编者的话

本教材是根据一九八二年教育部审定的《中等专业学校数学教学大纲（草案）》（招收高中毕业生的工科专业通用）编写的，教材共分五册：一元微积分与常微分方程（公共部分）；空间解析几何与多元微积分；无穷级数与拉普拉斯变换；矩阵与线性方程组；概率与数理统计（后四册为选学部分）．供招收高中毕业生的工科中专试用．

本教材受教育部委托，由北京市高等教育局组织的编写组编写．北京机械学校朱铉道主编，参加编写的有北京化工学校罗崇蓬、北京无线电学校丁文江、北京煤矿学校徐迪兹、北京电力学校张齐金．

本册系教材的公共部分．由朱铉道、徐迪兹、罗崇蓬编写，其中微分学部分，是在高中已学过的基础上根据《大纲》要求作了必要的充实和提高；积分学部分是从目前高中阶段作为选学要求这一实际情况出发来编写的．教师在使用本册时，尚需根据学生实际情况灵活安排课时、组织教学．在编写本册的过程中，力求内容与全日制十年制高中数学教材相衔接、理论联系实际、符合培养中等技术人才的需要，并注意叙述的深入浅出和文字通俗易懂．书中配有较多的例题、习题供教师选用，书后附有答案．小字部分及带＊号的内容、习题不作为基本要求，仅供专业需要或学有余力的读者选用、选学．为配合国际单位制的推行，书中采用国际单位制以及与国际单

中等专业学校试用教材

（招收高中毕业生的工科专业通用）

高 等 数 学

（公共部分）

朱镒道　徐迪兹　罗崇蘧　编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

江苏海安印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 13　字数 269,000

1982 年 9 月第 1 版　　1986 年 2 月第 7 次印刷

印数 339,501—385,000

书号 13010·0798　　定价 1.60 元

位制并用的单位。

本册教材由北京工业学院孙树本教授主审，参加审稿的还有钮荣尧、郭叔英、王忠信、朱景莼、吴金生、雍丽秀、王玲。审稿同志对本书提出了许多宝贵的修改意见．在此，我们衷心地表示感谢．

限于编者的水平，教材尚未经过试用，以及编写时间仓促，书中一定存在着不少缺点和错误，恳切地希望广大读者批评指正，以便今后进一步修改和提高。

编　　者

1982.8.

目　录

第一章　极限与连续 ……………………………… 1

§ 1-1　函数 ……………………………… 1

*§ 1-2　双曲函数 ……………………………… 14

§ 1-3　极限 ……………………………… 19

§ 1-4　无穷大量与无穷小量 ……………………………… 32

§ 1-5　极限运算 ……………………………… 38

§ 1-6　函数的连续性 ……………………………… 47

第一章复习题 ……………………………… 59

第二章　导数与微分 ……………………………… 63

§ 2-1　导数概念 ……………………………… 63

§ 2-2　初等函数的求导 ……………………………… 72

§ 2-3　由参数方程所确定的函数的导数 ……………………………… 83

§ 2-4　函数的微分 ……………………………… 88

§ 2-5　微分在近似计算及误差估计中的应用 ……………………………… 97

第二章复习题 ……………………………… 105

第三章　中值定理与导数的应用 ……………………………… 109

§ 3-1　中值定理 ……………………………… 109

§ 3-2　罗必达法则 ……………………………… 116

§ 3-3　函数的增减性　曲线的凹凸及拐点 ……………………………… 122

§ 3-4　函数的极值　最大值、最小值问题 ……………………………… 130

§ 3-5　函数图形的描绘 ……………………………… 141

*§ 3-6　曲率 ……………………………… 146

§ 3-7　方程的近似解 ……………………………… 156

第三章复习题 ……………………………………………165

第四章　不定积分 ……………………………………168

§ 4-1　不定积分的概念与性质 ……………………………168

§ 4-2　换元积分法(Ⅰ) …………………………………179

§ 4-3　换元积分法(Ⅱ) …………………………………189

§ 4-4　分部积分法 ………………………………………196

§ 4-5　有理函数、三角函数的有理式及简单无理函数的积分举例 ……………………………………………202

§ 4-6　积分表的使用 ……………………………………214

第四章复习题 ……………………………………………217

第五章　定积分及其应用 ……………………………220

§ 5-1　定积分的概念 ……………………………………220

§ 5-2　定积分的性质 ……………………………………230

§ 5-3　牛顿-莱布尼兹公式……………………………………234

§ 5-4　定积分的换元积分法与分部积分法 ………………242

§ 5-5　定积分的近似积分法 ……………………………250

§ 5-6　广义积分 …………………………………………259

§ 5-7　定积分在几何学中的应用 …………………………267

§ 5-8　定积分在物理学中的应用 …………………………283

第五章复习题 ……………………………………………302

第六章　常微分方程 …………………………………306

§ 6-1　微分方程的基本概念 ……………………………306

§ 6-2　可分离变量的一阶微分方程 ………………………311

§ 6-3　一阶线性微分方程 ………………………………318

*§ 6-4　两类特殊的二阶微分方程 …………………………327

§ 6-5　线性微分方程及其解的结构 ………………………332

§ 6-6　二阶常系数齐次线性微分方程 ……………………339

§ 6-7　二阶常系数非齐次线性微分方程 …………………349

§6-8 常系数线性微分方程组解法举例 ……………………353
第六章复习题 ……………………………………………………363
附录 I 国际单位制(SI) ……………………………………366
附录 II 简易积分表 ………………………………………368
习题答案 ……………………………………………………………379

第一章　极限与连续

极限概念是微积分学中最重要、最基本的概念之一，也是微积分学的基础．本章将在复习函数有关概念后，用数量关系来阐明极限概念，介绍无穷小量概念及无穷小量与函数极限的关系，复习并引深极限的有关运算，然后讨论函数的连续性．

§1-1　函　　数

一、函数概念

定义　A 是给定的一个数集，f 是一个确定的对应规律，如果对于 A 中的任意一个数 x，通过 f，都有确定的数 y 与之对应，则称 f 是 A 上的函数①，记作

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{或} \quad y=f(x)$$

在函数定义中，因 x 是 A 中的任意一个数，可以取 A 中的不同数值，因此它是一个变量．而 y 是随着 x 的给定而确定，所以它也是一个变量．通常称 x 为**自变量**，y 为**因变量**．数集 A 为函数的**定义域**．若 $x_0\in A$，则称函数在 x_0 处**有定**

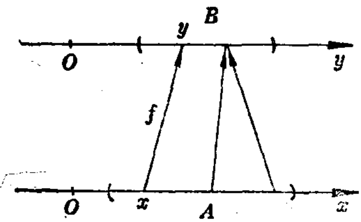

图　1-1

① 函数是由 A，f 两者确定，如果 A 已给定，则"f 是 A 上的函数"简称为"函数 f"．

义．当 x 遍取 A 中一切数时，与它对应的 y 值组成的数集 B，称为函数的**值域**．显然，值域 B 是随着 f 和 A 的给定而确定的(图 1-1)．

若对于每一个 $x\in A$，都有唯一的 $y\in B$ 与它对应，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**．今后如不作特别说明，我们所指的函数都是单值函数．

应当指出，记号 f 和 $f(x)$ 有着本质的差别，前者是对应规律，而后者表示根据对应规律 f 所取的对应于值 x 的数 y，即 x 处的函数值．由于历史的原因，习惯上把"A 上的函数 f"或"函数 f"说成是"y 是 x 的函数"或"函数 $f(x)$"．在下面的叙述中，我们也沿用习惯上的用法．

例 1 在机械中常用一种曲柄连杆机构(图 1-2)．主动轮转动时，连杆带动滑块 B 作往复直线运动．设主动轮半径为 r，转动等角速度为 ω，连杆长度为 l，求滑块 B 的运动规律．

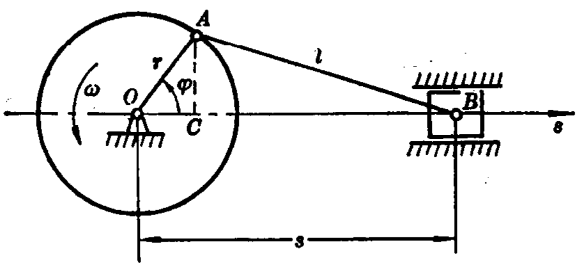

图 1-2

解 设在运动开始后，经过时间 t 秒时，滑块 B 离 O 点的距离为 s，求滑块 B 的运动规律就是建立 s 和 t 的函数关系式．

假设主动轮开始旋转时 A 点正好在 OB 连线上，经过时

间 t 后主动轮转了角 φ (弧度), 那末

$$\varphi=\omega t$$

$$OC=r\cos\varphi=r\cos\omega t$$

$$CA=r\sin\varphi=r\sin\omega t$$

$$CB=\sqrt{AB^2-CA^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$$

从而 $\qquad s=OC+CB$

$$=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}, \qquad t\in(0,\ +\infty)$$

这就是滑块 B 的运动规律.

例 2 已知一个单三角脉冲电压, 其波形如图 1-3 所示. 求电压 u 与时间 t 的函数关系式.

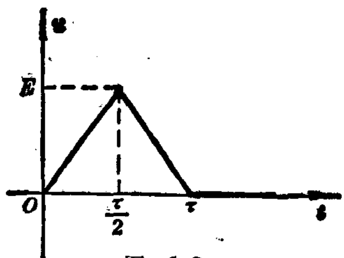

图 1-3

解 由图看出, u 随 t 变化的规律在各段时间$\left(0\leqslant t<\frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau,\ \tau\leqslant t\right)$内是各不相同的. 所以, 需要分段进行考察:

当 $0\leqslant t<\frac{\tau}{2}$ 时, 函数的图形是连接原点 (0, 0) 与点 $\left(\frac{\tau}{2},\ E\right)$ 的直线段, 于是

$$u=\frac{2E}{\tau}t$$

当 $\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau$ 时, 函数的图形是连接点 $\left(\frac{\tau}{2},\ E\right)$ 与点 $(\tau,\ 0)$ 的直线段, 故

$$u-0=\frac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}(t-\tau)$$

即 $$u=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$$

当 $t\geqslant\tau$ 时，函数的图形是横轴的一部分，因此

$$u=0$$

归纳上面讨论的结果，u 和 t 的函数关系式可写成分段的形式：

$$u=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t<\dfrac{\tau}{2}\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & \dfrac{\tau}{2}\leqslant t<\tau\\ 0, & \tau\leqslant t\end{cases}$$

这个函数的对应规律在不同的范围内是由不同的式子分段表示出来的，这样的函数通常叫做**分段函数**.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应范围的表示式中去计算.

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 1\\ \sqrt{2x^2-1}, & 1<x\leqslant 2\\ 0, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$ 及 $f(-1)$.

解 因为 $-\dfrac{1}{2}\in(-1,1]$，故应把 $-\dfrac{1}{2}$ 代入 $x-1$ 中计算，得

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$$

同理，可得 $f(1)=1-1=0$

$$f(\sqrt{2})=\sqrt{2(\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{3}$$

$$f(\pi)=0$$

在此例 3 中，函数的定义域为区间 $(-1, 4]$. 而 $-1\notin(-1, 4]$，因此函数在 $x=-1$ 处无定义，从而 $f(-1)$ 无意义.

一般地，如果对应规律可以用含自变量 x 的算式表示，这样的函数叫做**显函数**．如例1，例2，例3中的函数．如果对应规律由 x，y 间的一个方程

$$F(x, y)=0 \tag{1-1}$$

来确定，我们称这种函数为一个由方程(1-1)所确定的**隐函数**．

例如，方程

$$x^2+y^2-1=0 \tag{1-2}$$

对于区间 $[-1, 1]$ 上的任一 x 值，总可由方程(1-2)确定两个 y 值(当 $x=\pm1$ 时，两个 y 值重合)：

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

因此，方程(1-2)确定了一个双值的隐函数，函数的定义域是区间 $[-1, 1]$．

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的**显化**．对于由方程(1-1)确定的隐函数，不一定都能显化．例如，方程

$$xy-e^x+e^y=0 \quad (x\geqslant0)$$

也确定了一个隐函数，但它不能显化．

二、反函数及其图形

定义 如果给定函数 $y=f(x)$ 是一个由数集 A 到数集 B 上的单值函数，那末 f 的逆对应 f^{-1} 就确定了一个由 B 到 A 的函数

$$y\xrightarrow{f^{-1}}x \quad 或 \quad x=f^{-1}(y)$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**(图1-4)．

反函数的实质是它所表示的对应规律，至于用什么字母

来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的．我们习惯于自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示成 $y=f^{-1}(x)$．例如

函数	反函数	反函数（仍用 x 表示自变量）
$y=2x-1$,	$x=\dfrac{y+1}{2}$,	$y=\dfrac{x+1}{2}$
$y=e^x$,	$x=\ln y$,	$y=\ln x$
$y=x^3$,	$x=\sqrt[3]{y}$,	$y=\sqrt[3]{x}$
$y=x^2$,	$x=\pm\sqrt{y}$,	$y=\pm\sqrt{x}$

容易证明，函数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的（见图 1-5）．

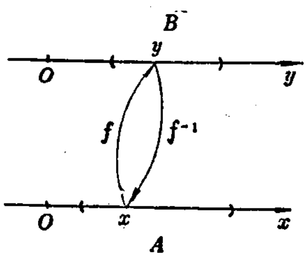

图 1-4

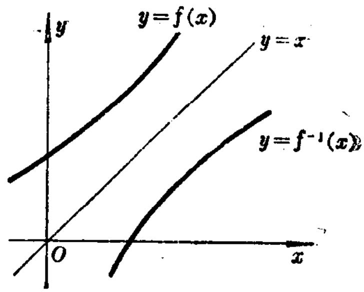

图 1-5

三、函数性态的简单研究

1. 函数的单调性

定义 如果对于区间 (a, b) 内的任意两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内为**单调增加**（或**单调减少**）．

在某一区间内单调增加或单调减少的函数都称为这个区

间内的单调函数，该区间叫做这个函数的单调区间.

例如，$y=\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，因此，我们说在 $(0, +\infty)$ 内 $y=\ln x$ 是单调函数，并称 $(0, +\infty)$ 为 $y=\ln x$ 的单调区间.

单调增加函数的图形为自左至右上升的曲线；单调减少函数的图形为自左至右下降的曲线.

2. 函数的有界性

定义 如果对于区间 (a, b) 内的一切 x 值，都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，其中 M 是一个与 x 无关的正数，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界.

反之，如果对于任意给定的正数 N，在区间 (a, b) 内恒有这样的 x 值存在，使

$$|f(x)| > N$$

则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内**无界**.

例如，因为

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \quad (x \neq 0)$$

所以函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在其定义域内有界. 而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界. 因为对于任意给定的正数 N，在区间 $(0, +\infty)$ 内总能找到使

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| > N$$

成立的 x $\left(只要取\ 0<x<\frac{1}{N}\right)$.

显然，如果函数的图形能介于两平行线 $y=\pm M$ 之间，函数是有界的；否则就是无界的.

3．函数的奇偶性

定义 设 $y=f(x)$ 定义在区间 $(-l, l)$ 内，如果对于一切 $x\in(-l, l)$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于一切 $x\in(-l, l)$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例 4 设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 $(-l, l)$ 内，求证：$f(x)$ 总可以写成一个偶函数与一个奇函数之和.

证 考虑 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$

和 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

显然，$\varphi(-x)=\varphi(x)$； $\psi(-x)=-\psi(x)$

即 $\varphi(x)$ 为偶函数，$\psi(x)$ 为奇函数．而

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

故 $f(x)$ 总可以写成一个偶函数与一个奇函数之和.

4．函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得一切 x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为这个函数的**周期**.

显然，如果 $y=f(x)$ 以 T 为周期，则 $nT\ (n=\pm1, \pm2, \cdots)$ 也是它的周期. 通常周期函数的周期是指最小正周期.

例如，$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)\ (\omega>0)$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数.

例 5 设 $y=f(x)$ 的周期为 π，作变量代换 $t=2x$，求证：2π 是函数 $\varphi(t)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 的一个周期.

证 由于对一切 t，都有

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{1}{2}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{t}{2}+\pi\right)=f\left(\frac{t}{2}\right)=\varphi(t)$$

故 2π 是函数 $\varphi(t)$ 的一个周期.

例 5 告诉我们，变量代换可以改变函数的周期.

四、复合函数　初等函数

定义 设 $y=f(u)$ 是数集 B 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是由数集 A 到数集 B 的函数，因此，对于每一个 $x\in A$，经过 u，都有确定的 y 与它对应，这时就在 A 上产生了一个新的函数，用 $f\circ\varphi$ 表示. 函数 $f\circ\varphi$ 叫做 A 上的复合函数，记作

$$x\xrightarrow{f\circ\varphi}y,\qquad y=f\circ\varphi(x)\quad 或\quad y=f[\varphi(x)]\qquad (x\in A)$$

其中 u 称为**中间变量**，A 是复合函数的**定义域**，$f\circ\varphi$ 表示由 $x(x\in A)$ 产生 y 的**对应规律**.

图 1-6 形象地表示了 A 上的复合函数 $f\circ\varphi$ 与 φ、f 之间的关系.

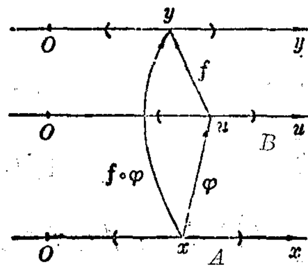

图 1-6

例 6 设 $y=f(u)=\arcsin u$，$u\in[-1, 1]$，$u=\varphi(x)=\ln x$，

$x\in(0, +\infty)$. 求$f[\varphi(x)]$，并指出它的定义域。

解 $y=f[\varphi(x)]=\arcsin\varphi(x)$

$$=\arcsin(\ln x),\quad x\in\left[\frac{1}{e}, e\right]$$

由例 6 看出，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的定义域可能不相同.

例 7 设 (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\varphi(x)=1+x^2$;

(2) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $\quad\varphi(x)=2x+1$

求$f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

解 (1) $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{\varphi(x)}=\dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\varphi[f(x)]=1+[f(x)]^2=1+\frac{1}{x^2};$$

(2) 由 $\varphi(x)=2x+1\leqslant 0$, 得 $x\leqslant -\dfrac{1}{2}$;

$\varphi(x)=2x+1>0$, 得 $x>-\dfrac{1}{2}$.

于是

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-1, & x\leqslant -\dfrac{1}{2}\\ 1, & x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

又因 $\varphi(-1)=-1$, $\varphi(1)=3$

故

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}-1, & x\leqslant 0\\ 3, & x>0\end{cases}$$

例 7 表明: $f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$, 这就是说，复合函数的复合次序不能调换.

利用复合函数概念，可把一些较复杂的函数拆成几个简单函数，以便于对函数进行研究和计算．例如，函数 $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}$，$u=1+v$，$v=\operatorname{tg} w$，$w=\frac{x}{3}$ 四个函数复合而成的．

幂函数，三角函数，反三角函数，指数函数和对数函数统称为基本初等函数．由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和函数的复合步骤所构成，并用一个式子表示的函数称为**初等函数**．如，例1、例6及例7(1)中的函数都是初等函数；例2、例3中的函数及例7(2)中的 $f(x)$ 等都不是初等函数．

习　题　1-1

1．下列各题所给的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$;

(2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$;

(3) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$;

(4) $y=\arccos x$ 和 $y=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$;

(5) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}1-x, & x<1;\\ 0, & x=1;\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

（提示：两个函数相同是指定义域和对应规律完全一致.）

2．已知 $\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，　证明：$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

3．求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$ 并指明其定义域：

(1) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$,　　　$\varphi(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

(2) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$　$\varphi(x)=\sin x$.