高　　等　　数　　学

（干部班适用）

卷　一

王梨芳　王栽舆　刘宝三
胡淑洪　程紫明　钱文侠　编

人民教育出版社

本书初版出版于 1958 年，1960 年由原编者根据一年以上的试用作了一次修订，除了在编写方面仍保持了原来的特点外，这次修改最大的改动就是把全书分为二卷出版。卷一包括平面解析几何和一元函数的微积分学。后边还有附录包括行列式及基本公式。卷二包括空间解析几何、多元函数的微积分学及级数。此外在有些章、节中，对某些概念的提法也作了改动，同时在叙述和推导方面也比过去更为详细，以适应自学者的需要。

本书不仅适用于干部班学员，而且也可作为业余大学的教材以及干部的自学用书。

高 等 数 学

（干部班适用）

卷 一

王渠芳　王载舆　刘宝三
胡淑洪　程紫明　钱文侠　编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 12.625　字数 318,000
1958 年 9 月第 1 版 1960 年 8 月第 2 版 1981 年 9 月第 11 次印刷
印数 211,001—228,500
书号 13012·0528　定价 1.10 元

序

本书在1958年第一版出版以后，北京航空学院、清华大学、北京工业学院、北京鋼鉄学院、北京矿业学院五个院校在干部班都試教过一年以上，对于在取材及要求方面，覺得有些部分要进行修改，这次印行的第二版是經局部小修的版本。本版在編写方面的特点基本沒有变动：

1. 內容的叙述尽量做到适合于学員們的认識过程。

2. 对于每一新概念的引入力求从若干具体問題出发，然后再引导到抽象的数学定义；讲定义时結合几何意义，物理意义，并用具体数字的例子来說明。

3. 力求貫彻从具体到抽象的原則，理論的闡述尽量先从举例說明然后再到一般的概括。

4. 具体的运算都較詳細地一步步推导。

5. 重視实际应用，尽量与邻近課程、后修課程相結合。体現数学是工具的原則。

6. 重視教学中的直观原則，借助于几何图象，及学員們已經具有的知識来深入了解概念与理論。針对学員的特点对数学的論証与推导作适当的精簡，或簡化了証明或給出例証，或从几何上加以說明。

7. 力求做到：提出問題明确，少用数学名詞，文字叙述簡单清楚，叙述与結論条理分明，便于記忆。

8. 每一章均有总結，問題，习題，帮助学員們作阶段性总結。

9. 照顾到各专业对高等数学的不同要求，教材中有基本內容，也适当的安排一些附加的內容（用小字排出）。

这次修改考虑到下列几个方面：

1. 为了适应不同的要求，本书改为二卷。卷一包括平面解析几何

和一元函数的微积分学（即微分学，积分学，微分方程）。后边有附录，包括行列式及基本公式。卷二則包括空間解析几何，多元函数的微积分学及級数。这样，基本重点内容，就全在卷一中了。

2. 为了教材的精炼，节省学时，将原来三章积分内容改写为两章，先讲不定积分后讲定积分，每一部分均由实际引出。去掉了定积分的应用及微分方程的应用之重复部分。

3. 在計算要求上，尽量做到巩固最基本的运算技能，和熟练技巧。在不定积分部分加强查表的练习。

4. 在叙述和推导上比过去詳細了些，这样可以适应自学者的需要。

这次修改后，不妥当的地方可能还是很多，希望讀者多提出宝貴的意見。

另外我們曾接到过一些同志对本书內容和印刷方面的意見，除在此次修改中认眞考虑之外，特在此表示感謝。

編者序于北京

1960 年 5 月底

卷一目录

引　言

一、数学的起源与发展

数学和其他科学一样，导源于生产实践。数学上的最基本的概念——形和数——都是人們在长期生产实踐中积累了大量的感性认識，在思維中經过抽象的过程而总結出来的。例如圓的概念，是人們从太阳、月亮、瓜、果等等圓形的具体事物上抽去了实际內容，概括了它們之間的共性而得到的。又如自然数概念，是由于原始时期人們要統計劳动果实而产生的。正如恩格斯所說的："和数的概念一样，形的概念也完全是从外面世界得来的，而不是在头脑中从純粹的思維中产生出来的。要能达到形的概念，先应当存在具有一定形状的物体，而且应把这些形状拿来比較。"①

数学的发展也是由人們生产实踐需要来决定的。我們可以举出一些例子：例如人类在原始公社时代，曾經长期地过着漁猎和畜牧的生活，由于需要計算猎获物，因之产生了自然数的头几个数。再如人类在耕种活动中，需要丈量地亩，就产生了几何学。又由于貿易和航海的需要，产生了代数学和三角学。而自十七世紀以来，生产急剧发展，适应这种情况的需要，就产生了高等数学中的一些概念和方法。不仅如此，反过来，数学的发展又在一定程度上推动了科学技术的进步，从而也相应地提高了生产力。这样一次一次地往复，而一次比一次提高、丰富，生产力和科学技术(包括数学在内)互相影响、不断发展。毛主席对于人們这种认識客观現实的过程普遍地加以总結說："实踐、认識、再实踐、再认識，这种形式，循环往复以至无穷，而实踐和认識之每一循环的內容，都比較地进到了高一級的程度。这就是辯証

① 恩格斯著"反杜林論"，中譯本第37頁——人民出版社，1957年版。

唯物論的全部认識論，这就是辯证唯物論的知行統一观。”①

我国是世界上文化发达最早的国家之一，我們的勤劳且聪明的祖先，在长期的生产实踐中，积累了丰富的生产斗爭知識。在数学方面也有着很大的貢献。例如早在第一世紀就已完成并且流傳至今的“九章算术”，其中包含面积、体积的計算方法，比例、百分法，一次联立方程、二次方程正根的計算，正負量的意义和計算方法等等，总結了我国古代劳动人民在生产斗爭中所获得的关于算术、代数、几何等方面的认識。又如秦九韶的“天元术”，提出三次以上的方程的实根的近似計算方法，远較西方数学家所提出的同样方法为早。又如我国的偉大数学家祖冲之早在第五世紀就已确定圓周率 π 的近似值在 3.1415926和 3.1415927之間，并規定 $\pi=\frac{22}{7}$ 为約率，$\pi=\frac{355}{113}$ 为密率。这个密率在西方直到十六世紀七十年代才由德人奥托算出。这仅是几个突出的例子。实际上，在中古和近古两个时期中的一千多年里，我国数学是很发达的，但是从明初起沒有得到应有的发展，这正是由于落后的封建制度长期地束縛了生产力的結果。

二、数学的特点

如上所說，数学的起源与发展和生产实踐是紧密地联系着的。但数学为了要应用到各种科学技术上去，它的基本概念、理論、計算方法都是以抽象的形式出現的。然而如前段开始处所指出的，这种抽象的形式乃是人們观察現实世界中的事物和发展規律，經过深刻思維、細致加工以后而形成的，絕不是脫离实际凭空想出的。恰恰相反，它能更深刻、更正确、更全面地反映現实，因而也就有广泛的应用。我們学习数学，对于数学的这两种紧密相联系的特点即抽象性和广泛应用性应有正确的认識，在学习一般理論时要注意到它的实用性的一面，在学习具体問題的解法时要注意到它的普遍性的一面。

① “毛澤东选集”第一卷第 285 頁，人民出版社，1952 年北京第二版 1960 年北京第十一次印刷。

三、数学所研究的对象

一般說来，无論是那种科学和技术問题，只要是涉及到物体存在的形状或过程中量与量之間的关系，都要用到数学。恩格斯在指出形和数的概念来自客观現实（見前段中的引文）以后，进一步地論证說："純数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的"。①这个論点提出的年代距离現在虽已有半个世紀以上，而在这一段时間內数学也随着生产的发展而日益发展，但仍是一个深刻地說明了数学的特征的論点，并且随着数学的进展，它的正确性和深刻性愈益显示出来。

四、高等数学在科学技术上的作用

我們将要学习的高等数学，它的主要內容是解析几何和微积分。比起中学里的数学——算术、几何、代数、三角来，它更深入而全面地研究空間形状和数量关系。其特点是以变量作为主要对象和运用了成套的方法。在近代的科学与技术問题中，經常是其中的某些变量起着重要的作用，并且我們所要研究的不只是这些变量的某一瞬間的情况，更重要的是这些变量的規律性，这种規律性常是以变量間依从关系来表現的，而要研究这种依从关系，就需要有一套系統性的方法，这正是高等数学所提供的。

不仅如此，随着我国社会主义建設的大跃进，文化革命和技术革命已經到来并且即将进入高潮，这就对数学提出了更高的要求和开辟了广闊发展的道路。与此同时，势必要求更多的人掌握現代数学工具——不仅是解析几何和微积分，还要包括現代許多新的科学分支，才能适应当前形势的需要。

完全可以預言，在我国一切科学技术包括数学在內，都将发揮其最大效能和发展到应有的高度！

① "反杜林論"中譯本第37頁——人民出版社出版1957年版。

第一篇　平面解析几何

第一章　平面上的直角坐标系

在十六世紀，由实踐的需要和各門科学本身的发展，产生了自然科学研究“运动”的必然性。要研究各种变化过程和各种变化着的量与量之間的依从关系，需要把代数与几何結合起来进行研究。在这方面笛卡尔建立了很好的基础。恩格斯曾經写道：“笛卡尔变量是数学中的轉折点，于是运动与辯証法便进入了数学”。解析几何就是以代数方法来研究几何图形的数学，把几何問題利用坐标化为代数問題，再运用代数方法来研究，以求得解决；同时，反过来又可对代数問題給予几何解釋。这种使形与数結合起来的基本方法就是坐标法。坐标法就是以数字来表示点的位置的方法。例如，要确定教室中某一坐位，必須說明，从那里算起，横着数第几个位子，纵着数第几个位子。又如天体上星座的位置，地球上某个地方的經緯度等都是运用着坐标概念。在数学上把具体事物进行抽象，研究如何确定直綫上点的位置和平面上点的位置，其方法如下：

1-1. 直綫上点的坐标　数軸

用数规定直綫上点的位置，必先給定一直綫，指出一方向为正向，取定一点 O，名为原点，規定一长度为单位长度。这样直綫上每一点的位置都可以用一个数来确定，这个数的絕对値就代表着从原点到該点的距离。若从原点到該点的方向为正的方向，則此数为正，若从原点到該点的方向与正向相反，此数为負。这个数叫做該点的坐标。这样規定的直綫叫数軸，通常以向右的方向为正向，（图 1.1）。例如 M

取在原点右方三个单位长的地方，則M的坐标为$+3$，記作$M(3)$；M'取在原点左方两个单位长的地方，則M'的坐标为-2，記作$M'(-2)$。显然：在数軸上有一个点，就能找出一个实数与之对应；反过来說，如給出任意一个实数，如$\frac{1}{2}$，也能在数軸上找出对应于这个实数的唯一的点来。

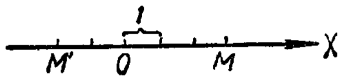

图 1.1

1-2. 平面上点的直角坐标

在平面上取两条具有共同原点且互相垂直的数軸，这两条数軸叫坐标軸；水平的叫横軸或X軸，鉛直的叫纵軸或Y軸；交点叫原点。通常，X軸的正向是由原点向右，Y軸的正向是由原点向上，取定坐标軸的平面叫坐标平面。

設平面上有一点M。从M作直綫垂直于X軸，其垂足为X軸上的一点P，点P在X軸上的坐标記作x，称为点M的横坐标。从M作直綫垂直于Y軸，其垂足为Y軸上一点Q，点Q在Y軸上的坐标記作y，称为点M的纵坐标。如图1.2中点M_4的横坐标为1，纵坐标为-2。我們規定：有先后次序的两个数(x, y)称为点M的坐标，記作$M(x, y)$。

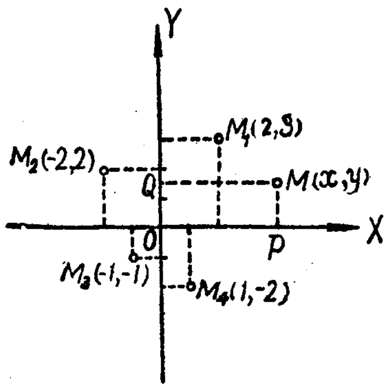

图 1.2

如图1.2中所示的四点，分别为$M_1(2, 3)$，$M_2(-2, 2)$，$M_3(-1, -1)$，$M_4(1, -2)$。

显然：在坐标平面上取一点，就能得出有先后次序的两个实数来表示这个点的坐标。反过来說，給

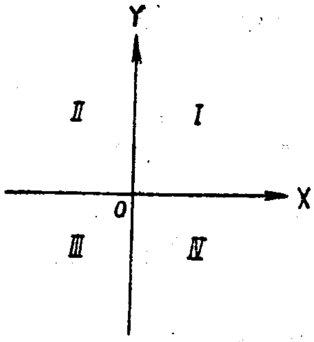

图 1.3

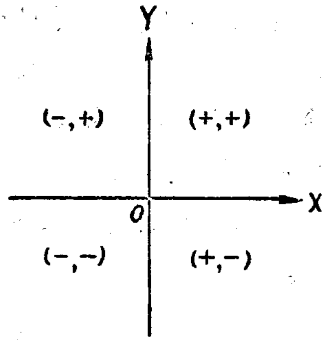

图 1.4

出有先后次序的两个实数作为坐标，就能定出平面上一个点。

坐标軸把平面分成四个部分，如图 1.3 所示，分别叫第一、二、三、四象限。一点 $M(x, y)$ 在各象限的 x, y 的符号如图 1.4 所示。显然，如图 1.5, $M_1(3, 2)$ 与 $M_2(3, -2)$ 对称于 X 軸。M_1 与 $M_3(-3, 2)$ 对称于 Y 軸，M_1 与 $M_4(-3, -2)$ 对称于原点。

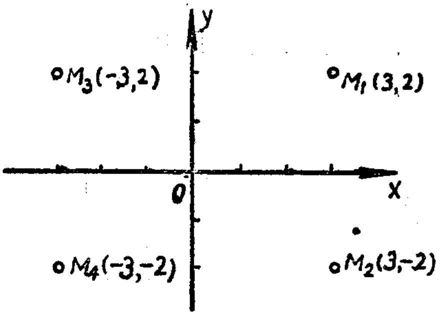

图 1.5

1-3. 几个簡单問題

（一） 任意两点間的距离

設 $M_1(x_1,y_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2)$ 为平面上两巳知点，試用坐标表示两点間的距离。

設两点 M_1 及 M_2 間距离为 d(常用 $|M_1M_2|$ 表示)。由 M_1, M_2 各向 X 軸引垂綫，垂足分别为 P, Q。由图 1.6 知三角形 M_1NM_2 为直角三角形，由勾股弦定理得：

$$d=\sqrt{(M_1N)^2+(NM_2)^2}.$$

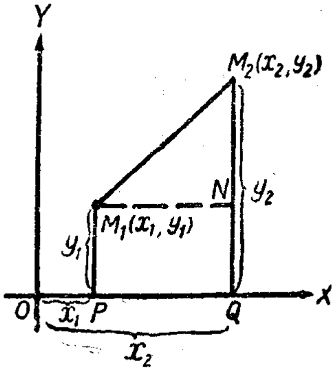

图 1.6

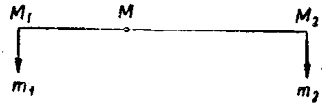

图 1.7

因
$$M_1N=OQ-OP=x_2-x_1,$$
$$NM_2=QM_2-QN=y_2-y_1,$$
故得:
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.1}$$

由上公式可推出平面上一点 $M(x,\ y)$到原点距离的公式为: $d=\sqrt{x^2+y^2}$。

例　求点$M_1(-2,3)$与$M_2(5,4)$間的距离。

解:
$$d=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}=7.07$$

(二) 綫段的定比分点

設有一棒如图 1.7, 在 $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$处的质量各为 m_1, m_2 求該棒的质量中心。設质量中心坐标为$M(x)$。根据物理中"力乘力臂等于力矩"的关系式得:
$$m_1\cdot M_1M=m_2\cdot MM_2,$$
$$\therefore\qquad \frac{M_1M}{MM_2}=\frac{m_2}{m_1}$$
以数軸上的坐标代入即得:
$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m_2}{m_1}.$$
解出 x 得:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

即为所求质量中心的坐标。假若棒的两端坐标各为 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 而两质量的比 $\frac{m_2}{m_1}=\lambda$。求质量中心的坐标时，抽去其物理意义即可得到数学上求定比分点的关系式。

已知两点: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, 在綫段 M_1M_2 内一点 $M(x, y)$ 分割此綫段所成的比为 $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$, 求点 M 的坐标 x, y。

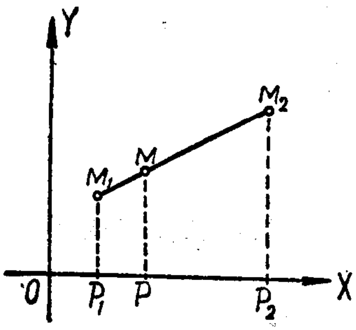

图 1.8

設以 P_1, P_2, P 分别表示由点 M_1, M_2, M 向 X 軸上所引垂綫的垂足，如图 1.8。由平面几何"一組平行綫与一角的两边相交，則此角的二边被平行綫分成互为比例的綫段"，得:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda,$$

而 $P_1P=x-x_1$, $PP_2=x_2-x$。代入上式得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

因为 x_1, x_2, λ 均为已知数，所以可将此等式看作一元方程来求解:

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$

$$\therefore \quad x+\lambda x=x_1+\lambda x_2,$$

$$\therefore \quad x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2,$$

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{1.2}$$

同理，由 M_1, M_2, M 向 Y 軸引垂綫，仿上可得出

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.3}$$

若求綫段的中分点，則在上述公式中使 $M_1M=MM_2$，即 $\lambda=1$。得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{1.4}$$

例 1. 在 $M_1(1,0)$及 $M_2(6,3)$的联綫上求一点M，使 M_1 到M的距离为M到M_2的距离的两倍。

解:

把
$$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{2}{1}=2$$

代入公式(1.2)及(1.3)，得:

$$x=\frac{1+2\times 6}{1+2}=\frac{13}{3},$$

$$y=\frac{0+2\times 3}{1+2}=2.$$

例 2. 一重心在点 $M(5,1)$ 的均匀細棒，它的一端在点 $A(-1,-3)$上，求另一端B的位置。

解: 設另端的坐标是 $B(x,y)$，而均匀細棒的重心是在棒的中点。故由公式(1.4)得:

$$5=\frac{-1+x}{2},$$

$$\therefore\quad x=11;$$

$$1=\frac{-3+y}{2},$$

$$\therefore\quad y=5.$$

得所求另一端的坐标为 $B(11,5)$。

例 3. 設三角形三頂点是 $A(0,0)$，$B(7,2)$，$C(-1,4)$，求此三角形重心M。

解: 由平面几何知，三角形的重心是三个中綫的交点。又知“三角形中綫相交于一点，此点到任一頂点的距离，等于此頂点到对边中

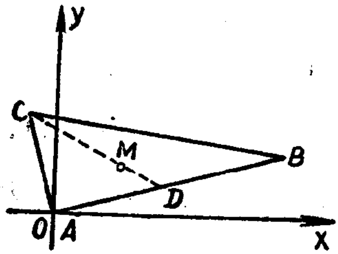

图 1.9

点的距离的三分之二”如图 1.9。設重心为 $M(x, y)$,

$$|CM| = 2|MD|;$$

而 D 为 OB 的中点,其坐标为 $D(x', y')$。由公式(1.4)知:

$$x' = \frac{7+0}{2} = \frac{7}{2};\quad y' = \frac{2+0}{2} = 1.$$

得 $D\left(\frac{7}{2}, 1\right)$。再求 $\frac{|CM|}{|MD|} = 2$ 的定比分点 M。由公式 (1.2) 及 (1.3) 得:

$$x = \frac{-1 + 2\cdot\frac{7}{2}}{1+2} = 2;\quad y = \frac{4+2\cdot 1}{1+2} = 2.$$

故所求重心为 $M(2, 2)$。

1-4. 曲綫与方程

解析几何中所研究的主要問題是:怎样由已知曲綫去列出方程,并根据方程討論該曲綫的性质;以及怎样由已知方程去画出曲綫这两方面的問題。

(一) 把曲綫作为动点的軌迹以建立方程。

平面曲綫可以作为平面上的点因运动而描繪出来的几何图形,只須点的运动适合于一定的規律。試用一条绳子,一端拴住一个小鉛球,握住绳的一端用力掄动,就会发現这个小鉛球繞着手兜圓圈。又如利用圓規时,将圓規一脚固定,两脚間分开一定长度,按固定点旋轉,另一脚就画出一个圓来。显然看出,圓的图形可看为距一定点等距离的点的軌迹。平面解析几何中,是将运动的点摆在坐标面上,把这个动点运动的規律,用关于动点的坐标 x, y 的二元方程表示出来。这种方程叫做曲綫的方程。

定义：若曲綫上任意点坐标 x, y 都适合于某方程，而凡是坐标能满足該方程的点也都在曲綫上，这方程叫該曲綫的方程。故欲判定某点是否在曲綫上，只需将該点坐标代入曲綫方程看是否滿足。如滿足方程就說明該点在曲綫上；如不滿足則說明該点不在曲綫上。

例 判断点 $A(0, 1)$，$B(2, 2)$是否在曲綫 $x^2+y^2=1$ 上。

解：以 A 点的坐标代入方程，得：

$$0^2+1^2=1.$$

因滿足方程，故知 A 在曲綫上。又以 B 点的坐标代入方程，得：

$$2^2+2^2\neq 1.$$

因不滿足方程，故知 B 点不在曲綫上。

建立曲綫的方程的方法。下面举几个簡单例子說明由曲綫建立方程的方法。由曲綫作为适合一定規律的动点的軌迹以建立方程，可分三个主要步驟进行：

1. 設 $M(x, y)$ 为軌迹上任一点，即动点坐标为 x, y。

2. 根据几何条件写出数学表达式。

3. 用 x, y 表示該表达式中的有关部分，化簡后即得方程。

例 1. 一动点与原点的距离为常数 R，求該动点軌迹的方程(也就是求中心在原点，半徑等于 R 的圓周的方程如图 1.10)。

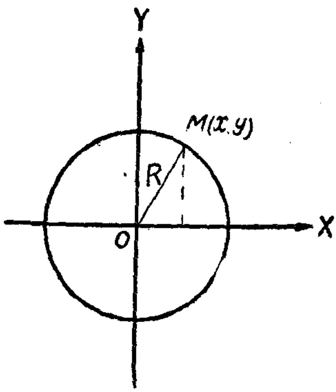

图 1.10

解：

1. 設 $M(x, y)$ 为动点。

2. 根据几何条件有 $|MO|=R$。

3. M, O 两点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，故得：

$$\sqrt{x^2+y^2}=R,$$

即: $$x^2+y^2=R^2. \tag{1.5}$$

今以 $R=5$ 的情况說明“曲綫上任意点的坐标都适合于此方程，而坐标滿足方程的点都在曲綫上”。圓周的方程为

$$x^2+y^2=25.$$

在图 1.11 的圓周上取各点 $A(5,0)$, $B(0,5)$, $C(-5,0)$, $D(0,-5)$等代入圓周方程均滿足。如以 $A(5,0)$点坐标代入为:

$$5^2+0^2=25.$$

如果不在圓周上取点，設在圓周外取一点 $A_1(5,3)$代入方程时得:

$$5^2+3^2\neq 25.$$

即可說明了“在圓周上的点滿足方程 $x^2+y^2=5^2$, 而不在圓周上的点则不滿足。”而另一方面，坐标能滿足方程的点，如 $M_1(3,4)$, 可在图 1.11 上找出，該点是在圓周上。

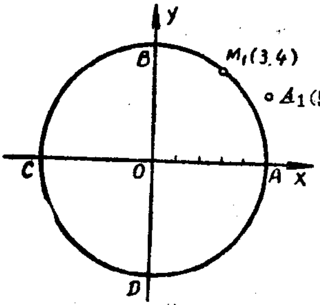

图 1.11

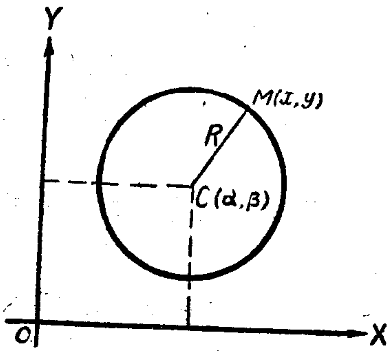

图 1.12

例 2. 試求中心在 $C(\alpha,\beta)$, 半徑等于 R 的圓周方程。(如图 1.12)。

解

1. 設$M(x,y)$为动点。

2. 根据几何条件有$|MC|=R$。

3. 根据两点間距离公式，得M, C两点間距离为