有 趣 的 数 论

O. 奥尔 著

潘承彪 译

责任编辑 徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 4.25印张 88千字

1985年2月第一版 1985年2月第一次印刷

印数：00001—40,000册

统一书号：13209•102 定价：0,75元

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围。各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见.请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012, [U.S.A.]。

编 辑 者

作者简介

奥伊斯坦·奥尔(Oystein Ore)1899年出生于挪威奥斯陆。1922年奥斯陆大学毕业之后，他到德国哥丁根大学继续研究数学，随后成为瑞典Mittag-Leffler研究所成员，并于1924年在奥斯陆获得哲学博士学位。第二年他是作为国际教育委员会成员，在巴黎和哥丁根渡过的，后来他成为奥斯陆大学副研究员。1927年他接受了耶鲁大学的邀请，从此开始了他在美国的事业。从1931年起，他成为耶鲁大学斯脱林讲座教授(Sterling Professor)。

从1936年到1945年，奥尔教授是耶鲁大学数学系系主任。他除发表了许多数学论文外，还写了不少书，其中内容较为初等的书有：《数论及其历史》(Number Theory and its History, 1948)；《卡达诺，赌博学家①》(Cardano, the Gambling Scholar, 1953)；以及《尼尔斯·亨利克·阿贝尔——数学的奇才》(Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary, 1957)。后期，他对图论特别有兴趣，写的书有：《图及其应用》(Graphs and Their Uses, 1963)，这是本丛书的第十册；《图论》(Theory of Graphs, 1962)；《四色问题》(The Four-Color Problem, 1967)。

1968年8月13日奥尔教授不幸于奥斯陆逝世，并安葬在那里。

---

① G. Cardano（亦名J. Cardan, 1501—1576）是欧洲文艺复兴时期的著名学者，通常把三次代数方程的求解公式称为Cardano公式。——译者

目　　录

第一章 引 言

§1.1 由来

数论是数学的一个分支，它研究**自然数**

1，2，3，…

的性质，自然数通常称为**正整数**。

考古学和历史告诉我们，人很早就会计数。先会做数①的相加，很久以后才会做数的相乘和相减。当为了要平均分配大量的苹果或捕获的鱼时，数的相除就是必要的了。这些数的运算统称为计算(calculations)。“calculation”一字起源于拉丁字 calculus，是小石子的意思。古罗马人在他们的计算板上就是用小卵石来表示数的。

当人们一旦知道了一些如何对数进行计算后，它就成为一种有趣的智力游戏。多少世纪以来，从各种各样的兴趣积累起来了如此之多的有关数的经验知识，以至今日可以说，在现代数学中，我们有了被称为数论的这样一个使人赞赏不已的，既丰富又漂亮的，结构严谨的分支。它的某些部分仍是简单的数字游戏，而另一些则是数学中最困难、最复杂的问题。

§1.2 数的玄学②

我们确实可以在有关数的迷信中，发现一些最早期的关

① 本书前六章中的“数”，未加说明者，均指自然数及零。——译者

② 我们把“Numerology”译为“数的玄学”，亦可译为“命理学”。——译者

于数的思想的形迹，在每个民族中都能找到这种例子．有为人偏爱的幸运之数，也有被人视为灾难而避开的不祥之数．我们有许多关于古希腊的数的玄学的资料，这种数的玄学，是他们关于各种数的象征性意义的看法和迷信．例如，大于1的奇数象征男性，而偶数则表示女性．数 5 是第一个男性数与第一个女性数之和，因此它象征着结婚或联合．

要想进一步知道更多的关于数的玄学的例子的人，可以去图书馆借阅柏拉图(Plato)所著的《共和国》一书的第八册．而这种数的玄学，从数学观点来看，是没有多大意义的，因为数学所要研究的是数的运算及其性质．但正如我们即将看到的，某些仍为数学家所研究的著名数论问题确是出于希腊的数的玄学．

至于对数的迷信，现在已没有多大理由会使我们感到神秘了．然而，大家都知道，女主人们绝不愿意在其餐桌上有13位客人；极少的旅店有第13号房间或13层楼．我们实在不清楚为什么要忌讳这个数．虽有许多解释，但绝大多数是没有多少根据的．例如，我们都记得在《最后的晚餐》上有13位客人，而第13个当然就是犹大．

在圣经，特别在旧约中，数 7 起着特殊的作用；在古老的德国民间传说中，数 3 与数 9 经常重复出现；还有，信奉印度教的印度人，在其神话中特别偏爱数10．

§1.3 毕达哥拉斯问题

我们可以提出毕达哥拉斯 (Pythagorean) 问题来作为早期数论的一个例子．我们知道，在一个直角三角形中，边长满足毕达哥拉斯关系式：

$$z^2 = x^2 + y^2, \tag{1.3.1}$$

其中 z 是斜边长。这一关系式使我们有可能在直角三角形中，当两边的长度已知时，去计算出第三边的长度。顺便说一下，以希腊哲学家毕达哥拉斯的名字来命名这一定理是有些不恰当的，因为差不多比他的时代要早两千年，巴比伦人就知道了这个定理。

有时，式（1.3.1）中的边长 x，y，z 都是整数。最简单的情形

$$x=3,\quad y=4,\quad z=5, \tag{1.3.2}$$

已经在巴比伦的泥版上发现了。我们可以把这一情形作如下的解释：假定有一根铁丝，我们在其上标上记号或者打结，将它分为十二等份。那末，当我们绕着固定在地上的三个小柱子拉紧铁丝，得到一个两边长度分别为 3 与 4 的三角形时，第三边的长度就为 5，并且其所对的角必为直角（图 1.3.1）。我们经常可以在数学史中读到，在尼罗河泛滥之后，当埃及的土地测量人员在丈量土地时，就是利用这一方法来作直角三角形的。然而，这很可能是科学史中很多虚构的故事之一，因为至今还没有找到这一说法的根据。

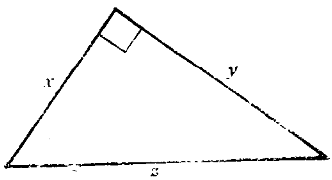

图 1.3.1

毕达哥拉斯方程(1.3.1)还有许多其它的整数解，例如，

$$x=5,\quad y=12,\quad z=13,$$
$$x=7,\quad y=24,\quad z=25,$$
$$x=8,\quad y=15,\quad z=17.$$

以后我们将指出，如何去求所有这样的解。希腊人知道如何去确定它们，有可能巴比伦人也知道。

当给定两个整数 x 和 y 后，总能找到一个相应的 z 满足式（1.3.1），但 z 很可能是无理数。当我们要求三个数全为整数时，它们所可能取的值就受到了严格的限制。亚历山大城的希腊数学家丢番图（Diophantos）（年代不详，约为公元200年左右）写了一本研究这类问题的书《算术》。从此，求方程的整数解或有理数解的问题就称为丢番图问题，而丢番图分析是现代数论的一个重要组成部分。

习　题

1. 试求几个毕达哥拉斯方程的其它的整数解。

2. 试再求出几个这样的整数解：使其斜边比较长的直角边长一个单位。

§1.4　形数

在数论中，我们经常碰到平方数，如

$$3^2=9,\quad 7^2=49,\quad 10^2=100,$$

以及立方数，如

$$2^3=8,\quad 3^3=27,\quad 5^3=125.$$

这种数的几何表示方法是我们从希腊数学思想中继承下来的许多遗产之一。希腊人喜欢把包括整数在内的所有的数都看作为几何量。因此，乘积 $c=a\cdot b$ 就被看作是边长为 a 与 b 的矩形的面积。我们也可以把 $a\cdot b$ 看作是一边有 a 个点，另一边有 b 个点的矩形点阵中的点的个数。例如，$20=4\cdot5$ 就是图1.4.1的矩形点阵中的点的个数。

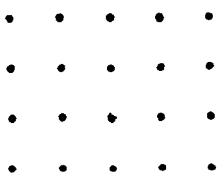

图　1.4.1

任何一个整数，如果它是两个整数的乘积，就可称为**矩形数**。当这矩形的两边有同样的长度时，这个数就是平方数。某些数除了用排列在一行上的点这种显然的方式来表示外，不能表为其它形状的矩形数。例如，5仅能表为一边是1个点，而另一边是5个点的矩形数（图1.4.2）。希腊人称这种数为**素数**。他们通常不把单独的一个点看作为数。单位1是用以构造出所有眞正的数的“基砖”。这样，1**过去不是，现在也不是素数**。

图 1.4.2

代替矩形和正方形，我们可以考虑规则地位于其它几何图形中的点。在图1.4.3中，画出了开头几个相邻的**三角数**。

一般地，第 n 个三角数由公式

$$T_n=\frac{1}{2}n(n+1),\quad n=1,2,3,\cdots \qquad (1.4.1)$$

给出。这些数有许多性质。例如，两个相邻的三角数之和是一个平方数：

$$1+3=4,\quad 3+6=9,\quad 6+10=16 \qquad (1.4.2)$$

等等。

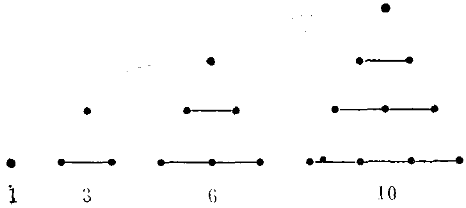

图 1.4.3

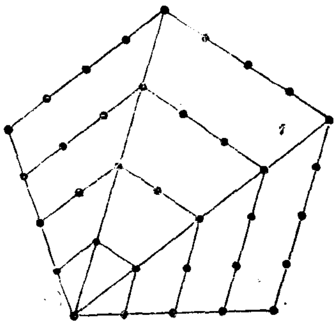

图 1.4.4

三角数与平方数已被推广为更一般的多角数。让我们用图1.4.4所定义的五角数来说明这一点。

可以看出，开头几个五角数是

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35. \quad (1.4.3)$$

可以证明第 n 个五角数 p_n 由公式

$$p_n=\frac{1}{2}(3n^2-n) \qquad (1.4.4)$$

给出。类似地，可以得到六角数，以及一般地由正 k 边形来定义的 k 角数。我们不再花费时间来讨论它们了。希腊的数论传入西欧之后，形数，特别是三角数，在文艺复兴后期的数的研究中是十分普遍的。偶尔，它们还在现代的数论文章中出现。

从这种几何分析中，可以推出一些简单的数的关系式。我们仅来指出一个事实。人们很早就发现了：当把奇数相加到某一个数为止时，所得的结果总是一个平方数，例如

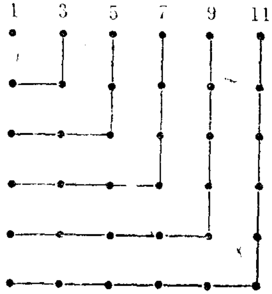

图 1.4.5

$$1+3=4,\quad 1+3+5=9,$$
$$1+3+5+7=16,$$

等等。为了证明这个关系式，我们只要看一下图 1.4.5 中画的一串重叠的正方形就清楚了。

习　题

1．用归纳法证明三角数的通项公式（1.4.1）．

2．证明五角数的公式（1.4.4）．

3．证明 k 角数的通项公式是

$$\frac{1}{2}k(n^2-n)-n^2+2n.$$

§1.5　幻方

如果你曾玩过一种游戏板的话，你应记得在板上有九个方格，上面有编号 1 到 9 按图1.5.1的样式排列。

游戏者力争把小圆片投放于编了号的方格中。这里，将每一行，每一列，以及每一条对角线上的数字加起来有同样的总和——15。

一般说来，一个**幻方**是指 1 到 n^2，这 n^2 个整数的这样一种正方形排列：使其每一行，每一列，及每一条对角线上的数字相加都有同样的和 s，s 称为**幻和**。图 1.5.2 给出了 $4^2=16$个数组成的一个幻方。这里幻和等于34。

对每一个 n 仅有一个幻和 s，且很容易求出其值。因为每一行的和为 s，共有 n 行，所以幻方中所有的数之和为 ns。但另一方面，由算术级数的求和公式知，从 1 到 n^2 的所有的数之和是

$$1+2+\cdots+n^2=\frac{1}{2}(n^2+1)n^2.$$

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 1.5.1

1	8	15	10
12	13	6	3
14	11	4	5
7	2	9	16

图 1.5.2

因此，

$$ns = \frac{1}{2}(n^2 + 1)n^2.$$

由此推得

$$s = \frac{1}{2}n(n^2 + 1). \qquad (1.5.1)$$

所以若 n 给定，那末 s 就确定了。对所有大于 2 的 n 都可以作出幻方；但读者容易验证，当 $n = 2$ 时，这样的幻方是不存在的。

在中世纪，这些正方形的这种不可思议的性质被认为是有奇异的魔力，因而它们被用来作为护身符，以保护佩戴者免受祸害。在 A．度勒(Albrecht Dürer，1471—1528)的著名版画《忧郁症》(Melancholia) 中的幻方是经常被复制的一个(见图1.5.3)。顺便指出，这个幻方也告诉了我们，当时这些数字度勒是如何写出来的。最后一行中间的两个数代表1514年，我们知道度勒的版画正是作于这一年。他可能正是从这两个数出发，通过不断的试验而找出了其余的数字。

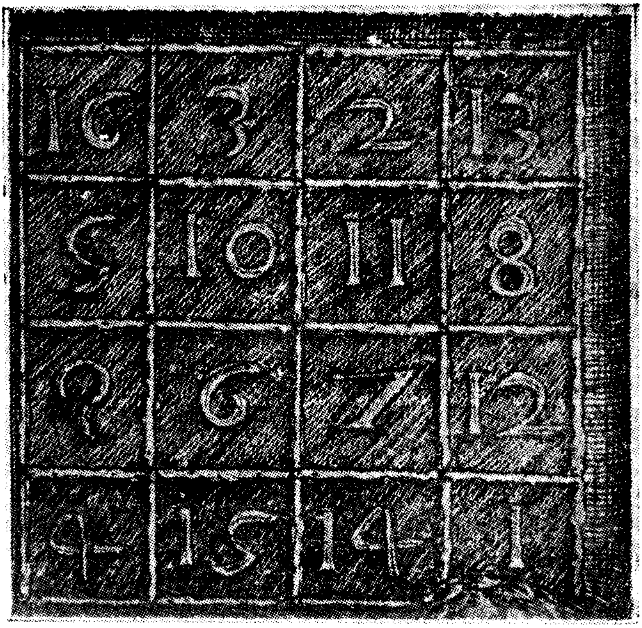

图 1.5.3

我们可以证明：当$n=3$时，本质上只有一个幻方，即图1.5.1中的那一个．为此，我们先写出一个一般形式的表

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}$$

并来考察这九个数可能取什么值．

首先，我们指出中心的数y_2一定是5．为此，我们注意到，由式（1.5.1）知，当$n=3$时，其幻和$s=15$．我们分别把在第二行，第二列及二条对角线上的三个数加起来，可以看出，除y_2外，每一个数都在这些和中只出现一次，而

y_2 出现了四次，因为它在这四个和的每一个中均出现。又因为每一个和都等于 s，所以我们有

$$\begin{aligned}4s &= 4\times 15 = 60\\ &= x_2+y_2+z_2+y_1+y_2+y_3+x_1+y_2+z_3\\ &\quad +z_1+y_2+x_3\\ &= 3y_2+x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3+z_1+z_2+z_3\\ &= 3y_2+1+2+\cdots+9\\ &= 3y_2+45.\end{aligned}$$

因此，

$$3y_2 = 60-45 = 15,\quad 即\ y_2 = 5.$$

在

$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & 5 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{array}$$

这个格式中，数 9 不能出现在角上。因为，比如若 $x_1=9$，那末 $z_3=1$（因 $s=15$），而这正方形将是

$$\begin{array}{ccc} 9 & y_1 & z_1\\ x_2 & 5 & z_2\\ x_3 & y_3 & 1\end{array}$$

因为 $y_1+z_1=x_2+x_3=6$，所以这四个数 y_1,z_1,x_2,x_3 一定都小于 6，而我们仅剩下了三个小于 6 的数，即 2，3 及 4，因此这是不可能的。这就证明了 9 一定位于一行或一列的中间，所以我们的正方形可取为

$$\begin{array}{ccc} x_1 & 9 & z_1\\ x_2 & 5 & z_2\\ x_3 & 1 & z_3\end{array}$$

数 7 不能与 9 位于同一行，因为它们的和超过15；数 7 也不能与 1 位于同一行，因为这时那一行上剩下的数也应是 7 。故 7 不能位于角上，并可假定这正方形有如下的格式：

$$\begin{matrix} x_1 & 9 & z_1 \\ 7 & 5 & 3 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{matrix}$$

这样， 9 所在的那一行中的其它两个数必是 2 与 4 ，因为不然的话，其和将超过15。进而， 2 必定与 7 在同一列，因为若 4 在那里的话，这一列的第三个数也将为 4 。通过这样的考察可以确定剩下的两个数 6 与 8 的位置，这样，我们就得到了图1.5.1中所示的幻方。

对于较大的 n 可以作出很多不同的幻方。有如今日的纵横字谜游戏一样，在十六、十七世纪，甚至还更晚，构造幻方非常盛行。本杰明·弗兰克林 (Benjamin Franklin) 是一个幻方迷。后来，他承认：当他任宾夕法尼亚州议会的职员时，为了消磨那乏味的办公时间，他填出了一些特殊的幻方，甚至一些幻圆——它是这样构成的，在一些按一定规则分布的互相相交的圆的交点处，填上一定的数字，使得每个圆上的数字之和相等。以下的内容取自《本杰明·弗兰克林文集》第四卷，第392—403页(耶鲁大学出版社)。

弗兰克林的幻方为人所知并显其异采，有这样一段有趣的经过。弗兰克林有一个朋友叫洛根(Logan)，一天他给弗兰克林看几本关于幻方的书，并说道：他不相信任何一个英国人，曾经做出过任何这类出色的事情来。“然后，他在这本书中指给我看了几个不常见的、较为奇妙的幻方。但当我认为它们中，沒有一个同我记得我曾作的一些幻方一样时，

他要求看看这些幻方。于是，下一次我去拜访他时，就带了一个在我的旧文件中找到的8阶（$n=8$）幻方给他。现在我给你们看看这个幻方，并说明它的性质。”（图1.5.4）。

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

图 1.5.4

弗兰克林仅对他的幻方提出了几个性质，我们让读者自己去发现更多的性质。我们看到幻和 $s=260$，而且将每半行，每半列加起来等于130，即260的一半。角上的四个数与中间的四个数之和为260。从16到10，再从23到17所组成的“折线”上的数字之和也为260。同样的，与此平行的每一个“折线”上的8个数之和也为260。

“然后，洛根先生给我看一本古老的四开本的算术书①，我记得是一个叫史坦非留斯的人写的。这本书中有一个16阶幻方。他说：想来这一定是一项花费了巨大劳动的工作。但是，如果我没有忘记的话，这个幻方只具有最普通的性质：分别将每一个水平的，垂直的以及对角线上的数字相加都具有相同的和，即2056。”

① 这本书是Michael Stiefel所著的Arithmetica integra, Nürnberg, 1544.