

热门题

高考数学热门题

裴光亚 编著

湖北教育出版社

前 言

什么叫高考热门题？我们把甄别考生潜能且反映高考命题趋势的题叫做高考热门题。高考热门题有哪些特征呢？首先是要体现考试内容的重点。一种事物，只有当它具有重要性时，才能成为热门话题。因此，热门题必须是重点题，但重点题不一定是热门题。比如高考试卷中的传统题，同样可以考查重要的知识和方法，但由于这类题的构成规律、设问方式及其作答思路是考生所熟知的，考生只须按经验思考，依常规答题，体验不到能力上的挑战，缺乏那种因未知而生发的探索欲望，所以不能构成热门题。也就是说，热门题的第二个特征是它的新颖性，一种新的情境和不同寻常的设问方式。不仅如此，热门题还必须具有生命力，在今后的高考命题中具有示范性，对中学教学具有导向性。没有生命力的东西，不值得我们研究。比如，数学中曾出现过一种题型，即以填空题的方式设计在解答题中，要求考生在阅读理解的基础上，按既定思路填空。这样的题型当然新颖，但经过高考实践的检验后，继续下去的可能性不会很大。这类题虽然也给我们带来过视觉上的冲击，但不能作为热门题。因此，我们说，热门题必须同时具备三个特征：重要性，新颖性和持续性。

热门题的三个特征至少给我们两点启示：

一、我们必须关注它。因为它具有良好的选拔功能，它的目

的在于测定和区分出具有不同水平和能力的学生。这一领域虽然陌生，但你必须直面它、了解它、熟悉它，奠定一个良好的心理基础，才能避免高考时的茫然。如果你希望在高考中最大限度地发挥自己的才能，获得一个理想的成绩，你就不能不对它表现出高度的热情，认真的去鉴赏它、模拟它和反思它。因此，热门题和涉及热门题的读物，就成了高考备考的重要资料。

二、热门题的新颖性和持续性必然表现为资源的稀缺性。高考资料浩如烟海，但鲜有一本关于热门题的读物可以进入课堂，进入高三学生那沉重而又信息量不足的书包。热门题淹没在题海中，只有把它整理出来，形成系统，才可以得出规律性的认识，这正是高考内容改革向高考备考提出的挑战。

正是基于上述需求和挑战，在湖北教育出版社的精心组织下，才有了这样一套书——《高考各科热门题》。

本套书分数学、物理、化学三册，每册由两部分构成。

第一部分，典型题例。这一部分对高考热门题进行归类，对每一类的题型特点作出描述，并揭示出解这类题的基本思路。这一部分的例题在于提供热门题的样式，阐明其考查目的，评介其解题方法。

第二部分，专题评析。这一部分按知识内容划分，其意图有二：一是描述热门题在各个知识部分中的表现，从中可以看到高考命题的发展趋势；二是对热门题作必要的延展，为高考复习提供具有“全程性”的材料。也就是说，我们在关注热门题的同时，也不能忽视那些相对热门题来说的基本题。

国家考试中心将考试内容改革的原则归结为三句话：注重能力和素质的考查，不拘泥于教学大纲，增加应用性和能力型题目。这也是我们选择例题和习题的原则。其中，例题中蕴含的那种具有教育价值和启示作用的因素，如思路分析、规律总结、命题意图等，本书设有专门的点评，习题都配有详细的解答过程，



构成本书不可或缺的部分。这些为便于读者与作者充分交流的举措，也是本书的一大特色。

建议读者在选用本书时，把第一篇作为教材，第二篇则作为教学参考。做题之后应该对照书中的答案作些反思。

“高考热门题”是一个新的课题，面对这一课题，我们一直在思考：高三学生负担沉重，如果我们弄得不好，就会使他们雪上加霜，这将有悖于我们的初衷，也有悖于教师的良知。为此，在朱恒足先生的主持下，我们进行了多次的研讨和论证。其中包括对已出版的众多教辅资料进行比较，对历年来高考研究成果进行清理，对部分材料进行教学试验，这样才形成了现在的方案。作为本书的作者，我们一直在从事高三的教学和教研工作，并发表了多篇论文，作过专题报告，被邀请到全国各地讲学，在电视台和新闻报纸上作热线咨询，对高考的走向进行预测。我们由衷感谢历届高三教师和学生对我们这项工作的认可，但“高考热门题”毕竟是一个新的题目，难免有很多不尽人意的地方，我们殷切希望听取读者的批评和建议，使本书不断完善。

作 者

2001 年 10 月

· 目 录 ·

前言/1

第一篇 典型题例

- 一 信息迁移题/1
- 二 图表分析题/12
- 三 直觉判断题/20
- 四 代数推理题/27
- 五 交汇综合题/41
- 六 开放探索题/62
- 七 实际应用题/90

第二篇 专题评析

- 一 函数、数列、不等式/116
- 二 三角函数、复数/151
- 三 立体几何/160
- 四 解析几何/178

参考答案/201

附录 向备考者进言——如何在竞争中脱颖而出/320

第一篇 典型题例

高考数学命题的一个显著特点是在稳定的基础上不断创新. 创新的原则包括: 更加注重对考生能力和素质的考查; 命题范围遵循中学教学大纲, 但不拘泥于教学大纲; 试题设计增加应用性和能力型的题目. 正是依据这些原则, 高考试题中涌现出了一些新的题型, 它们是传统题的发展, 但又不同于传统题. 它们变传统题的知识立意为能力立意, 变传统题的常规情境为新颖情境, 变传统题单一固定的设问方式为多样灵活的设问方式, 从而为那些真正有潜力的考生提供了展示才能的机会, 也给一般的考生设置了障碍. 这样的题型包括: 信息迁移题, 图表分析题, 直觉判断题, 代数推理题, 交汇综合题, 探索开放题和实际应用题.

一 信息迁移题

所谓信息迁移题, 就是在试题中给出一种新的信息, 如已有知识的引申、某一新定义、某种背景材料、某特定的考查指令等, 这些对考生来说都是陌生的, 考生必须从中获取信息, 在所吸收的信息刺激下, 激活大脑这个内存知识库, 从中提取出相关知识, 再将所给信息和相关知识整合或者加工, 得到答案. 由于这种题要求考生对给定的材料进行解读, 因而又叫阅读理解题. 对这种题来说, 题面信息一般不全在考试说明所规定的内容范围之内, 但只要解题

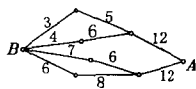
过程所必须用到的知识和方法不超越考试说明中关于考试内容的规定,同时试题的审读和理解也不超越说明中有关能力要求的规定,便可以认为该试题没有超纲.因此这种题往往表现出新颖性、综合性和应用性等特点.



例题选讲

例 1 (2001, 全国)

如图,小圆圈表示网络的结点,结点之间的连线表示它们有网线相联.连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最



大信息量.现从结点 A 向结点 B 传递信息,信息可以分开沿不同的路线同时传递.则单位时间内传递的最大信息量为 ()

- (A) 20 (B) 24 (C) 26 (D) 19

解 设从 B 出发的第 i 条线路(依从上至下的顺序 $i = 1, 2, 3, 4$)可以通过的最大信息量为 A_i , 则:

$$A_1 = 3, A_2 = 4, A_3 = 6, A_4 = 6.$$

又 $A_1 + A_2 = 7 \leq 12, A_3 + A_4 = 12 \leq 12$, 所以传递的最大信息量为

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 19$$

答:(D).

例 2 记满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合为 M : 当 $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ 时, 总有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|.$$

若有函数 $g(x) = x^2 + 2x - 1$, 则 $g(x)$ 与 M 的

这道题可以说具有排列组合的背景,但又不同于课本中关于排列组合的问题;你可以说它是分析推理题,但又不同于教材中的证明题.解答这道题的关键是读懂题意.要对图形进行观察,对信息传递的过程进行分析,对每条线路可能传递的信息量进行比较,解答此题只需一点基本常识,即串联线路通过的最大流量,取决于最“弱”的部分.

题中直接给出了新定义或新运算,只需在理解这些信息的意义的基础上紧扣它,则此类题易



关系是 () 解答.

$$(A) g(x) \subset M \quad (B) g(x) \in M$$

$$(C) g(x) \notin M \quad (D) M \subset g(x)$$

分析 解答本题首先要理解对函数 $f(x)$ 的集合 M 的规定, 然后按此规定, 检查 $g(x)$ 是否符合 M 的规定, 若符合则有 (B); 若不符合, 则有 (C). 对于元素与集合的关系来讲, (A)、(D) 是不正确的.

因为当 $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} & |g(x_1) - g(x_2)| \\ &= |x_1^2 + 2x_1 - 1 - (x_2^2 + 2x_2 - 1)| \\ &= |x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2 + 2| \\ &\leq |x_1 - x_2| \cdot (|x_1| + |x_2| + 2) \\ &\leq 4|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

所以 $g(x) \in M$.

答: (B).

例 3 (1994, 全国)

在测量某物理量的过程中, 因仪器和观察的误差, 使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 共 n 个数据. 我们规定所测物理量的“最佳近似值” a 是这样一个量: 与其它近似值比较, a 与各数据的差的平方和最小. 依此规定, 从 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 推出的 $a =$ _____.

分析 抓住“最佳近似值”这一新定义, 不难得到: 问题转化为当函数

$$f(a) = (a - a_1)^2 + (a - a_2)^2 + \dots + (a - a_n)^2$$

有最小值时, 求 a . 这实际上是一个关于 a 的二次函数, 所以此题是关于二次函数的最小值的

将文字语言转化为符号语言或图形语言, 往往可以把问题归结到我们所熟悉的数学领域.

问题.

答: $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

例 4 对任意一个非零复数 z , 定义集合

$$M_z = \{\omega \mid \omega = z^{2n-1}, n \in N\}$$

(1) 设 α 是方程 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ 的一个根, 试用列举法表示集合 M_α .

(2) 设复数 $\omega \in M_z$, 求证 $M_\omega \subseteq M_z$.

解 (1) 因为 α 是方程 $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ 的根, 所以

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{ 或 } \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$\text{当 } \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{ 时, 因 } \alpha_1^2 = i, \alpha_1^{2n-1} = \frac{(\alpha_1^2)^n}{\alpha_1} = \frac{i^n}{\alpha_1}, \text{ 故}$$

$$M_{\alpha_1} = \left\{ \frac{i}{\alpha_1}, \frac{-1}{\alpha_1}, \frac{-i}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_1} \right\} \\ = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}$$

当 $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ 时, 因 $\alpha_2^2 = -i$, 故

$$M_{\alpha_2} = \left\{ \frac{-i}{\alpha_2}, \frac{-1}{\alpha_2}, \frac{i}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_2} \right\} = M_{\alpha_1}$$

因此, 不论 α 取哪一个值, 集合 M_α 是不变的, 即

$$M_\alpha = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}.$$

(2) 因为 $\omega \in M_z$, 所以存在 $m \in N$, 使得 $\omega = z^{2m-1}$, 于是对任意 $n \in N$, $\omega^{2n-1} = z^{(2m-1)(2n-1)}$, 由于 $(2m-1)(2n-1)$ 是正奇数,

先定义一个数学对象 (本例定义 M_z), 再研究性质, 是数学公理化思想的体现.

证明第(2)问时注意: “ $M_\omega \subseteq M_z$ ” 的意义是: ω 的奇数次

$\omega^{2n-1} \in M_z$, 所以 $M_\omega \subseteq M_z$.

幂可表示为 z 的奇数次幂.

例 5 $f(x)$ 的定义域是 R , 若 $c \in R$, 使 $f(c) = c$, 则称 c 是 $f(x)$ 的一个不动点. 设 $f(x)$ 的不动点数目是有限多个. 下述命题是否正确? 若正确, 请给予证明; 若不正确, 请举一个例子说明.

(1) $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的不动点数目是奇数;

(2) $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的不动点数目是偶数.

分析 不妨从特殊情形入手, 探索命题的正误.

由新信息联想已有的信息, 寻求新旧知识的联系, 可使问题顺利解决.

根据不动点定义, 不动点 c 一定在直线 $y = x$ 上. 取奇函数 $y = x^3 (x \in R)$, 则不动点个数, 即为直线 $y = x$ 与函数 $y = x^3$ 的交点个数, 此时有 3 个交点, 即有 3 个不动点; 取奇函数 $y = \sin x (x \in R)$, 此时也有 3 个不动点; 取奇函数 $y = x^{\frac{1}{3}} (x \in R)$, 此时只有一个不动点, ……由于不动点数目是有限多个, 故可猜想命题(1)正确.

取偶函数 $f(x) = 1$, 则它与直线 $y = x$ 只有一个交点, 即只有一个不动点, 故命题(2)错误.

解 (1) 正确. 证明如下:

因为 $f(x)$ 为奇函数, 且 $x \in R$, 所以 $f(-0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0$. 因此, 0 是 $f(x)$ 的一个不动点.

假设 $c \neq 0$ 是 $f(x)$ 的不动点, 则由定义知 $f(c) = c$. 又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-c) = -f(c) = -c$. 因此 $-c$ 也是 $f(x)$ 的不动点. 显然 $c \neq -c$, 这表明 $f(x)$ 的非 0 不动点如果存在, 则必成对.

又根据题设 $f(x)$ 只有有限个不动点, 因此 $f(x)$ 的不动点数目为奇数.

(2) 不正确.

例如 $f(x) = 1$ 是偶函数. 设 c 是 $f(x) = 1$ 的不动点, 则一方面 $f(c) = c$, 另一方面 $f(c) = 1$, 由此得 $c = 1$. 因此 $f(x) = 1$ 有且只有一个不动点. 故命题不正确.

例 6 (1999, 上海)

设椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 曲线 C_2 的方程为 $y = \frac{1}{x}$, 且 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点 P .

(1) 试用 a 表示点 P 的坐标;

(2) 设 A, B 是椭圆 C_1 的两个焦点, 当 a 变化时, 求 $\triangle ABP$ 的面积函数 $S(a)$ 的值域;

(3) 记 $\min \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 中最小的一个. 设 $g(a)$ 是以椭圆 C_1 的半焦距为边长的正方形的面积, 试求函数 $f(a) = \min \{g(a), S(a)\}$ 的表达式.

解 (1) 将 $y = \frac{1}{x}$ 代入椭圆方程, 得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2 x^2} = 1$, 化简得

$$b^2 x^4 - a^2 b^2 x^2 + a^2 = 0.$$

由条件, 有 $\Delta = a^4 b^4 - 4a^2 b^2 = 0$.

又 $ab = 2$. 于是可由方程解得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}, x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ (舍去).

故 P 的坐标为 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{a})$.

第(3)小题给出的是关于若干数的最小数概念的符号信息, 待求的虽然用同一概念符号表达, 但求得的不是一个最小数, 而是一个函数表达式. 解答该题要求考生读懂题意, 即: $\min \{g(a), S(a)\}$ 为两个数 $g(a), S(a)$ 中的较小值, 而不能理解为函数 $g(a)$ 与 $S(a)$ 的最小值中的较小值. 又由于 a 是参数, 因而 $f(a)$ 就是一个函数式了, 于是求 $f(a)$ 的问题本质上是比较 $g(a)$ 与 $S(a)$ 的大小的问题.



(2)因为在 $\triangle ABP$ 中, $|AB| = 2\sqrt{a^2 - b^2}$,

高为 $\frac{\sqrt{2}}{a}$,所以

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2(1 - \frac{4}{a^4})}$$

因为 $a > b > 0, b = \frac{2}{a}$,所以 $a > \frac{2}{a}$,即 $a >$

$\sqrt{2}$,得 $0 < \frac{4}{a^4} < 1$,于是

$$0 < S(a) < \sqrt{2}$$

故 $\triangle ABP$ 的面积函数 $S(a)$ 的值域为 $(0, \sqrt{2})$.

$$(3) g(a) = c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{4}{a^2},$$

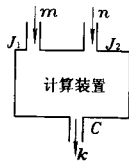
解不等式 $g(a) \geq S(a)$,得

$$a \leq \sqrt{2} \text{ (舍去)}, \text{ 或 } a \geq \sqrt[4]{6}.$$

故 $f(a) = \min\{g(a), S(a)\}$

$$= \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} & (\sqrt{2} < a \leq \sqrt[4]{6}) \\ \sqrt{2(1 - \frac{4}{a^4})} & (a > \sqrt[4]{6}) \end{cases}$$

例 7 如图,是一个计算装置示意图, J_1, J_2 是数据入口, C 是计算结果的出口,计算过程是由 J_1, J_2 分别输入自然数 m 和 n ,经过计算后得自然数 k 由 C 输出.此种计算装置完成的计算满足以下三个性质:



①若 J_1, J_2 分别输入1,则输出结果为1;

②若 J_1 输入任何固定自然数不变, J_2 输入自然数增大1,则输出结果比原来增大2;

③若 J_2 输入1, J_1 输入自然数增大1,则输出结果为原来的2倍.

试问:

(1)若 J_1 输入 1, J_2 输入自然数 n , 输出结果为多少?

(2)若 J_2 输入 1, J_1 输入自然数 m , 输出结果为多少?

(3)若 J_1 输入自然数 m , J_2 输入自然数 n , 输出结果为多少?

解 由题意, 设 $f(m, n) = k$, 则

$$f(1, 1) = 1, f(m, n+1) = f(m, n) + 2$$

$$f(m+1, 1) = 2f(m, 1)$$

(1)在 $f(m, n+1) = f(m, n) + 2$ 中, 令 $m = 1$, 则

$$f(1, n+1) = f(1, n) + 2$$

由此可知 $f(1, 1), f(1, 2), \dots, f(1, n), \dots$ 组成以 $f(1, 1)$ 为首项, 2 为公差的等差数列. 所以

$$f(1, n) = f(1, 1) + 2(n-1) = 2n - 1.$$

(2)因为 $f(m+1, 1) = 2f(m, 1)$, 所以

$$f(1, 1), f(2, 1), \dots, f(m, 1), \dots$$

组成以 $f(1, 1)$ 为首项, 2 为公比的等比数列. 故

$$f(m, 1) = f(1, 1) \cdot 2^{m-1} = 2^{m-1}$$

(3)因为 $f(m, n+1) = f(m, n) + 2$, 所以

$$f(m, 1), f(m, 2), \dots, f(m, n), \dots$$

组成以 $f(m, 1)$ 为首项, 2 为公差的等差数列. 所以

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(m, 1) + 2(n-1) \\ &= 2^{m-1} + 2n - 2 \end{aligned}$$

本题向我们展示了表示函数的另一种方法:即通过建立一个模型来表示函数. 解题时, 不论何种表示法, 都要转化为解析式或函数图像来处理.

本题的信息量大, 粗看不知如何入手, 但若把条件写成二元函数式, 并把它看作某一变量的函数, 抽象出等差或等比数列模型, 问题便迎刃而解.



闯关训练

1. 非空集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 并且 S 中的元素满足条件: 如果 $a \in S$, 则 $6 - a \in S$. 适合上述条件的集合 S 的个数是 ()

- (A) 4 个 (B) 6 个 (C) 7 个 (D) 8 个

2. 设 $I = \{1, 2, \dots, 9\}$, A 与 B 是 I 的子集. 若 $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, 就称集对 (A, B) 为“好集”, 那么所有好集的个数是 ()

- (A) 6^2 (B) $6!$ (C) 3^6 (D) 2^6

3. 计算机是将信息转换成二进制数进行处理的, 二进制就是“逢二进一”. 如 $(1101)_2$ 表示二进制数, 将它转换成十进制数就是 $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$, 那么将二进制数 $(\underbrace{111 \cdots 11}_{16\text{个}})_2$ 转换

成十进制数是 ()

- (A) $2^{17} - 2$ (B) $2^{16} - 2$ (C) $2^{16} - 1$ (D) $2^{15} - 1$

4. 若数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的值各异, 且 $a_{n+8} = a_n$ 对任意的 $n \in N$ 都成立, 则下列数列中可取遍 $\{a_n\}$ 前 8 项值的数列为 ()

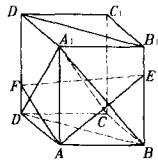
- (A) $\{a_{2k+1}\}$ (B) $\{a_{3k+1}\}$ (C) $\{a_{4k+1}\}$ (D) $\{a_{6k+1}\}$

5. 对于每个实数 x , 设 $f(x)$ 是 $y = 2 - x^2$ 和 $y = x$ 这两个函数中的较小者, 那么 $f(x)$ 的最大值是_____.

6. 如果定义 $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2})$ 的值为_____.

7. 若记号 “ $*$ ” 表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算, 即 $a * b = \frac{a+b}{2}$, 则两边均含有运算符号 “ $*$ ” 和 “ $+$ ”, 且对于任意 3 个实数 a, b, c 都能成立的一个等式可以是_____.

8. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在 BB_1, DD_1 上, 且 $AE \perp A_1B, AF \perp A_1D$.



①求证: $A_1C \perp$ 平面 AEF ;

②若规定两个平面所成的角是这两个平面所 第 8 题图

组成的二面角中的锐角(或直角),则在空间中有定理:若两条直线分别垂直于两个平面,则这两条直线所成的角与这两个平面所成的角相等.

试根据上述定理,当 $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$ 时,求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成角的大小.(用反三角函数值表示.)

9. 设绝对值小于 1 的全体实数的集合为 S . 在 S 中定义一种运算 $*$, 使得

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

①证明:如果 a 与 b 属于 S , 那么 $a * b$ 也属于 S .

②证明:结合律 $(a * b) * c = a * (b * c)$ 成立.

10. 用 $f(A)$ 表示正数 A 的整数部分的位数.

①对于 $a > b > 1$ 的数 a, b , 试决定一个具有下列性质的正数 M : “对于 $x \geq M$ 的所有 x , $f(a^x) > f(b^x)$.”

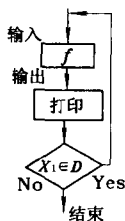
②试判别下列命题是否正确: “对于某正数 N , 如果 $f(3^N) > f(2^N)$, 那么对于 $x \geq N$ 的所有 x , 有 $f(3^x) > f(2^x)$.”

11. 对任意函数 $f(x)$, $x \in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:

①输入数据 $x_0 \in D$, 经数列发生器输出 $x_1 = f(x_0)$;

②若 $x_1 \notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1 \in D$, 则将 x_1 反馈回输入端, 再输出 $x_2 = f(x_1)$, 并依此规律继续下去. 现定义

$$f(x) = \frac{4x-2}{x+1}.$$



(1) 若输入 $x_0 = \frac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$. 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;

(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输入的初始数据 x_0 的值;

(3) 若输入 x_0 时, 产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足: 对任意正整数 n , 均有 $x_n < x_{n+1}$, 求 x_0 的取值范围.

12. 根据指令 (r, θ) ($r \geq 0, -180^\circ < \theta \leq 180^\circ$), 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ ; θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r .

(1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向. 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4, 4)$.

(2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17, 0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动. 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍. 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)

二 图表分析题

所

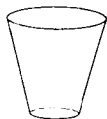
谓图表分析题,就是试题用图形、图表来传达信息,考生通过相关的知识,对图形的特征作出判断,将表格所附数据合理运用起来解答.图形可以表达丰富的内涵,如函数图像的单调性、奇偶性、周期性、凸凹性以及变化速度等,其中某些性质,如凸凹性、变化速度等并不在中学的研究范围之内,这就对考生的思维层次提出了较高的要求.表格提供的信息往往具有多余的成分,要求考生正确的选择,合理运用其中的有效信息.



例题选讲

例 1 (1998, 全国)

向高为 H 的水瓶中注水,注满为止.如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图像如右图所示,那么水瓶的形状是 ()



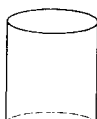
(A)



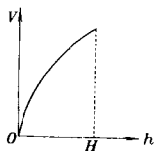
(B)



(C)



(D)



分析 本题与常规题的区别是明显的:①没有给出通常的函数解析式,也没有给出一个数字,

本题不在于考查知识,而在于考查