# 实用数学物理方程

刘 盾 编著

SHIYONG SHUXUE WULI FANGCHENG

重庆大学出版社

## 内 容 提 要

本书详细介绍了分离变量法、积分变换法、行波法和格林函数法等求解偏微分方程定解问题的常用方法，以及差分方法和一些现代偏微分方程理论中常用的概念。本书注重求解方法，注重物理背景，注重应用，理论探讨适度，对一些必备而高等数学未讲授的内容，以附录形式给出，便于查找。

本书经原国家教委工科研究生数学课程指导小组审定，作为工科研究生教学用书推荐出版。

本书可作为工科研究生及理科非数学专业高年级的数理方程教材，亦可作为工程技术人员更新知识的参考书。


**图书在版编目(CIP)数据**

实用数学物理方程/刘盾编著. —重庆:重庆大学出版社,1999.6
工科硕士研究生教材
ISBN 7-5624-1831-4

Ⅰ.实… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学物理方程-研究生-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 10728 号

**实用数学物理方程**
刘 盾 编著
责任编辑 刘茂林
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
重庆建筑大学印刷厂印刷
*
开本·787×1092 1/16 印张 12 字数.300 千
1999年6月第1版 1999年6月第1次印刷
印数 1—2000
ISBN 7-5624-1831-4/O·168 定价·17.50元

# 前 言

数学物理方程是指在力学、天文学、物理学及工程技术中提出来的偏微分方程。它是随着17世纪工业生产的发展，随着天文学、物理学等各类自然科学的发展，而逐步形成的一门独立学科。数理方程在一定程度上描述了自然界大量的基本物理现象，人们通过数理方程的研究，增强了认识世界、改造世界的能力，有效地解决了许多以前尚未认识和无法解决的理论问题和工程技术问题：如振动和波的传播问题，弹性力学、流体力学中的问题，热的传导和粒子扩散问题等等。数理方程一直受到广大科技人员和工程技术人员的重视，是数学工作者的热门话题之一，数理方程亦是研究生进一步学习专业知识的必修内容和从事科学研究的有力工具。

数理方程是一门实用性很强的学科，本教材注意紧密结合工程实际，深入浅出地讲清楚与实际问题的联系。在建立方程和定解条件时，注意到数学模型的典型性及将实际问题抽象为数学模型能力的培养。在寻求解法时，注意分析实际问题的背景及物理特性，从而为寻求解法给出有益的启示，如分离变量法来源于波的叠加原理，齐次化原理来源于冲量定理等。在探讨理论时，注意到用理论对自然现象的再认识，以及理论与实际的最终统一等等。通过以上四个注意，达到使学生既掌握有关知识，又提高提出问题、处理问题能力的目的，缩短了学与用的距离。

求解是数理方程的主要内容。为突出这一主题，本教材以解法为主要线索进行编写，通过对精选的一定数量例题和习题的演算和讲解，使学生不仅对各种解法有全面的认识，还要具有熟练的解题能力。适定性的讨论是必要的，但针对工科研究生的特点，在繁简和深度上作了适当的控制，并将适定性讨论分散于各章之中，避免了理论探讨过于集中的现象。

数理方程内容丰富，发展迅速，所涉及到的数学知识也很多，结合研究生的需要和所具备的数学知识，本教材主要讲解应用范围广、结果较完善的经典内容。另外也还编写了函数空间、函数在正交系下的分解、$\delta$函数、基本解和能量积分等与近代偏微分方程有关的内容，为学生进一步学习打下一定的基础，而对一些必备而又欠缺的知识，则以附录形式给出，便于查找。

该书经原国家教委工科研究生数学课程指导小组认定："作为工科研究生教学用书推荐出版。"它是编者在重庆大学多年使用的自编教材基础上，结合1996年制定的偏微分方程教学大纲（工科研究生使用）和国家教委工科研究生教学课程指导小组请有关专家评审的意见修改而成。这里特向对本书修订提出许多宝贵意见和建议的刘家琦教授（哈尔滨工业大学）、任善强教授（重庆大学）、管平教授（东南大学）、崔尚斌教授（兰州大学）、向隆万教授（上海交通大学）表示由衷的感谢。

讲授本教材约需40～60学时，其中带*的内容可根据专业需要和学时多少进行取舍。

由于编者学识所限，难免有疏漏和不妥的地方，衷心希望读者提出宝贵意见。

1998年3月

# 目　录

# 第一章　数学模型和偏微分方程的基本概念

从实际问题出发，利用有关的定理、定律，找出某些未知量与已知量间的关系，这种数量之间的关系也就是该问题的数学模型。本章将通过微元分析法和物理上的一些守恒关系，从力学、传热学、电磁学中引入波动方程、热传导方程和位势方程及相应的定解条件。我们将看到，一些不同领域、不同类型的问题，最终的数学关系是何等"惊人的相似"，如稳恒温度场的温度和无源无旋场的势函数由同一个方程描述，棒的纵振动、弦的微小横振动、具有分布参数高频传输线上的电流分布均由同一个方程描述，这充分显示出用数学去认识世界的重要性，并开拓了用类比法去研究问题的途径。从纯数学的观点看，偏微分方程是常微分方程与多元函数相结合的自然产物，因而在基本概念上，常微分方程与偏微分方程有许多相似之处，值得指出的是：在解题的思路和方法上，却很少有相似之处，可以说几乎是面目全非。

## 第一节　数 学 模 型

### 一、弦的微小横振动

这里的弦，是指宽度和厚度忽略不计，可任意弯曲的弹性曲线。它的横振动在数学物理方程中是最简单、最典型的例子之一。为抓住问题的实值，突出主要矛盾，首先将假定条件理想化，先建立一小段弦的动力学方程，再利用中值定理，转化为一点的动力学方程。

设有一条拉紧的弦，长为 $l$，平衡位置与 $x$ 轴的正半轴重合，且一端与原点重合。

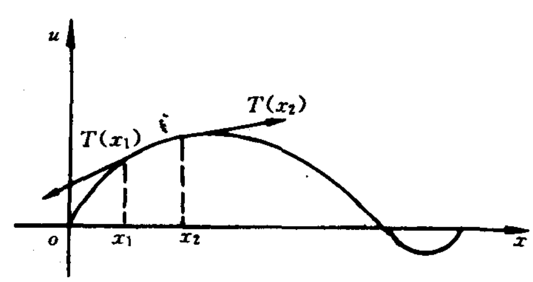


图 1.1.1

理想化的假设与相应结论：

1)横振动：振动发生在一个平面内，且各点的运动方向垂直于平衡位置。选坐标系如图 1.1.1，于是弦上 $x$ 点在 $t$ 时刻的位移可用 $u(x,t)$表示。图 1.1.1 显示出弦上各点在 $t$ 时刻的振动状态。

2)振动微小：弦上各点的位移与弦长相比很小，且振动很平缓，即各点斜率变化很微小：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$。也就是说，在$\dfrac{\partial u}{\partial x}$的高阶无穷小忽略不计的精度范围内研究问题，于是

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_x^{x+\Delta x}\mathrm{d}x = \Delta x$$

即在微小振动过程中，弦长不发生变化。

3)弦是柔软的、均匀的：柔软是指弦对形变不产生任何抗力，故张力 $\vec{T}(x,t)$的方向总是沿着弦在 $x$ 点的切线方向，见图 1.1.1。

因在振动过程中,弦长不发生变化,由 Hooke 定律知,各点张力与时间 $t$ 无关,即 $\vec{T}(x,t)=\vec{T}(x)$,记 $|\vec{T}(x)|=T(x)$。

均匀是指弦上各点密度为常数,即 $\rho=const$。

4)弦的重力与张力相比很小,因此重力可忽略不计。

5)弦上各点受外力的影响,其外力线密度为 $F(x,t)$,外力方向为 $u$ 轴的正向,见图 1.1.2。

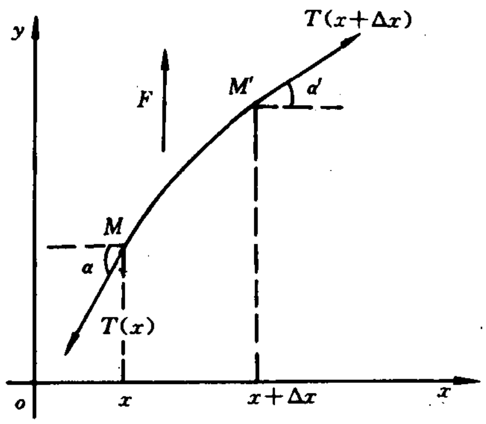


图 1.1.2

建立方程:取弦上任一微元$\overset{\frown}{MM'}$,研究该微元$\overset{\frown}{MM'}$在水平方向和铅垂方向的运动情况,它在 $M$ 端受张力 $T(x)$ 作用,在 $M'$端受张力 $T(x+\Delta x)$作用,整段微元还受外力 $F(x,t)$的作用。

张力的水平分量分别为 $T(x)\cos\alpha,T(x+\Delta x)\cos\alpha'$,其中 $\alpha,\alpha'$分别是 $T(x),T(x+\Delta x)$与 $x$ 轴的夹角,微元$\overset{\frown}{MM'}$在水平方向没有运动,故水平方向的合力为零

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha'-T(x)\cos\alpha=0$$

因
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\approx 1$$

同理
$$\cos\alpha'\approx 1$$

所以
$$T(x+\Delta x)-T(x)=0$$

即各点张力相等,以常数 $T$ 表示。

弦在铅垂方向有运动,根据牛顿第二定律,其运动学方程为

$$T\sin\alpha'-T\sin\alpha+F(\bar{x},t)\Delta x=\rho\Delta x u_{tt}(x^*,t)$$

其中 $x<\bar{x}<x+\Delta x,F(\bar{x},t)\Delta x$ 为作用在$\overset{\frown}{MM'}$上的外力,$x^*$为质心。

因
$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\approx u_x(x,t)$$

同理
$$\sin\alpha'\approx u_x(x+\Delta x,t)$$

所以
$$T[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)]+F(\bar{x},t)\Delta x=\rho\Delta x u_{tt}(x^*,t)$$

假定 $u_x$ 连续,$u_{xx}$存在,由微分中值定理有

$$Tu_{xx}(\tilde{x},t)\Delta x+F(\bar{x},t)\Delta x=\rho\Delta x u_{tt}(x^*,t)$$

其中 $x<\tilde{x}<x+\Delta\bar{x}$,消去 $\Delta x$,令 $\Delta x\to 0$,有 $\tilde{x}\to x,\bar{x}\to x,x^*\to x$,假定 $u$ 有二阶连续偏导数,得

$$Tu_{xx}(x,t)+F(x,t)=\rho u_{tt}(x,t)$$

或
$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f \tag{1.1.1}$$

称式(1.1.1)为弦的强迫振动方程,其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho},f=\dfrac{F}{\rho}$。

若弦不受外力的作用,即 $F=0$,得

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1.1.2}$$

称式(1.1.2)为弦的自由振动方程。

这是一个很基本的偏微分方程，各种弹性振动，如建筑物的剪振动、潮夕波、地震波等都可用这个方程来描述。

## 二、热传导方程

若物体温度分布不均匀，内部将会产生热应力，而热应力过于集中，物体就会产生裂变，从而破坏了物体原来的形状或结构，工程技术中称此种现象为热裂。在建造水电站大坝时，混凝土释放的水化热使大坝的温度分布极不均匀，在铸件浇铸过程中，因散热条件不同，将导致铸件各点间温度变化的梯度过大，都可能产生热裂现象，为防止热裂，就必须先弄清楚物体各点的温度分布状况及变化的规律。又如激光打孔，其原理是利用激光加热物体表面，使物体接触激光部分加热、溶解、汽化，而最终打成孔，研究这一课题的基础也是研究物体的温度分布。

用 $u(x,y,z,t)$ 表示物体在 $M(x,y,z)$ 点、$t$ 时刻的温度，通过对任意一个小的体积微元 $\Omega$ 内的热平衡关系的研究，建立其方程。

Fourier 定律：物体在 $\mathrm{d}t$ 时间内，沿法向 $\vec{n}$ 方向，流过 $\mathrm{d}s$ 面积的热量 $\mathrm{d}Q$，与时间间隔 $\mathrm{d}t$，热流通过的面积 $\mathrm{d}s$ 及温度沿 $\vec{n}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比。即

$$\mathrm{d}Q = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n} &= \mathrm{grad}u \cdot \vec{n} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n},y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{n},z)\end{aligned}$$

为温度的法向导数，它表示温度沿 $\vec{n}$ 方向的变化率。

$k(x,y,z)\geqslant 0$ 称为导热系数，等式中的负号表示热流方向与温度梯度方向相反，这是因为热流方向总是由高温区指向低温区，温度梯度 $\mathrm{grad}u$ 总是由低温区指向高温区之故。

设物体内任意区域 $\Omega$ 的边界为 $\partial\Omega$，在任意时间区段$[t_1,t_2]$内，流进 $\partial\Omega$ 的热量：

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\Big[\iint_{\partial\Omega} k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\Big]\mathrm{d}t$$

$\vec{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向，设对变量 $x,y,z,u\in C^2$($u\in C^k$ 表示 $u$ 为 $k$ 次连续可微函数)，由奥氏公式有

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\iint_{\partial\Omega}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\Big]\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

若 $\Omega$ 内有热源，其热源体密度为 $F(x,y,z,t)$，则在$[t_1,t_2]$内，$\Omega$ 内共产生热量：

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega} F(x,y,z,t)\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$\Omega$ 内各点由 $t_1$ 时刻温度 $u(x,y,z,t_1)$ 变化到 $t_2$ 时刻的温度 $u(x,y,z,t_2)$，共吸收热量：

$$Q_3 = \iiint_{\Omega} c(x,y,z)\rho(x,y,z)[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V$$

$c$ 为各点之比热，$\rho$ 为密度，假定对 $t,u\in C^1$，则有

$$u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t$$

从而
$$Q_3 = \iiint\limits_{\Omega} c\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t\mathrm{d}V$$

由热量守恒定理有 $Q_1 + Q_2 = Q_3$

即
$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint\limits_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left( k\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left( k\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left( k\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \mathrm{d}V \right\} \mathrm{d}t \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_{\Omega} F(x,y,z,t) \mathrm{d}V\mathrm{d}t \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t\mathrm{d}V \end{aligned}$$

交换等式右端积分次序，再根据被积函数的连续性和积分区域 $\Omega$，$[t_1,t_2]$ 的任意性得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left( k\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left( k\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left( k\frac{\partial u}{\partial z} \right) + F$$

若物体均匀且具有各向同性，则 $k$、$c$、$\rho$ 均为常数，记 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$，$f = \frac{F}{c\rho}$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f \tag{1.1.3}$$

称式(1.1.3)为非齐次热传导方程，$a$ 是表征物体温度变化能力的指标，称为导温系数。

若物体内部无热源，即 $F=0$，得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{1.1.4}$$

称式(1.1.4)为齐次热传导方程。

若物体是一个薄片，上底面与下底面不与周围介质进行热交换，则方程(1.1.4)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1.1.5}$$

若物体是细长的棒，侧面与周围介质不进行热交换，垂直于轴线的截面上各点温度分布相同，则方程(1.1.4)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.6}$$

分别称方程(1.1.4)、(1.1.5)、(1.1.6)为三维、二维、一维热传导方程。

在某个区域内，若物质浓度分布不均匀，就会发生物质由高浓度区域向低浓度区域转移的扩散现象。以 $N(x,y,z,t)$ 表示物质浓度(单位体积中扩散物质的含量)，根据扩散定律和质量守恒定律，得

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right)$$

$D \geqslant 0$ 称为扩散系数，由此看出，虽然热传导现象和物质扩散是两个不同的物理现象，但数量关系却相同。

### 三、静电场的势方程

有一个介电常数 $\varepsilon=1$，电荷密度为 $\rho(x,y,z)$ 的静电场 $\vec{E}$，$\Omega$ 为静电场中任意区域，$\partial\Omega$ 为

其边界。由静电学的基本定律:穿过闭合曲面 $\partial\Omega$ 向外的电通量等于 $\partial\Omega$ 内所含电量的 $4\pi$ 倍,即

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = 4\pi\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$\vec{E}\cdot\vec{n}$为电场强度$\vec{E}$在 $\partial\Omega$ 的外法线方向 $\vec{n}$上的投影。由奥氏公式

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_{\partial\Omega}[E_x\cos(\vec{n},x) + E_y\cos(\vec{n},y) + E_z\cos(\vec{n},z)]\mathrm{d}S \\ &= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \\ &= \iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

其中 $E_x$、$E_y$、$E_z$ 分别是 $\vec{E}$在坐标轴上的投影,于是

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{E}\,\mathrm{d}v = 4\pi\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}V$$

由区域 $\Omega$ 的任意性,得静电场方程

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho(x,y,z)$$

静电场 $\vec{E}$是有势场,故存在势函数 $u$,有

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}u$$

于是有

$$\mathrm{divgrad}u = -\,4\pi\rho(x,y,z)$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\,4\pi\rho(x,y,z) \tag{1.1.7}$$

称式(1.1.7)为 Poisson 方程,若区域内无电荷,则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1.8}$$

称式(1.1.8)为 Laplace 方程。

对一流速场 $\vec{v}$,若无旋,则存在势函数 $\varphi$

$$\vec{v} = -\,\mathrm{grad}\varphi$$

若该速度场无源,则 $\vec{v}$的散度为零,即

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0$$

故无源无旋的流速场 $\vec{v}$,有

$$\mathrm{divgrad}\varphi = 0$$

即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

有势无源场的势函数亦满足 Laplace 方程。再有,如引力势、弹性力学中的调合势、稳恒温度场之温度等均由 Laplace 方程描述。

纵观本节,看出这些方程都是以某个守恒关系为依据推导出来的,而且不同领域、不同类型的问题,有时却能用相同的方程来描述,这表明它们的数量关系是相同的,这也为类比、模拟提供了依据。

## 第二节　定解条件及定解问题

方程描述的仅是一般物理现象，如 $u_{tt}=a^2u_{xx}$只描述了弦振动的一般性运动规律，显然，具体一段弦的振动，还应与弦的初始状态和边界状态有关，同一段弦，若初始状态、边界状态不同、弦相应的振动也不同，因此要描述一个确定的运动状态，须附加一定的条件。

### 一、初值条件及 Cauchy 问题

描述某系统或某过程初始状况的条件称为初值条件，初值条件与对应方程加在一起构成初值问题，亦称 Cauchy 问题。

弦的振动与初始时刻弦上各点的位移和速度有关，同一条弦，若初始位移或初始速度不同，显然相应的运动状态完全不同，设初始位移、初始速度分别为 $\varphi(x)$、$\psi(x)$，称

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)$$

或

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$$

为波动方程的初值条件，$\varphi(x)\neq0$ 或 $\psi(x)\neq0$ 时称为非齐次初值条件，两个函数恒为零时称为齐次初值条件。对无限长的弦，初值条件给定后，相应的振动就完全被确定，称

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

为波动方程的 Cauchy 问题。

热的传导问题与初始时刻各点的温度有关，称

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad 或\quad u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

为热传导方程的初值条件，$\varphi(x)$表示初始时刻各点的温度。无限长杆的热传导问题：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty) \end{cases}$$

称为热传导方程的 Cauchy 问题。

注意：

1）不同类型的方程，相应初值条件的个数不同，且所含的意义也不相同，如 $u(x,0)=\varphi$ 在波动方程中表示初始位移，在热传导方程中表示初始时刻棒上各点的温度分布。

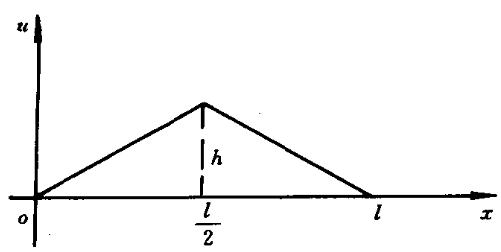

图 1.2.1

2）初始条件给出的应是整个系统的初始状态，而非系统中个别点的初始状态。如“两端固定的弦，初始时刻，将弦的中点拉起 $h$”，见图 1.2.1，将初始位移写成

$$u\big|_{t=0}=h\quad 或\quad u\big|_{x=\frac{l}{2}}=h$$

都是错误的，前者含意是各点初始位移均为 $h$，后者只给出在 $x=\dfrac{l}{2}$点的位移，显然均不符合题意，

正确的写法是

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

3)波动方程的初值问题，必须同时给出初始位移和初始速度。

4)Poisson 方程和 Laplace 方程不含时间变量，一般不提初值问题。

## 二、边界条件及边值问题、混合问题

描述某系统或某过程边界状况的约束条件称为边界条件。下面介绍三种基本的情况：

第一类边界条件：给出未知函数在边界上的值，即

$$u(x,y,z,t)|_{(x,y,z)\in\Gamma}=f(x,y,z,t)$$

其中 $f(x,y,z,t)$ 是已知函数，$\Gamma$ 是边界。对于波动方程，第一类边界条件表示给出边界各点的运动规律，$f=0$ 表示边界固定。对于热传导方程，第一类边界条件表示给出边界各点的温度。

如长为 $l$ 的弦，一端固定，一端以 $\sin t$ 规律运动，则边界条件为

$$u|_{x=0}=0,\qquad u|_{x=l}=\sin t$$

第二类边界条件：给出未知函数在边界上的法向导数值，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f(x,y,z,t)$$

对于弦的振动，张力沿 $u$ 轴方向的分量是 $T\sin\alpha\approx T\dfrac{\partial u}{\partial x}$，而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$，故 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=f(t)$ 可视为在 $u$ 轴方向给出外力 $f(t)$。而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$ 则表示端点不受垂直方向外力的作用，此时端点沿 $u$ 轴方向自由滑动，称为自由端。

对于热传导方程，由 Fourier 实验定律知

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}$$

故第二类边界条件表示单位面积、单位时间内沿边界外法线方向流出的热量，若在边界没有热量交换，称边界是绝热的，此时有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0$。

如长为 $l$ 的导热杆，在 $x=0$ 端有热量流出，热流密度(单位面积、单位时间内流出的热量)为 $q(t)$，$x=l$ 端绝热，则边界条件应写为

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0}=-k\left.\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=q(t)$$

即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{1}{k}q(t)$$

和

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$$

第三类边界条件：给出未知函数及其法向导数的线性组合在边界上的值。即

$$\left(u+h\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Gamma}=f(x,y,z,t)$$

$\vec{n}$为边界 $\Gamma$ 的外法线方向，$h$ 为已知函数或常数，$f$ 为已知函数。

对于弦的振动，若端点固定于弹簧的一端，弹簧的另一端固定，且弦处于平衡位置时，弹簧亦处于平衡位置，此种支承称为弹性支承，端点的运动应符合 Hooke 定律，弹性力是 $ku|_{x=l}$，张力的垂直分量是 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$，两个力应当平衡，有

$$-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=ku|_{x=l}$$

负号表示弹性力与位移方向相反，即

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=l}=0,\quad \sigma=\frac{k}{T}=\text{const}$$

若 $x=0$ 端也固定在弹性支承上，因$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=0}=-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$，在 $x=0$ 端的第三类边界条件为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma u\right)\right|_{x=0}=0$$

由此看出，弦的两端固定在弹簧上（称为弹性支承）由第三类边界条件描述。

对杆的导热问题，若端点自由冷却，且周围介质温度为 $u_1$，由 Newton 冷却定律，物体在 $\mathrm{d}t$ 时间内，通过面元 $\mathrm{d}s$ 而散失到周围介质中的热量为

$$\mathrm{d}Q=h(u-u_1)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$h$ 是热交换系数，$h>0$，$u$ 为物体表面温度，$u_1$ 为与物体表面接触的介质温度。由于热的传导，从物体内部流到边界的热量为

$$\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

在任一局部范围内，这两个热量应相等，得

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}=h(u-u_1)$$

在 $x=l$ 端，因$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}$，故得

$$\left.\left(u+\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=u_1,\quad \sigma=\frac{k}{h}$$

研究有界弦的振动或物体在局部范围内的热传导等问题，它们不仅受初值条件的影响，还受边界状况的约束，因此研究这类问题时，既要涉及初值条件，又要涉及边界条件。例如两端固定的有界弦，初始状态不同，对应的运动不同；又如初始温度分布相同的两条导热杆，边界条件不同，相应的温度分布也不同。包含初值条件和边界条件的定解问题称为混合问题，或称初边值问题，如热传导方程的混合问题为

$$\begin{cases}u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) & (x,y,z)\in\Omega,t>0\\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z) & (x,y,z)\in\Omega\\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_{\partial\Omega}=f(x,y,z,t)\end{cases}$$

$\varphi$、$f$ 为已知函数，$\sigma$ 已知常数，$\partial\Omega$ 为 $\Omega$ 之边界。又如波动方程的混合问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<l,t>0)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{x=l}=\psi(x) & (0<x<l)\\ u|_{x=0}=0,u_x|_{x=l}=0\end{cases}$$

$\varphi(x),\psi(x)$为已知函数。

Laplace 方程不含时间变量 $t$，不能附加初值条件。只附加边界条件的定解问题称为边值问题，与第一、二、三类边界条件相对应的边界问题，分别称为 Dirichlet 问题、Neumann 问题和 Robin 问题。设 $\Omega$ 为有界闭域，在 $\Omega$ 内讨论的边值问题，称为内问题；在 $\Omega$ 之外讨论的边值问题称为外问题。例如绕流问题，见图 1.2.2，若流速场是有势无源场，求在流速场中放入物体 $\Omega$ 后流速场中各点的势。记 $\Omega$ 之外的区域为 $\Omega'$，设势函数为 $\varphi$，我们知道有势无源场的势函数满足 Laplace 方程，且沿 $\Omega'$ 的外法线方向的速度为零，故得 Neumann 外问题：

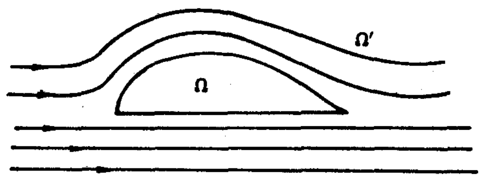

图 1.2.2

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (x,y,z)\in\Omega' \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n'}\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

$\partial\Omega$ 为 $\Omega$ 之边界，$n'$ 为 $\Omega'$ 之外法线方向。

外问题是在无限区域上给定的，然而在无穷远处，Laplace 方程没有意义，受在无穷远处物体的温度规定为零的启示，对外问题

规定：点 $M(x,y,z)$趋于无穷远时，$u(x,y,z)$一致地趋于零，即

$$\lim_{r\to\infty}u(x,y,z)=0, \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

因此外问题完整提法：(以 Neumann 问题为例)

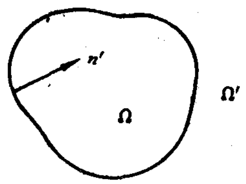

图 1.2.3

已知在 $\Gamma$ 上 $f\in C^0$，求满足如下条件的 $u$：

1)在 $\Omega'\cup\Gamma$ 上连续；

2)在 $\Omega'$ 内满足 Laplace 方程；

3)$\lim\limits_{r\to\infty}u=0, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

4)在 $\Gamma$ 上$\dfrac{\partial u}{\partial n'}=f$

$$\begin{cases}\Delta u(M)=0, \quad M\in\Omega' \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n'}\right|_{\Gamma}=f \\ \lim\limits_{r\to\infty}u=0, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\end{cases}$$

对于外问题，无穷远处的限制条件不可少，否则解的唯一性得不到保证，如 Laplace 方程的外问题：

$$\begin{cases}\Delta u=0 \qquad\qquad (x^2+y^2+z^2>1) \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1}=1\end{cases}$$

很易观察出它有两个解：$u_1(x,y,v)=1, u_2(x,y,z)=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若加上无穷远点的限制，$u_1(x,y,z)=1$ 就不是该问题的解，从而保证了外问题边值问题解的唯一性。

初值问题、边值问题、混合问题统称为定解问题，而初值条件、边界条件统称为定解条件。

# 第三节 偏微分方程的基本概念和叠加原理

## 一、偏微分方程的基本概念

方程即条件等式，它反映着某些量之间的制约关系。在条件等式里，未知量或未知函数以不同形式出现，就得到不同类型的方程，如代数方程，三角方程，对数方程，常微分方程等等。含有未知函数及其偏导数的条件等式，称为偏微分方程，一般形式为

$$F(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{yy}\cdots)=0$$

其中 $x,y,\cdots$ 是自变量，$u(x,y,\cdots)$ 是未知函数。显然

$$u_{xx}+2xu_{xy}+3yu_{yy}=\sin x \tag{1.3.1}$$

$$e^{xy}u_x+2u_y+\sqrt{x}\,u=0 \tag{1.3.2}$$

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) \tag{1.3.3}$$

$$u_x^2+u_y^2=1 \tag{1.3.4}$$

$$u_t+\sigma uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.3.5}$$

以及波动方程，Laplace 方程等均是偏微分方程。

偏微分方程的解（这里所指是古典解或正则解）是指这样一个函数，它具有方程所需的各阶偏导数，且能使方程变为恒等式。可验证：$\sin x\sin y$，$e^x y^3$，$\sqrt{x}\ln y$ 都是方程

$$uu_{xy}-u_xu_y=0 \tag{1.3.6}$$

的解。实质上，对任意二次可微函数 $f(x)$，$g(y)$，$u=f(x)g(y)$ 均满足方程(1.3.6)，一般说来，偏微分方程的解依赖于任意函数，而常微分方程的解仅依赖于任意常数，故偏微方程的解要比常微分方程的解多得多。

偏微分方程中未知函数偏导数的最高阶数称为该方程的阶。如：方程(1.3.1)，(1.3.3)是二阶偏微分方程，方程(1.3.2)，(1.3.4)是一阶偏微分方程，方程(1.3.5)是三阶偏微分方程。

如果偏微分方程中各项关于未知函数及其各阶偏导数都是一次的，称该方程为线性偏微分方程。如方程(1.3.1)、(1.3.2)、(1.3.3)都是线性偏微分方程，不致混淆时，简称为线性方程。若在定解条件中，各项关于未知函数及其偏导数是一次的，则称该定解条件为线性定解条件，前面所讨论的初值条件、边界条件都是线性定解条件，我们从后面定解问题的求解过程中将会看到线性性起着重要作用。不是线性偏微分方程的偏微分方程称为非线性方程，如方程(1.3.4)、(1.3.5)。特别地，若对未知函数最高阶导数而言是线性的，则称为拟线性方程，如方程(1.3.5)。

在线性方程中，不含未知函数及其偏导数的项称为自由项。自由项恒为零的线性方程称为齐次方程，否则，称为非齐次方程，如(1.3.2)是齐次方程，(1.3.1)、(1.3.3)是非齐次方程。

## 二、叠加原理

一些复杂的实际问题，往往受多种因素制约，而这些制约因素相互独立，它们所产生的影响也相互独立，且可进行叠加。如弦振动问题，既受边界状况的影响，又受初始状况的影响，因而含有边界状况和初始状况的有界弦振动问题，就可视为这两种状况所产生影响的叠加。也就