

编 者 的 话

本书根据 1982 年教育部审定的中等专业学校《数学教学大纲(试行草案)》(招收高中毕业生的工科专业通用)编写。本书内容属于选学部分,供有关专业选用。

本书共分三章: 向量代数与空间解析几何; 多元函数微分学; 二重积分。内容以讲清概念与计算方法为主,并通过例题介绍有关方面的应用。

本书由北京工业学院孙树本同志主审,参加审稿的还有杨裕生、王维锦、陈德彰、索润普。审稿的同志对本书提出了很多宝贵的意见,在此,表示衷心的感谢。

本书由张齐金、罗崇楚、朱镗道编写。限于编者水平,加以编写时间仓促,错误和不当之处在所难免。欢迎读者批评指正。

目 录

第一章 向量代数与空间解析几何

§ 1-1 向量及其加减法 向量与数量的乘法	1
§ 1-2 空间直角坐标系 向量的坐标	7
§ 1-3 向量的数量积与向量积	16
§ 1-4 平面的方程	27
§ 1-5 直线的方程	36
§ 1-6 曲面的方程	44
§ 1-7 空间曲线	53
复习题一	61

第二章 多元函数微分学

§ 2-1 多元函数的概念	65
§ 2-2 偏导数	76
§ 2-3 全微分	85
§ 2-4 多元复合函数的求导法则	95
§ 2-5 二元函数的极值	105
§ 2-6 最小二乘法	118
复习题二	125

第三章 二重积分

§ 3-1 二重积分的概念和性质	128
§ 3-2 二重积分的计算方法	139
§ 3-3 二重积分应用举例	160
复习题三	171
习题答案	173

第一章 向量代数与空间解析几何

与平面解析几何相仿, 空间解析几何也是用坐标法, 把空间的点与三个有次序的实数、空间的图形与方程对应起来, 从而用代数方法研究空间的几何问题. 正如平面解析几何的知识是学习一元函数微积分的重要基础一样, 空间解析几何的知识对于学习多元函数微积分也是必不可少的.

本章首先介绍在工程技术上有着广泛应用的向量代数的基础知识, 然后以向量为工具讨论空间的平面和直线, 最后介绍一些最常见的空间曲面和曲线.

§ 1-1 向量及其加减法 向量与数量的乘法

一、向量的概念

在自然科学中经常遇到的量有两类: 一类是只有大小没有方向的量, 这类量叫做数量(或标量). 如长度、面积、体积、质量、密度、功、能等等都是数量; 另一类是不仅有大小而且有方向的量, 这类量叫做向量(或矢量). 如力、力矩、位移、速度、加速度等等都是向量.

数量用一个数就可以表示, 而向量则不然. 向量的表示有几何表示及坐标表示两种, 本节先介绍向量的几何表示.

所谓向量的几何表示,就是用有向线段(一条带箭头的线段)表示向量。线段的长度表示向量的大小,箭头的指向表示向量的方向。

图 1-1 是表示以 A 为起点,以 B 为终点的向量,记作 $\overrightarrow{AB}$ 。此外,有时也用黑体字母或用字母上面加箭头来表示

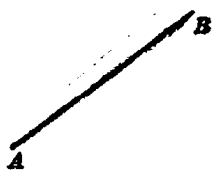


图 1-1

向量,例如 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{F}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{i}$ 、 $\vec{F}$ 等等。

向量的大小叫做向量的模。向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\vec{i}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{i}|$ 。模等于 1 的向量叫做单位向量。模等于零的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$ 。零向量没有确定的方向,也就是说它的方向是任意的。

如果两个向量的方向相同并且模相等,我们就称这两个向量相等。根据这个规定,一个向量和它经过平行移动以后所得的向量都是相等的。这种保持大小和方向而可以自由平移的向量叫做自由向量^①。今后,我们只讨论自由向量(简称向量)。

二、向量的加减法

在物理学中,通过研究力的合成、速度的合成等,总结出了一般向量加法的平行四边形法则:

如图 1-2 所示,令 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$, 那末对角线向量 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ 就称为 $\mathbf{a}$ 与

① 除了自由向量,还有点向量和滑动向量。起点和方向相同并且模相等时才算相等的向量,叫做点向量(或胶着向量)。在同一条直线上方向相同并且模相等时才算相等的向量,叫做滑动向量。

b 的和, 记作

$$c = a + b$$

由图 1-2 容易看出, 如果平移向量 b , 使 b 的起点与 a 的终点重合, 那末由 a 的起点到 b 的终点的向量就是 $a + b$. 这种求两个向量和的法则叫做三角形法则.

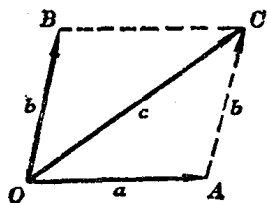


图 1-2

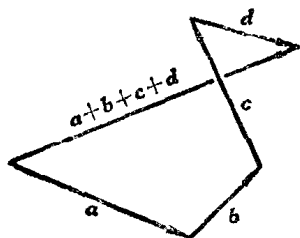


图 1-3

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和. 例如, 求已知向量 a, b, c, d 的和时, 只要依次把后一向量的起点放在前一向量的终点上, 然后从 a 的起点向 d 的终点所引的向量就是和 $a + b + c + d$ (图 1-3). 这个法则叫做向量加法的多边形法则.

在实际问题中, 还经常遇到大小相等而方向相反的向量, 如作用力和反作用力等. 称与 a 大小相等而方向相反的向量为 a 的负向量 (或反向量), 记作 $-a$.

例如在图 1-2 中, $\overrightarrow{CB} = -a$.

有了负向量的概念, 就可以定义两个向量 a 与 b 的差为:

$$a - b = a + (-b)$$

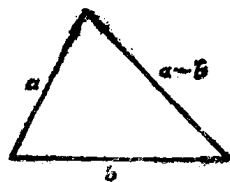


图 1-4

按三角形法则, 差向量 $a - b$ 的求法如下: 把 a 与 b 的起点

重合 则由 b 的终点到 a 的终点的向量, 就是差向量 $a-b$, 如图 1-4 所示.

容易验证, 向量的加法有下列运算规律:

(i) $a+b=b+a$; (交换律)

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$; (结合律)

(iii) $a+0=a$;

(iv) $a+(-a)=0$.

可见, 向量的加法运算规律与实数的加法运算规律相同.

三、向量与数量的乘法

在应用中常遇到向量与数量的乘法, 例如将速度 v 增大二倍, 就是速度的方向不变, 只是大小增大二倍, 我们可以记为 $2v$. 由此, 引出向量与数量相乘(简称数乘)的定义如下.

定义 数量 λ 与向量 a 的乘积, 记为 λa , 它是这样一个向量: 当 $\lambda > 0$ 时与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时与 a 反向; 而它的模是 $|a|$ 的 $|\lambda|$ 倍, 即 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$. 当 $\lambda = 0$ 时, λa 是零向量, 即 $\lambda a = 0$.

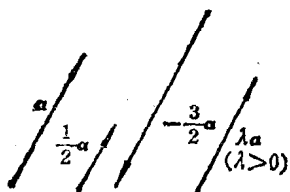


图 1-5

图 1-5 是向量数乘的几何表示.

根据数乘的定义容易得到:

(1) 如果 $a = \lambda b$, λ 为数量, 那末向量 a 与 b 平行; 反之, 如果向量 a 与 b 平行, 那末 $a = \lambda b$, 其中 λ 为某一数量. 这就是说, 两向量 a, b 平行^①的充要条件为 $a = \lambda b$.

^① 两向量平行, 也称为两向量共线.

(2) 如果与非零向量 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量为 $\mathbf{a}^0$, 则

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^0$$

从而

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果, 是一个与原向量同向的单位向量.

(3) 数乘有下列运算规律:

(i) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a});$ (结合律)

(ii) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a},$
 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$ (分配律)

例 1 用向量方法证明三角形两腰中点的连线平行于第三边, 且等于第三边的一半.

证明 如图 1-6 所示, 设 P 、 Q 分别为 $\triangle ABC$ 的两腰 AB 及 BC 的中点, 则

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

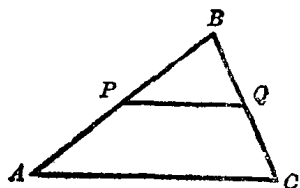


图 1-6

由两向量平行的充要条件可知, $\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 平行. 从而 $PQ \parallel AC$.

又因为 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|$, 故线段 PQ 等于线段 AC 的一半.

例 2 设 M 是三角形 ABC 的重心, 证明对任意一点 O ,

有

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

证明 如图 1-7 所示.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

$$= \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})$$

$$+ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

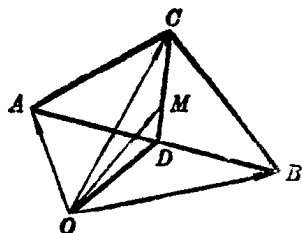


图 1-7

习 题 1-1

1. 给定非零向量 a 、 b 、 c ，作出下列各向量：

(1) $b - a$; (2) $-a - b$; (3) $2a + \frac{1}{3}b$;

(4) $\frac{1}{2}a - 3b$; (5) $a + b - c$; (6) $a - 2b - 2c$;

(7) $2a + 3b - \frac{1}{2}c$.

2. 已知 $|a| = 13$, $|b| = 19$, $|a + b| = 24$, 求 $|a - b|$.

3. 用三角形法则验证: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

4. 说明下列各式的几何意义:

$$(1) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|; \quad (2) |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||;$$

$$(3) \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

5. 向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 具有怎样的特征, 才能满足下列各等式:

$$(1) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|; \quad (2) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|};$$

$$(3) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|; \quad (4) |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

6. M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. 试用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$ 、 $\overrightarrow{MB}$ 、 $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

7. 如果四边形对角线互相平分, 则它是平行四边形. 试用向量方法证明之.

8. 设 A, B, C, D 是一个四面体的顶点, M, N 分别是棱 AB, CD 的中点, 证明

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

9. 用向量方法证明梯形两腰中点的连线平行于底边, 且等于两底和的一半.

§ 1-2 空间直角坐标系 向量的坐标

在讨论向量的坐标表示前, 我们先引进空间直角坐标系.

一、空间直角坐标系

在空间选定一点 O , 过点 O 作三条互相垂直的数轴 Ox 、 Oy 、 Oz , 它们都以点 O 为原点且一般具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称坐标轴. 这样的三条轴就组成了一个空间直角坐标系. 点 O 称为坐标原点(或原点).

空间直角坐标系分为右手系和左手系. 我们采用右手系, 即当 x 轴正向按右手握拳方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正

向时, 拇指的指向就是 z 轴的正向. 如图 1-8 所示.

三条坐标轴两两确定互相垂直的三个平面 xOy 、 yOz 、 zOx 统称为坐标面. 它们把整个空间分成八个部分, 每一个部分称为一个卦限. 位于 xOy 坐标面的第 I、II、III、IV 象限上方的部分依次称为第 I、II、III、IV 卦限; 而位于其下方的部分依次称为第 V、VI、VII、VIII 卦限. 如图 1-9 所示.

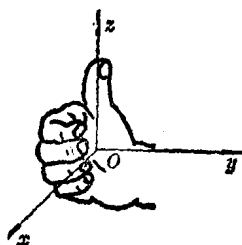


图 1-8

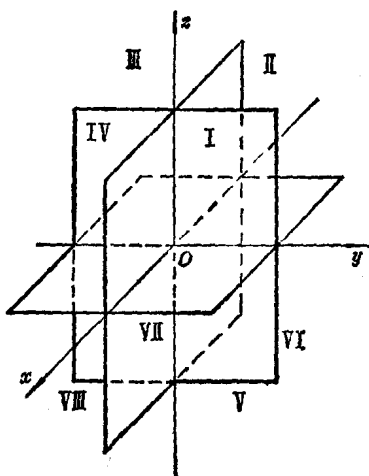


图 1-9

取定了空间直角坐标系后, 就可以建立起空间的点与有序实数组 (x, y, z) 之间的对应关系.

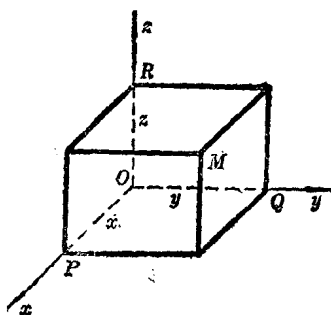


图 1-10

设 M 为空间一点, 过点 M 分别作三个垂直于 x 轴、 y 轴与 z 轴的平面, 它们与坐标轴的交点 P 、 Q 、 R 对应的三个实数依次为 x 、 y 、 z (图 1-10). 于是点 M 确定了一个有序实

数组 (x, y, z) . 反之, 如果给定了一有序实数组 (x, y, z) , 我们依次在 x 轴、 y 轴、 z 轴上取与 x, y, z 相应的点 P, Q, R , 然后过 P, Q, R 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴, 这三个平面交于空间一点 M . 因此, 有序实数组 (x, y, z) 与空间的点一一对应. (x, y, z) 就叫做点 M 的直角坐标, 并依次称 x, y, z 为点 M 的横标、纵标和竖标. 坐标为 (x, y, z) 的点 M , 记作 $M(x, y, z)$.

显然, 原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$; x 轴、 y 轴和 z 轴上的点的坐标分别是 $(x, 0, 0)$ 、 $(0, y, 0)$ 、 $(0, 0, z)$; xOy 、 yOz 、 zOx 三个坐标面上的点的坐标分别是 $(x, y, 0)$ 、 $(0, y, z)$ 、 $(x, 0, z)$.

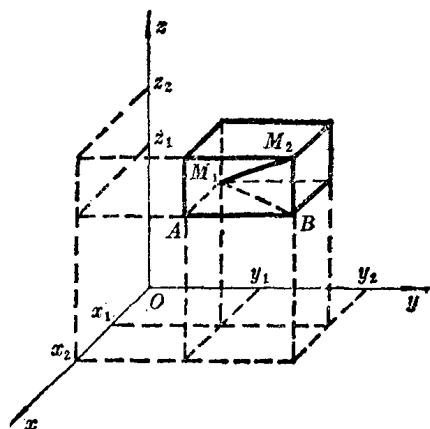


图 1-11

若 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点, 过 M_1, M_2 分别作平行于各坐标面的平面, 组成一个长方体, 它的棱与坐标轴平行 (图 1-11). 由于

$$|M_1A| = |x_2 - x_1|$$

$$|AB| = |y_2 - y_1|$$

$$|BM_2| = |z_2 - z_1|$$

所以空间任意两点的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1B|^2 + |BM_2|^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{|M_1A|^2 + |AB|^2 + |BM_2|^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}
\end{aligned}$$

即 $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 和原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 1 在 y 轴上求到两定点 $A(1, -2, 1)$ 与 $B(2, 1, -2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 y 轴上, 所以设该点为 $M(0, y, 0)$, 按题意有

$$|MA| = |MB|$$

即

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(0-1)^2 + (y+2)^2 + (0-1)^2} \\
&= \sqrt{(0-2)^2 + (y-1)^2 + (0+2)^2}
\end{aligned}$$

解此方程, 得

$$y = \frac{1}{2}$$

故所求的点为 $M\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

二、向量的坐标表示式

设有一个起点为原点, 而终点为 $M(x, y, z)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}$ (图 1-12), 用 i, j, k 分别表示沿 x 轴、 y 轴和 z 轴正向的单位向量 (称为基本单位向量). 则由向量的加法, 得

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} \\
&= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}
\end{aligned}$$

由于 $\overrightarrow{OP} = xi$, $\overrightarrow{OQ} = yj$, $\overrightarrow{OR} = zk$, 于是

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

上式称为向量 $\vec{OM}$ 的坐标表示式, 简记为

$$\vec{OM} = \{x, y, z\}$$

称 x, y, z (即 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的系数) 为向量 $\vec{OM}$ 的坐标. 由于有序实数组 (x, y, z) 与点 M 是一一对应的, 所以有序数组 (x, y, z) 与起点在 O 点, 终点在 M 的向量 $\vec{OM}$ 也有一一对应关系.

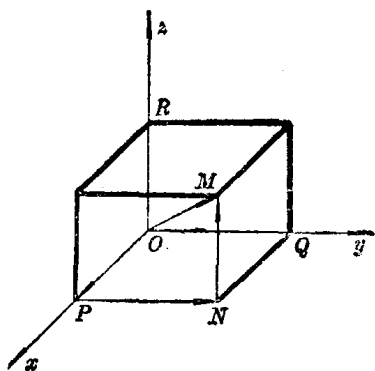


图 1-12

有了向量的坐标表示式, 就可以把由几何所规定的向量运算转变为向量坐标之间的数量运算.

设 $\mathbf{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则有

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda x_1 \vec{i} + \lambda y_1 \vec{j} + \lambda z_1 \vec{k} \quad (\lambda \text{ 为实数})$$

即

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$$

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$$

由此可见, 对向量进行加、减及数乘, 只须对向量的各坐标分别进行相应的数量运算就行了.

例 2 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求向量 $\vec{M_1M_2}$ (图 1-13) 的坐标表示式.

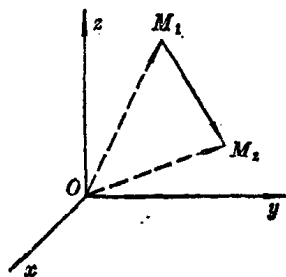


图 1-13

解 作向量 $\vec{OM_1}$ 、 $\vec{OM_2}$ 、 $\vec{M_1M_2}$, 则

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\
&= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\
&\quad - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \\
&= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}
\end{aligned}$$

例 2 表明：任一向量的坐标，等于其终点和起点的相应坐标之差。

例 3 设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, 求 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 及 $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} &= 3(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + 2(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\
&= (9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \\
&= 13\mathbf{i} + 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

三、向量的模及方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模及方向表示(即几何表示)，也可以用它的坐标表示(即代数表示)。那末，又如何用向量的坐标表示它的模和方向呢？

任给一向量

$$\mathbf{a} = \{x, y, z\}$$

从图 1-14 容易得到

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}| &= |\overrightarrow{OM}| \\
&= \sqrt{OP^2 + OQ^2 + OR^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned} \tag{1-1}$$

这就是向量 $\mathbf{a}$ 的模的坐标表示式。它与点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离公式是一样的。

由图 1-14 还可以看出, 向量 $\mathbf{a}$ 的方向还可以由这向量与三条坐标轴正向的夹角 α 、 β 、 γ 完全确定。称 α 、 β 、 γ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角, 并规定

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi,$$

$$0 \leq \gamma \leq \pi$$

因为

$$\angle MOP = \alpha, \text{ 且 } MP \perp OP$$

所以

$$x = |\mathbf{a}| \cos \alpha$$

同理

$$y = |\mathbf{a}| \cos \beta$$

$$z = |\mathbf{a}| \cos \gamma$$

称 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦。显然当方向余弦确定后, 方向角 α 、 β 、 γ 就确定了, 从而向量的方向也就确定。由上面的关系式及 (1-1) 式, 得

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

(1-2) 式称为方向余弦的坐标表示式。

把 (1-2) 式中各等式两边平方后再相加, 得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1-3)$$

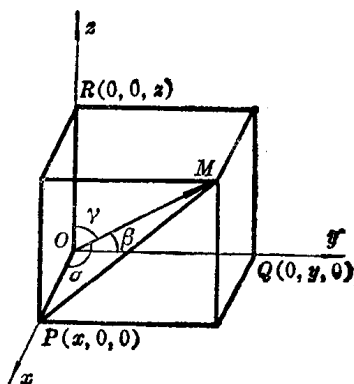


图 1-14

(1-3)式表明: 向量 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 的模为1, 即以向量 α 的方向余弦为坐标的向量是与 α 同向的单位向量; 同时, 向量的三个方向角 α, β, γ 是互相制约的, 三者必须满足(1-3)式.

例4 已知两点 $P(0, 1, 2)$ 和 $Q(-1, 0, 3)$, 求与 $\overrightarrow{PQ}$ 同向的单位向量及其方向余弦.

$$\begin{aligned}\text{解 因为 } \overrightarrow{PQ} &= (-1-0)\mathbf{i} + (0-1)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} \\ &= -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

于是, 与 $\overrightarrow{PQ}$ 同向的单位向量 α^0 为

$$\alpha^0 = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

例5 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $\alpha = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ 的方向取线段 $|\overrightarrow{AB}| = 34$, 求 B 点的坐标.

解 设 B 点的坐标为 (x, y, z) , 则 $\overrightarrow{AB} = \{x-2, y+1, z-7\}$. 按题意, 有 $|\overrightarrow{AB}| = 34$, 并且 $\overrightarrow{AB}$ 与 α 同向(即它们有相同的方向余弦).

现在 α 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 9^2 + (-12)^2}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos\beta = \frac{9}{17}, \quad \cos\gamma = -\frac{12}{17}$$

而 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x-2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{x-2}{34}, \quad \cos \beta = \frac{y+1}{34}, \quad \cos \gamma = \frac{z-7}{34}$$

从而
$$\frac{x-2}{34} = \frac{8}{17}, \quad \frac{y+1}{34} = \frac{9}{17}, \quad \frac{z-7}{34} = -\frac{12}{17}$$

解得
$$x=18, y=17, z=-17$$

即 $(18, 17, -17)$ 就是所求点 B 的坐标。

习 题 1-2

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点:

$$A(2, 0, 0); B(0, -1, 2); C(-1, 0, -2);$$

$$D(-1, 2, -1); E(-2, -3, -2); F(2, 3, 4).$$

2. 自点 $A(1, -2, 3)$ 和 $B(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 并写出各垂足的坐标。

3. 分别求出 $A(-1, 2, -3)$ 与 $B(x_0, y_0, z_0)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标面为对称的点的坐标。

4. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到原点与各坐标轴的距离。

5. (1) 在 y 轴上找一点, 使它与 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(0, 1, -1)$ 两点等距;

(2) 在 yOz 平面上找一点, 使它与 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 、 $C(0, 5, 1)$ 三点等距。

6. 试证以 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

7. $A(1, 2, -3)$ 、 $B(2, -3, 5)$ 为平行四边形的相邻二顶点, $H(1, 1, 1)$ 为其对角线的交点, 求其余二顶点。

8. 求 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模及方向余弦, 已知

(1) $P_1(0, 0, -1)$, $P_2(2, 5, 5)$;

(2) $P_1(1, -3, 3)$, $P_2(4, 2, -1)$ 。