因此，如果在(3)式中令 $n\to\infty$，这叫做取极限，就得到

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}l_nR_n\right)=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R=\pi R^2$$

这就导出了圆面积的公式.

上述用圆内接正多边形来推算圆面积的方法，是我国刘徽早在第三世纪就提出来了的，称为割圆术. 刘徽说:“割之弥细，所失弥少. 割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”这句话的前一半是对的，后一半则不确切，因为永远没有“不可割”的时候，也永远不会“与圆周合体而无所失”.

3. 曲边梯形的面积

计算圆面积所依据的基本观念和思考方法可以用于计算各种曲边形的面积.

**例** 设给了一个如图 I-3 所示的曲边梯形，其中只有一个曲边，而它是抛物线 $y=x^2$ 的一段. 试计算这个曲边梯形的面积.

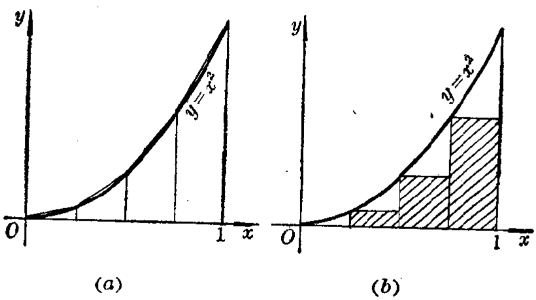



图 I-3

由于有一边是曲的，面积不能用初等的办法计算. 在这里，我们面临的也是曲与直的矛盾.

为了解决这一矛盾，我们把 $x$ 轴上从 0 到 1 那一段分成许多小段，再从所有分点引平行于 $y$ 轴的直线，而将整个曲边梯形分成

许多很窄的竖条．虽然每一个竖条的上面那个边都是曲的，但由于竖条很窄，从计算面积的角度来看，我们可以或者象图 I-3 $(a)$ 中那样把它近似地看成小梯形，或者思想更解放一些，象图I-3$(b)$中那样把它近似地看成小矩形．在这个意义上，"以直代曲"．

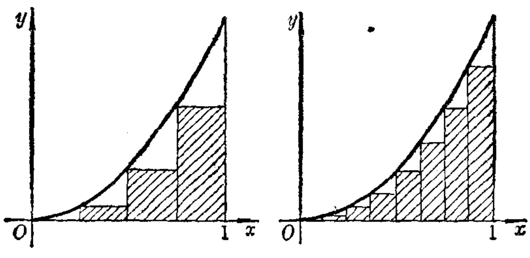
下面按第二种想法来进行计算．假设我们将 $x$ 轴上从 0 到 1 那一段分成 $n$ 个相等的小段，则每一段的长为$\frac{1}{n}$，分点的坐标分别为$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$．小矩形共有 $n-1$ 个，它们的宽度都是$\frac{1}{n}$，而高度则分别是$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \cdots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$（注意曲边梯形的上面那个曲边是抛物线 $y=x^2$），因此，它们的面积分别等于

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}, \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}, \cdots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

把这些小面积加起来就得到曲边梯形面积的一个近似值

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] \end{aligned} \tag{4}$$

（它就是图 I-3$(b)$ 中画斜线的那个多边形的面积）．当 $n$ 增大时，近似程度随着提高（图 I-4）．




$(a)$ $n=4$　　$(b)$ $n=8$

图　I-4

和圆面积的计算一样，我们让 $n$ 无限地增大，来考察 $S_n$ 的极限，这个极限就应该是曲边梯形的面积 $S$：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

为此，我们利用公式

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

将(4)写成

$$S_n=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \qquad (5)$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1\times 2}{6}=\frac{1}{3}$

故由(5)式得到

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

即：这一曲边梯形的面积等于 $\frac{1}{3}$.

以上的计算过程，简单说来就是：分割(分成许多窄条)，局部“以直代曲”(每个窄条近似地换成小矩形)，求和得近似值(把这些小矩形的面积加起来)，取极限得精确值．这样得到的极限值，就叫做积分．积就是积累的意思．普通加法是一种积累，积分也是一种积累，不过这种积累与普通加法不同，要经过取极限的过程．我们将在第Ⅲ篇中详细讨论．

## §2 切线问题与速度问题

### 1. 曲线的切线斜率

许许多多的实际问题都要求会计算曲线的切线斜率．正因为

这样，在历史上，切线问题也是微积分学最早的起源问题之一.

**例 1** 求抛物线 $y=x^2$ 在任意一点 $M_0(x_0,y_0)$ 的切线斜率.

切线 $M_0T$(图 I-5)作为一条直线，只要知道它上面任意两个点的坐标 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，根据

$$斜率=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

就可以算出它的斜率. 现在 $M_0$ 这一点的坐标 $(x_0, y_0)$ 是已知的，如果还能知道切线上另一点的坐标，那就好了，问题是不知道.

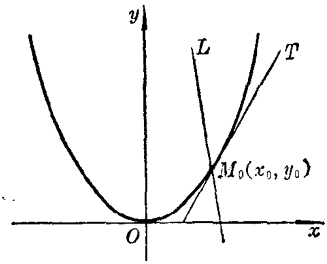



图 I-5

然而，$M_0T$ 不是一条一般的直线，而是曲线的切线. 既然是曲线的切线，当然它就与这条曲线有密切的联系. 我们只有从切线与曲线的联系中去考察，才有可能算出切线的斜率. 切线与曲线都通过点 $M_0$，这是它们之间的一个联系. 但仅仅看到这一点还是不够的. 事实上，经过点 $M_0$ 的直线多得很，例如图 I-5 中的直线 $L$. 这就是说，不能孤立地只看到切线与曲线在 $M_0$ 这一点有关，而要看到它与曲线上其他点有关.

大家不妨考察一下用格尺画切线的过程. 开始，格尺放在曲线上，除了点 $M_0$ 外，常常要与曲线在另一点 $M$ 相交 (图 I-6)，格尺成了曲线的割线. 不断改变格尺的位置，当点 $M$ 越靠近点 $M_0$ 时，格尺的位置便越接近曲线在点 $M_0$ 的切线.

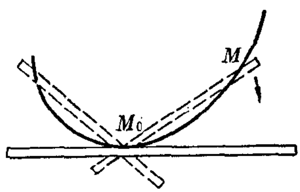



图 I-6

根据以上的分析，我们在曲线上另取一点 $M$，先来计算割线 $M_0M$ 的斜率(图 I-7). 设点 $M$ 的坐标为 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，则割

线 $M_0M$ 的斜率为

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

因为 $M_0(x_0,y_0)$ 和 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 都是抛物线 $y=x^2$ 上的点，所以

$$y_0=x_0^2,\quad y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2$$

从而

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2\\&=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\end{aligned}$$

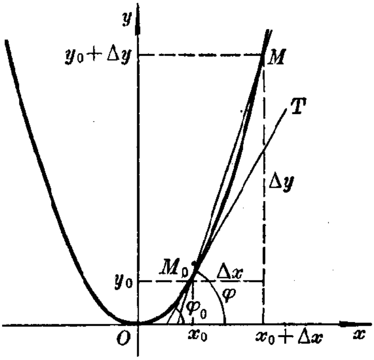


图 I-7

于是
$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x \tag{1}$$

当点 $M$ 向 $M_0$ 靠近时，割线 $M_0M$ 就绕着点 $M_0$ 转动，而向着切线 $M_0T$ 的位置变化．点 $M$ 与点 $M_0$ 越靠近，即 $\Delta x$ 越小，割线 $M_0M$ 就越接近于切线 $M_0T$，而割线 $M_0M$ 的斜率 $\mathrm{tg}\varphi$ 就越接近于切线 $M_0T$ 的斜率 $\mathrm{tg}\varphi_0$，换言之，割线斜率 $\mathrm{tg}\varphi$ 作为切线斜率 $\mathrm{tg}\varphi_0$ 的近似值，近似程度就越高．但是，不论 $\Delta x$ 多么小，割线总还是割线，割线斜率 $\mathrm{tg}\varphi$ 总还只是切线斜率 $\mathrm{tg}\varphi_0$ 的近似值，而不是它的精确值．

为了解决近似与精确的矛盾，从割线斜率过渡到切线斜率，我们自然让 $\Delta x$ 无限制地变小，或者说让 $\Delta x$ 趋近于0，并且记成 $\Delta x\to 0$．很明显，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线斜率 $\mathrm{tg}\varphi$ 将趋近于切线斜率 $\mathrm{tg}\varphi_0$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}\varphi_0$$

同样很明显，当 $\Delta x\to 0$ 时，(1)式右端将趋近于 $2x_0$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

因此，如果在割线斜率的计算公式(1)中，令$\Delta x\to 0$，取极限，就得到

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

切线斜率 $\operatorname{tg}\varphi_0$ 就这样作为割线斜率 $\operatorname{tg}\varphi$ 的极限值计算出来了。例如当 $x_0=2$ 时，$y_0=2^2=4$，曲线 $y=x^2$ 在 $M_0(x_0,y_0)=(2,4)$这点的切线斜率 $\operatorname{tg}\varphi_0=2x_0=4$. 同样，曲线在 $M_0(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$点的切线斜率 $\operatorname{tg}\varphi_0=2x_0=1$.

上述计算过程简单说来就是：先以割线代替切线，算出割线的斜率，然后通过取极限，从割线过渡到切线，求得切线的斜率.

2. 变速运动的速度

下面转到另一个问题：求物体运动的速度. 这个问题表面上与切线问题毫不相干. 但是，下面就要看到，它们在处理方法上却是极其相似的.

运动有两种：一种是匀速运动，快慢始终保持不变；一种是变速运动，时而快，时而慢. 客观实际中的运动常常是变速的，例如，汽车的行驶，飞机的飞行，物体的降落和抛射等，就都是变速运动.

匀速运动的速度我们早已会求，有公式

$$\text{速度}=\frac{\text{路程}}{\text{时间}}=\frac{s}{t} \tag{2}$$

现在我们要着重研究的是如何求变速运动的速度.

**例2** 求自由落体的运动速度.

常识告诉我们，从空中掉下来的物体越落越快，速度是变的. 假如物体在初始时刻是静止的，并且忽略空气阻力的作用，则在时间 $t$ 内下落的路程 $s$ 由下列公式表出：

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

其中 $g\approx9.81$ 米/秒$^2$ 是重力加速度. 现在要计算它在每一个时刻的速度,即所谓瞬时速度.

对于速度保持不变的匀速运动，我们有简单的公式(2)可用，将走过的路程除以经历的时间就得出各个时刻的速度. 而现在考察的自由落体运动,其速度是随时间而变的，这时公式(2)就不能用了,路程除以时间只能得出这段时间内的平均速度,而不可能得出这段时间内每个时刻的速度. 这就是困难，就是矛盾——速度的变与不变的矛盾.

如同曲与直的矛盾双方可以互相转化一样，速度的变与不变这一对矛盾也可以互相转化. 在整段时间内,速度是变的,但在很小的一段时间内,速度可以近似地看成不变，换句话说,可以近似地“以匀速代变速”.

按照这种想法，为了求自由落体在时刻 $t_0$ 的瞬时速度 $v_0$，我们考察从时刻 $t_0$ 到时刻 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的运动，这里 $\Delta t$ 代表从 $t_0$ 开始所经过的时间. 根据(3)式，在这段时间内自由落体所走过的路程为

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

如果 $\Delta t$ 很小,在这段时间内，运动就可以近似地看成是匀速的，因而就可以用这段时间内的平均速度

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t \tag{4}$$

来近似地代替时刻 $t_0$ 的瞬时速度 $v_0$. $\Delta t$ 越小，近似程度越高. 但是，不论 $\Delta t$ 多么小，这个平均速度总还只是瞬时速度 $v_0$ 的近似值，而不是它的精确值. 速度的变与不变的矛盾变成了近似与精确的矛盾.