全国成人高等教育规划教材

概率统计

教育部高等教育司组编

范培华 主编

北京大学出版社

全国成人高等教育规划教材

概 率 统 计

教育部高等教育司组编

主编 范培华

撰稿 袁荫棠

陈光潮

范培华

北 京 大 学 出 版 社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/范培华等主编．—北京：北京大学出版社，1999.6
ISBN 7-301-04189-6

Ⅰ．概…　Ⅱ．范…　Ⅲ．①概率论-成人教育-教材 ②数理统计-成人教育-教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17254 号

书　　名：概率统计
著作责任者：范培华　主编
责 任 编 辑：刘灵群
标 准 书 号：ISBN 7-301-04194-2/F・303
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752027
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：兴盛达激光照排中心
印　刷　者：北京飞达印刷厂印刷
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　8.75 印张　223 千字
1999 年 6 月第一版　2001 年 9 月第二次印刷
定　　　价：11.00 元

出版说明

为了加强成人高等教育教学的宏观管理，指导并规划成人高等教育的教学工作，保证达到培养规格，教育部于今年4月颁布了全国成人高等教育公共课和经济学、法学、工学等学科门类主要课程的教学基本要求。教学基本要求是成人高等教育的指导性教学文件，是成人高等教育开展有关课程教学工作和进行教学质量检查的重要依据。为了更好地和更迅速地贯彻这个教学基本要求，我司又组织制订了全国成人高等教育主要课程教材建设规划。经过有关出版社论证申报和教育部组织的成人教育专家评审，确定了各门课程教材的主编人选及承担出版任务的出版社。

承担任务的出版社，遴选了学术水平高、有丰富成人教育经验的专家参加教材及教学辅助用书的编写和审定工作。新编教材尽可能符合成人学习特点，较好地贯彻了成人高等教育教学基本要求。推广使用这套教材，对于加强成人高等教育的教学工作，提高教学质量，促进成人高等教育的改革与发展具有十分重要的意义。

首批完成的有公共课和经济学、法学、工学三大学科门类共81门主要课程的教材。由于此项工作是一项基础性工作，具有一定的开创性，可能存在不完善之处。我司将在今后的教学质量检查评估中，及时总结经验，认真听取各方反馈意见，根据教学需要，适时组织教材的修订工作。

教育部高等教育司

一九九八年十二月一日

各章撰写人员：

第一章、第二章　袁荫棠（中国人民大学教授）

第三章、第四章　陈光潮（暨南大学副教授）

第五章、第六章　范培华（北京大学教授）

目　录

第一章　随机事件与概率

【内容提示】 在本章学习中，读者应该了解样本空间与随机事件的概念，掌握随机事件间的关系与运算法则；理解随机事件的频率与概率、条件概率等概念，掌握概率的基本性质并会计算较简单的古典型概率；掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式；理解随机事件的独立性与独立重复试验的概念并掌握计算有关事件概率的方法及伯努利公式.

引　言

在自然界和人类社会中，存在着两类不同性质的现象. 有一类现象，它出现与否完全取决于它所依存的条件：当条件满足时，它一定发生，否则一定不发生. 比如，同性电荷一定不会相互吸引，在地球上向上抛掷一颗石子必然下落，在标准大气压下，液态水的温度超过 100℃时一定会汽化等等. 这种在一定条件下必然发生的现象，即我们可以根据其赖以存在的条件，事先准确地断定它们未来结果的现象，称为**确定性现象**. 另外还有一类现象，在相同的可控制条件下进行一系列重复的观察或实验，每次出现的可能结果不止一个，在每次试验或观察之前无法预知确切的结果，即呈现出不确定性. 这类现象我们称之为**随机现象**. 比如在相同条件下抛掷同一枚硬币，其结果可能是正面（徽花面）朝上，也可能是反面（数字面）朝上，并且无论怎样控制抛掷条件，在每次抛掷之前都无法肯定抛掷的结果是什么. 另外诸如保险公司的年赔偿金额，掷一颗骰子出现的点数等等，事先我们都无法确切地预言它们的结果.

人们经过长期实践并深入研究之后，发现随机现象虽然就每次实验或观察结果来说，它具有不确定性，但在大量重复实验或观察中它的结果却呈现出某种量的规律性. 例如，多次重复抛掷一枚匀称的硬币，正面出现的次数大约为抛掷总次数的一半；多次重复掷一颗匀称的骰子，5 点出现的次数大约占总次数的 1/6. 这种在大量重复实验或观察中所呈现出的量的规律性，我们称为**随机现象的统计规律性.**

概率论与数理统计是研究随机现象量的规律性的一门重要的应用数学学科. 通常认为概率论是数理统计的基础，数理统计是概率论的一种应用. 概率统计是近代数学的重要组成部分，它在自然科学、社会经济等众多领域中有着广泛的应用. 特别在经济全球化、社会信息化的今天，概率论的理论与数理统计的方法更是近代经济理论的研究与应用的重要数学工具.

§1.1 随 机 事 件

一、样本空间与随机事件

在概率论里，我们把对随机现象进行的实验或观察统称为**随机试验**，简称**试验**，通常用字母 E 表示. 例如，检验一批产品中任意一个产品的质量；一条自动生产线在两次调整间生产的合格品个数；抛掷一枚匀称的硬币；观察社会对某种商品的日需求量等等都是随机试验. 概率论中所研究的随机试验具有下面三个特点：

1. 在给定的一组条件下，试验可以或原则上可以重复进行；

2. 每次试验的结果具有多种可能性，但是在试验之前可以明确一切可能出现的基本结果；

3. 在具体的一次试验中，某种结果出现与否是不确定的，在试验之前不能准确地预言该次试验中将会出现哪一种结果.

由一个特定随机试验所有可能发生的基本结果组成的集合，称为该试验的**样本空间**. 通常用 Ω 表示. 样本空间的每一个元素，即试验的每一个基本结果，称为一个**样本点**. 用小写字母 ω 表示.

例如，掷一枚硬币的试验，其样本空间由两个样本点组成，即 $\Omega=\{$正面，反面$\}$.

一个特定随机试验的任一个基本结果，即样本空间的任意一个样本点 ω 组成的单点集合，称为**基本随机事件**，简称**基本事件**. 样本空间 Ω 的一个子集，称为是该试验的一个**随机事件**. 通常用大写字母 A,B,C 等表示随机事件. 随机事件简称为事件. 由于每次试验中一定有样本空间 Ω 中的某一个样本点发生，因此称样本空间 Ω 为**必然事件**，称空集 $\varnothing$ 为**不可能事件**. 显然，它在每次试验中一定都不发生.

综上所述，我们可以直观地理解为随机试验的结果称为随机事件，除 Ω 和 $\varnothing$ 之外，任一随机事件在随机试验中可能发生，也可能不发生. 随机事件 A 在某一随机试验中发生，当且仅当属于 A 的某一个样本点在随机试验中发生. 必然事件 Ω 在每次随机试验中都一定发生，不可能事件 $\varnothing$ 则一定不发生. 在这里，我们的定义中把两个确定性的事件 Ω 与 $\varnothing$ 作为两个特殊的随机事件来处理了.

例 1 设随机试验 E 是掷一颗骰子，观察其出现的点数. 记事件 A 表示掷出奇数点，B 表示掷出偶数点，C 表示掷出点数小于 2，D 表示掷出点数大于 2. 写出该随机试验的样本空间 Ω 以及随机事件 A,B,C,D 的集合.

解 由于掷一颗骰子的试验，所有可能出现的基本结果只有六个，即 1 点，2 点，…，6 点. 也就是说样本空间 Ω 中只有 6 个样本点.

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},\quad A=\{1,3,5\},$$
$$B=\{2,4,6\},\quad C=\{1\},\quad D=\{3,4,5,6\}.$$

如果用 A_i 表示掷出 i 点. 则 $A_i=\{i\}(i=1,2,\cdots,6)$都是只包含一个样本点的事件,即 A_i 都是基本事件. 随机事件 A 是由 A_1,A_3,A_5 这三个基本事件复合而成的事件. 我们说"随机事件 A 发生",即"掷出点数为奇数点",当且仅当 A_1,A_3,A_5 这三个基本事件中有一个发生.

例 2 抛掷一枚硬币写出该随机试验的全部基本事件.

解 抛掷一枚硬币,只有正面向上和反面向上两种可能出现的基本结果. 因此该随机试验只有两个基本事件 A_1 与 A_2. 即$A_1=$"正面向上",$A_2=$"反面向上".

例 3 从 0,1,2,3 四个数字中先后取出两个不同的数字组成一个数. 事件 A 表示组成两位数,事件 B 表示组成两位偶数,事件 C 表示组成偶数,事件 D 表示组成奇数. 写出该随机试验的样本空间以及事件 A,B,C,D 的集合.

解 从 0,1,2,3 四个数字中先后取出两个不同的数字组成的数可以是个一位数,也可以是个两位数. 该随机试验的所有可能的基本结果,即样本点共有 12 个($P_4^2=4\times3=12$).

$\Omega=\{1,2,3,10,12,13,20,21,23,30,31,32\}$,

$A=\{10,12,13,20,21,23,30,31,32\}$,

$B=\{10,12,20,30,32\}$,

$C=\{2,10,12,20,30,32\}$,

$D=\{1,3,13,21,23,31\}$.

从以上例子中我们看到,用集合的概念和记法研究随机试验的样本空间、基本事件、随机事件等概率论中最基本的概念是很方便的,它将有助于我们对这些概念的理解.

二、随机事件间的关系与运算

在研究随机试验时,我们发现一个随机试验往往有很多随机事件,其中有些比较简单,有些比较复杂. 为了通过较简单的随机

事件寻求较复杂随机事件的性质和规律,我们需要研究任意一个特定随机试验的各随机事件间的关系和运算.

（一）事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 B 包含事件 A**,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果事件 A 包含事件 B,同时事件 B 也包含事件 A,则称事件 **A 与 B 相等**,记为 $A=B$.

（二）事件的和(并)

事件 A 与 B 中至少有一个事件发生,即“A 或 B”,也是一个事件,称为事件 **A 与 B 的和**(并)记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

（三）事件的积(交)

事件 A 与 B 同时发生,即“A 且 B”,也是一个事件,称为事件 **A 与 B 的积**(交).记作 AB 或 $A\cap B$.

事件的和与积都可以推广到有限多个事件和可列多个事件.

$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生.

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个事件发生.

$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件.

$\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生的事件.

（四）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生,也是一个事件,称为事件 **A 与 B 的差**,记作 $A-B$.

（五）互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,称事件 A 与 B **互不相容**(或称互斥).如果对任何的 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$都

有 $A_iA_j=\varnothing$，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两互不相容**.

（六）对立事件与完备事件组

事件 A 不发生，即事件"非 A"，称为事件 **A 的对立事件**，又称 **A 的逆事件**，记作 $\overline{A}$. 由定义看出，两个对立事件一定是互不相容事件；反之，两个互不相容的事件不一定是对立事件.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，并且它们的和是必然事件 Ω，则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**. 简称**完备组**. 它的实际意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个事件. 当 $n=2$ 时，构成完备事件组的两个事件 A_1,A_2 就是对立事件.

为了直观，有时用图形表示事件间的关系和运算. 比如用平面上某一个方形（或矩形、或其它平面图形）区域表示必然事件 Ω，用该区域上一个子区域表示随机事件. 如图 1-1.

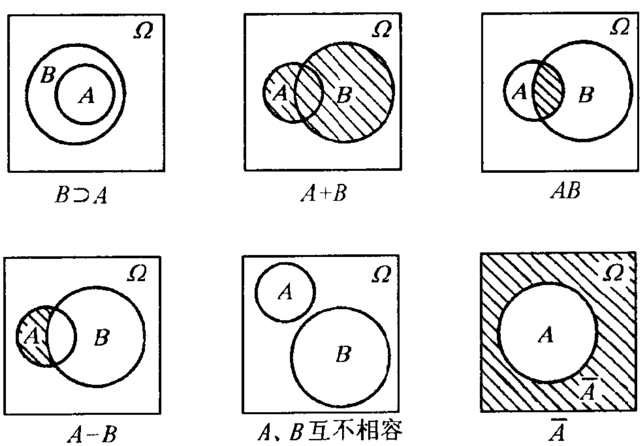

图 1-1

例 4 一条自动生产线上两次故障间的优质品数无法事先预言. 记

A_1 表示两次故障间的优质品数超过 10 件；

A_2 表示两次故障间的优质品数超过 11 件；

A_3 表示两次故障间的优质品数超过 12 件；

A_4 表示两次故障间的优质品数最多为 10 件；

A_5 表示两次故障间的优质品数不少于 11 件；

A_6 表示两次故障间没有优质品.

讨论上述各事件间的关系.

分析 在研究事件间的关系和运算时，为了利用集合间的关系与运算法则，我们常采用集合论中的概念与记法. 具体做法是：首先写出试验的样本空间 Ω 这个集合；然后写出所讨论的每个随机事件相应的集合；最后讨论各集合，即各随机事件间的关系.

解 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$, $\quad A_1=\{11,12,\cdots\}$,

$A_2=\{12,13,\cdots\}$, $\quad A_3=\{13,14,\cdots\}$,

$A_4=\{0,1,\cdots,10\}$, $\quad A_5=\{11,12,\cdots\}$,

$A_6=\{0\}$.

易见：

$A_1=A_5=\overline{A}_4$，即 A_1 与 A_4、A_5 与 A_4 为对立事件；

$A_1=A_5\supset A_2\supset A_3$； $\quad A_4\supset A_6$；

A_6 与 A_1、A_6 与 A_2、A_6 与 A_3、A_6 与 A_5 均互不相容；

A_4 与 A_1、A_4 与 A_2、A_4 与 A_3、A_4 与 A_5 均互不相容.

注意 事件 A_6 是只包含一个样本点“0”的单点集合，A_6 不是空集，因此 A_6 不是不可能事件$\varnothing$.

例 5 讨论例 1 中各事件间的关系.

解 由例 1 知 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\quad A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$, $\quad C=\{1\}$, $\quad D=\{3,4,5,6\}$.

由上可见：A 与 B 为对立事件即 $B=\overline{A}$，C 与 B，C 与 D 均互不相容，$A\supset C$，A 与 D，B 与 D 均相容.

例 6 设 x 表示一个沿数轴做随机游动的质点位置，讨论下列各对事件间的关系：

(1) $A_1=$“$|x-a|<\delta$”与 $B_1=$“$x-a<\delta$” ($\delta>0$)；

(2) $A_2=$“$x>20$”与 $B_2=$“$x\leqslant 20$”；

(3) $A_3=$“$x>22$”与 $B_3=$“$x<18$”；

(4) $A_4=$“$|x|>5$”与 $B_4=$“$|x|\leqslant 7$”.

解 记该试验的样本空间为 Ω，则 $\Omega=\{x:-\infty<x<+\infty\}$；

(1) $A_1=\{x:a-\delta<x<a+\delta\}$， $B_1=\{x:x<a+\delta\}$，易见 $B_1\supset A_1$.

(2) $A_2=\{x:x>20\}$， $B_2=\{x:x\leqslant 20\}$，显然 A_2 与 B_2 为对立事件，即 $B_2=\overline{A}_2$.

(3) $A_3=\{x:x>22\}$， $B_3=\{x:x<18\}$，A_3 与 B_3 互不相容，即 $AB=\varnothing$.

(4) $A_4=\{x:x>5$ 或 $x<-5\}$， $B_4=\{x:-7\leqslant x\leqslant 7\}$，$A_4$ 与 B_4 相容.

说明 互不相容与对立事件是两种不同的关系. 两个互不相容事件在一次试验中仅仅是不能同时发生，并不能排除它们同时都不发生. 比如本例中 A_3 与 B_3，当 $x=21$ 时，它既不大于 22，又不小于 18. 但是两个对立事件，它们在一次试验中不仅不能同时发生，而且也不可能同时不发生. 比如(2)中若 A_2 发生即“$x>20$”，则 B_2，即“$x\leqslant 20$”就一定不会发生；反之，若 A_2 不发生，即 x 不大于 20，则 B_2 就一定发生. 因此，我们的结论是：两个对立事件一定是互不相容事件，但两个互不相容事件不一定是对立事件.

例 7 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到正品($i=1,2,3$). 用事件运算符号表示下列事件：

(1) 三次都取到正品；

(2) 三次中至少有一次取到正品；

(3) 三次中至少有两次取到正品;

(4) 三次中恰好有两次取到正品;

(5) 三次中最多有一次取到正品;

(6) 第二次没有取到正品;

(7) 第二次没有取到正品,且第三次取到正品.

解 (1) $A_1A_2A_3$;

(2) $A_1+A_2+A_3$;

(3) $A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$ 或 $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$;

(4) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$;

(5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_3$;

(6) $\overline{A}_2$;

(7) $\overline{A}_2A_3$.

三、事件间的关系和运算的性质

在计算事件的概率时,我们经常需要将一个事件表示为一些事件的运算.因此熟练掌握下面的性质对今后学习将有很大帮助.为了阅读方便,我们将它们归纳整理后一并给出.

(一) 关于包含

$$\varnothing\subset A\subset\Omega,\quad A+B\supset A,\quad A\supset A-B,\quad A\supset AB.$$

(二) 关于加法

$$A+\varnothing=A,\quad A+\Omega=\Omega,\quad A+\overline{A}=\Omega,$$

$$A+A=A,\quad A+B=B+A,$$

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

(三) 关于乘法

$$AA=A,\quad A\overline{A}=\varnothing,\quad A\varnothing=\varnothing,\quad A\Omega=A,$$

$AB=BA$，$(AB)C=A(BC)$.

（四）关于加法与乘法的分配律

$A(B+C)=AB+AC$，　$A+BC=(A+B)(A+C)$.

（五）关于和、积、逆的对偶律

$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$，　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，　$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

（六）关于逆、差与互不相容

$(A-B)+A=A$，　$\overline{\overline{A}}=A$，　$\overline{\Omega}=\varnothing$，　$\overline{\varnothing}=\Omega$.

$A+B=(A-B)+(B-A)+AB$,且 $A-B$,$B-A$,AB 两两互不相容.

$A+B=A\overline{B}+AB+\overline{A}B$,且 $A\overline{B}$,AB,$\overline{A}B$ 两两互不相容.

$A+B=(A-B)+B=(B-A)+A$,$A-B$ 与 B 互不相容,$B-A$ 与 A 互不相容.

注：以上 A,B,C 均为任意事件.

例 8　简化下列各式

(1) $(A+B)(B+C)$；　　(2) $(A+B)(A+\overline{B})$；

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$；

(4) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

解　由于每一个随机事件都是由样本空间中的一些元素组成的集合,它们都是样本空间的子集,因此利用集合的运算法则很容易将上述各事件的运算简化.

(1) $(A+B)(B+C)=AB+B+AC+BC=B+AC$.

最后一步是由于 $B\supset AB$,$B\supset BC$,可得 $B+AB+BC=B$.

(2) $(A+B)(A+\overline{B})=(B+A)(A+\overline{B})=A+B\overline{B}=A$.

倒数第二步是应用(1)的结果.

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=A(\overline{A}+B)=AB$.

应用(3)的结果,有