第八章

無限數列與級數

致讀者：

爲了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的説明」。

8.1 數列

1 本章我們要探討無限數列與級數。你在高中時，於幾何級數及算術級數等名稱之下，也許遇到過一些特殊的數列；當你進入大學繼續研讀數學時，將會發現無限數列與級數，在「分析」中扮演了一個極其重要的角色 —— 微積分及其相關題材的更高深研究，有時稱爲「分析」。

2 首先，以數的集合{ 2,5,8,11, ・・・} 來看，它是由 2 開始，相繼加 3 而形成的；是數的「序列」（簡稱數列）之一例。這個數列，也可用 a_1，a_2，a_3，a_4，・・・來記述，其中 $a_1 = 2$，以 $n = 2$ 開始，加 3 於 a_{n-1} 便得 a_n， 2, 5, 8, 及 11 等數，分別爲 a_1，a_2，a_3，及 a_4 等項。繼續推求，我們得 $a_5 = a_4 + 3 =$ ________，$a_6 =$ __________.

14　　17

已知 $a_{148} = 443$, 則 $a_{149} =$ __________.

446

3 我們已給 { a_n } 的定義爲：

$a_1 = 2$

及

$a_n = a_{n-1} + 3$　　設 $n = 2, 3, 4, \cdots$

這個公式，稱爲**循環公式**，因 a_n 可用 a_{n-1} 來界定。循環公式對於連續產生數列的各項，雖屬精密，但也有顯著的缺點，例如，在我們能夠求得 a_{26195} 之前，必須先知道 a_{26194} 才行。讓我們用 n 來尋求 a_n 的另一個公式。

$a_2 = a_1 + 3$

$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3(2)$

$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 3(3)$

$a_5 = a_4 + 3 = a_1 + 3(\underline{\qquad})$

$a_6 = a_5 + 3 = a_1 + 3(\underline{\qquad})$

對 $n = 2, 3, 4, \cdots$ 而言，我們可寫成 $a_n = a_{n-1} + 3 = a_1 + 3$ $(\underline{\qquad})$.

4　　5　　$n-1$

因此，$a_n = a_1 + 3(n-1)$，或(因 $a_1 = 2$) $a_n =$ __________ (化簡)。

$3n-1$

注意：明示公式 $a_n = 3n-1$, 對 $n=1$ 與對 $n = 2, 3, \cdots$ 同樣有效。

4　上面的數列，我們可用各種方式來記述：

(i) $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，其中 $a_1 = 2$ 及 $a_n = a_{n-1} + 3$, 設 $n = 2, 3, 4, \cdots$.

(ii) $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，其中 $a_n = 3n-1$，設 $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(iii) $2, 5, 8, \cdots, 3n-1, \cdots$.

利用括紐，可作更簡短的記法：

(iv) $\{3n-1\}$，或

(v) $\{a_n\}$，其中 $a_n = 3n-1$，設 $n = 1, 2, 3, \cdots$.

你大概已經認出，這個數列是**算術級數**的一例。

5 以 $\{g_n\}$ 作為第二個例子，其中 $g_1 = 2$，並以 $n = 2$ 開始，$g_n = 3g_{n-1}$，前四項為 _____, _____, _____, _____.

2　　6　　18　　54

6 不用上述 g_n 的循環公式（g_n 是前元素 g_{n-1} 的函數），我們以 n 來尋求 g_n 的另一公式。

$$g_2 = 3g_1$$
$$g_3 = 3g_2 = 3^2 g_1$$
$$g_4 = 3g_3 = 3^3 g_1$$
$$g_5 = 3g_4 = \underline{\qquad\quad} g_1$$
$$g_6 = 3g_5 = \underline{\qquad\quad} g_1$$

對 $n = 2, 3, 4, \cdots$ 而言，我們可以寫成 $g_n = 3g_{n-1} = \underline{\qquad} g_1$.

$3^4 g_1$　　$3^5 g_1$　　$3^{n-1} g_1$

因此，$g_n = 3^{n-1} g_1$，　或（因 $g_1 = 2$）$g_n = \underline{\qquad\quad}$.

$2 \cdot 3^{n-1}$

注意：明示公式 $g_n = 2 \cdot 3^{n-1}$，對 $n = 1$ 與對 $n = 2, 3, \cdots$ 同樣有效。

7 所以這個數列可作如下的表示：

$2, 6, 18, \cdots, 2\cdot 3^{n-1}, \cdots$，或簡記爲 $\{\underline{\qquad\qquad}\}$.

$\{2\cdot 3^{n-1}\}$

如果你已經認出數列 $\{3n-1\}$ 是一個算術級數，那麼大概也能察覺到 $\{2\cdot 3^{n-1}\}$ 是一個**幾何級數**。

8 設法求出一個公式，以代表數列的通項（一般項），也許是很有趣的。下面是另一數列：

$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \cdots, c_n, \cdots$.

這個數列既不是算術級數，也不是幾何級數。（也許你能指出理由。）讓我們用前元素 c_{n-1}，來尋求 c_n 的循環公式。

$c_1 = 1$
$c_2 = 3 = c_1 + 2$
$c_3 = 6 = c_2 + 3$
$c_4 = 10 = c_3 + \underline{\qquad}$
$c_5 = 15 = c_4 + \underline{\qquad}$
$c_6 = 21 = c_5 + \underline{\qquad}$

4　5　6

一般而言，似乎可作這樣的合理猜測： $c_n = c_{n-1} + \underline{\qquad}$.

n， 大概你已經這樣猜過。

9 我們以公式 $c_n = c_{n-1} + n$ 作爲上述數列的生成式，由 $n=2$ 開始，取 $c_1 = 1$. 則

$c_1 = 1$
$c_2 = 1 + 2$
$c_3 = 1 + 2 + 3$

依此類推，而至普遍情形：

$$c_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

這種情形，以使用Σ（希臘文大寫字母，讀作ㄒㄧ・ㄍㄜ・ㄇㄚ）記法代表總和爲方便，於是

$$c_1 = 1 = \sum_{k=1}^{1} k$$

$$c_2 = 1 + 2 = \sum_{k=1}^{2} k$$

$$c_3 = 1 + 2 + 3 = \sum_{k=1}^{3} k$$

普遍而言，$c_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n =$ ________（Σ記法）。

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

10 在以上進度中，我們已經發現了用 n 求 c_n 的一個明示公式，此公式對 $n = 1$ 與對 $n = 2, 3, \cdots$ 同樣有效。所以我們可寫成

$1, 3, 6, 10, \cdots, \sum_{k=1}^{n} k, \cdots$，或簡記爲 {________}.

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}$$

11 公式 $c_n = \sum_{k=1}^{n} k$ 已用 n 明白地表示，也就是 c_n 爲前 n 個正整數之和。不過，此公式用起來仍有困難，因爲不易求得 c_{19567} ，

除非我們知道 c_{19666} 的值。以後我們可看出，每一正整數 n 都對下式爲眞：

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

因此，我們剛才那個數列，即 $\{c_n\}$，其中 $c_1=1$,及 $n=2,3,\cdots$ 時，$c_n=c_{n-1}+n$，與數列 $\{\sum_{k=1}^{n}k\}$ 相同，而後者又相同於下面的數列：

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\underline{\quad},\underline{\quad},\underline{\quad},\underline{\quad},\underline{\cdots},\underset{(第n項)}{\underline{\quad}},\underline{\cdots}$$

我們也可寫成 $\{f(n)\}$，其中 $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$1, 3, 6, 10, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}, \cdots$$

12 由這些例子，可見一個數列，能有各種不同的構式。不過，構式儘管不同，我們所得的數列則一：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

或

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$$

或

$\{a_n\}$，其中 $a_n=f(n)$，設 $n=1, 2, 3, \cdots$

13 我們作成無限數列的正式定義如下：

***8.1.13 *定義** 一個無限數列，就是以正整數集合$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$爲定義域的一個函數$f$。記法：$\{f(n)\}$，或$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$。

我們稱$f(1)$爲數列的首項，$f(2)$爲第二項，等等，普遍而言，$f(n)$是數列的第________項。

第n項

14 一個函數同時具有定義域和值域。數列是一個函數，它的定義域是________。

$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$（或正整數集合）

數列的值域，可以代表種種事物；但在本書中，我們僅限於實值數列，這種情形，值域應屬於________。

實數集合（或$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$）

15 我們來做一個總結：所謂$\{a_n\}$，其中$a_n = f(n)$，設$n = 1, 2, 3, \cdots$，意思是指集合

$\{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots\}$

而言。此函數的定義域爲正整數集合，而值域爲實數集合。

16 正的奇整數數列，可用數種方式來表示：

$1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots$

或

$\{2n-1\}$

或簡單寫成

1, 3, 5, 7,· · ·

最後型式，希望讀者猜測一個 a_n 的公式，即 $a_n = f(n) =$ ____.

$2n-1$

爲求完全清晰起見，可將以上數列寫成：

$\{(n, a_n) \mid n$ 爲 ________ 及 $a_n =$ ________ $\}$.

一正整數　　$2n-1$

17 (a) 寫出 $\{2n\}$ 的前四項：______, ______, ______, ______.

2　4　6　8

(b) 此數列第 17 項爲________；第 44 項爲________；第 68 項爲________.

34　　88　　136

(c) 此數列也可記述如下：

$\{($　　　$) \mid n$ ________________ $\}$.

$\{(n, 2n) \mid n$ 爲一正整數$\}$
（或 $\{(n, a_n) \mid n$ 爲一正整數及 $a_n = 2n\}$）

18 代表所示數列 2, 4, 8, 16, ⋯, a_n, ⋯的通項公式爲 $a_n =$ ________.

$a_n = 2^n$（還有其他正確的答案。繼續研讀下去。）

19 寫出數列$\{(n-1)\cdot(n-2)^2\cdot(n-3)^3\cdot(n-4)^4+2^n\}$的前六項。

______, ______, ______, ______, ______, ______.

2　4　8　16　320　34624

注意：以上數列的前四項，與進度 18 中$\{a_n\}$的前四項相同。

20 再看$\{f(n)\}$，其中

$$f(n)=\begin{cases}2^n, & \text{設 } n=1,2,3,4\\ 13, & \text{設 } n=5,6,7,\cdots\end{cases}$$

前六項爲______, ______, ______, ______, ______, ______.

2　4　8　16　13　13

我們又得前四項與進度 18 中的$\{a_n\}$相同的一個數列。

21 由以上兩個進度，可見**僅指出一些有限數目的項，是不能唯一決定一個數列的**。

進度 18 的說明，如作如下的表述，也許比較正確：「所示數列 2, 4, 8, 16, ⋯, a_n, ⋯，本書作者心目中以什麽公式來代表 a_n？」換句話說：「試猜我所想到的是什麽？」

「型樣」體認是創造數學的本質。進度 18 中所得的答案，是一個「合理的」公式；敏銳的學生，可成功地獲致進度 19 與 20 兩個同樣合理的公式。以後，當我們提出類似進度 18 的問題時，並不認爲錯誤。

22 寫出下列各數列第 n 項的示式：

(a) $7, 7, 7, 7, \cdots, a_n, \cdots$; $a_n =$ ________________.

(b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \cdots, b_n, \cdots$; $b_n =$ ________________.

(c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, c_n, \cdots$; $c_n =$ ________________.

(d) $1, -1, 1, -1, \cdots, d_n, \cdots$; $d_n =$ ________________.

(e) $1, 0, 1, 0, \cdots, e_n, \cdots$, $e_n =$ ________________.

(a) $a_n = 7$

(b) $b_n = 1/2^{n-1}$

(c) $c_n = 1/n$

(d) $d_n = (-1)^{n+1}$

$$\left(\text{或 } d_n = (-1)^{n-1} \text{ 或 } d_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 為奇時} \\ -1, & n \text{ 為偶時} \end{cases} \right)$$

(e) $e_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 為奇時} \\ 0, & n \text{ 為偶時} \end{cases}$ $\left(\text{或 } e_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^{n+1}] \right)$

23 數列 $\{\cos(n-1)\pi\}$ 具有以下的前五項：

______, ______, ______, ______, ______.

$\cos 0, \cos \pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \cos 4\pi$

(或 $1, -1, 1, -1, 1$)

數列 $\left\{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\right\}$ 是這樣開始進行的：______, ______,

______, ______, ______.

$$\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{5\pi}{2}, \sin\frac{7\pi}{2}, \sin\frac{9\pi}{2}$$

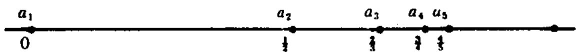
（或 $1, -1, 1, -1, 1$ ）

這兩個數列都和 $\{(-1)^{n-1}\}$ 相同。（一個已知函數可以用種種不同的同義構式來記述。）

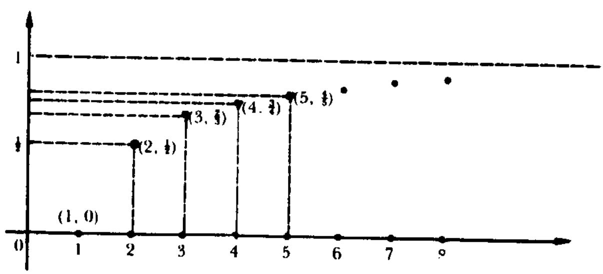
24 描繪一個數列的圖形，常有幫助。以數列 $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$，即______，______，______，______，______，…為例。

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5}$$

此數列的數線圖形，有如下圖所示：



此數列的笛卡兒圖形，有如下圖所示：

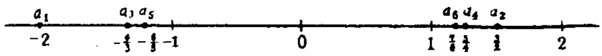


25 寫出 $\left\{(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 的前六項：

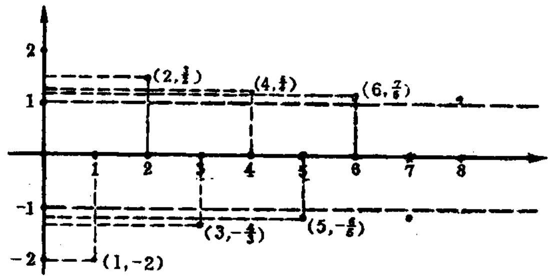
______，______，______，______，______，______。

$$-2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ -\frac{6}{5},\ \frac{7}{6}$$

在另外一張紙上，作此數列的數線圖形。並適當標註各點以示明：$a_1, a_2, \cdots$.



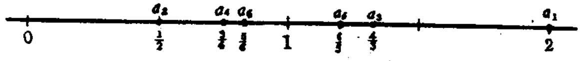
對此同一數列，作一笛卡兒圖形，並適當標註各點：$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \cdots$.

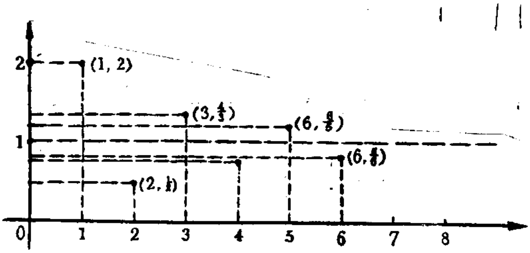


26 數列 $\{a_n\}$，其中 $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，試寫出前六項：

______，______，______，______，______，______，並（在另一紙上）描繪一數線圖形與笛卡兒圖形。

$$\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6}$$





27 習題　有時，所做多於所問是值得的。所以，不管是否問到，你都可以寫出一數列的若干項，再作數列的圖形，以你覺得合適的方法去研究它。

下列各種情形，你認為下一項是什麼？推廣而得的通項是什麼？

		下一項	通　項
(a)	$-1, 2, -3, 4, \cdots$	______	______
(b)	$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots$	______	______
(c)	$54, 36, 24, 16, \cdots$	______	______
(d)	$48, 36, 24, 12, \cdots$	______	______
(e)	$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \cdots$	______	______
(f)	$\frac{1}{2}, (\frac{2}{3})^2, (\frac{3}{4})^3, (\frac{4}{5})^4, \cdots$	______	______
(g)	$-3, 5, \frac{7}{3}, \frac{9}{5}, \cdots$	______	______

以下是我們所預期的答案。（其他構式可能也是正確的；參看進度 21.）

	下一項	通　項
(a)	-5	$(-1)^n n$
(b)	$9/10$	$\frac{2n-1}{2n}$ $\left(\text{或} 1-\frac{1}{2n}\right)$
(c)	$32/3$	$54(\frac{2}{3})^{n-1}$
(d)	0	$48-12(n-1)$（或 $60-12n$）或 $12(5-n)$
(e)	$\sqrt{11}$	$\sqrt{2n+1}$
(f)	$(\frac{5}{6})^5$	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(g) 11/7 $\dfrac{2n+1}{2n-3}$

28 **習題** 試察 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，以 $n=2$ 開始，$a_n=a_{n-1}+n^3$．視 a_n 為 n 的函數，求一代表 a_n 的明示公式。如需輔導，可把下列解答欄中的提示，每次揭看一列。

提示：(1) 寫出六項，並尋求一個「型樣」。

(2) 各項為某一乘冪的整數。什麼乘冪？

(3) a_n 與進度8－11的 c_n 有關。怎樣相關法？

答案：$\{a_n\}$ = _____，_____，_____，_____，_____，…，_____（第 n 項），…

$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, \cdots, \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \cdots$

29 **推想習題** 試細察一個如下開始進行的數列：

$0, 1, 2-1, 4-2+1, 8-4+2-1, 16-8+4-2+1, a_7, \cdots, a_n, \cdots$

或

$0, 1, 1, 3, 5, 11, a_7, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots$

(a) 如 $n=2, 3, \cdots$，你認為用 a_{n-1} 與 n 以表示 a_n 的普遍循環公式是什麼？

答案：a = _____ 及 a_n = _____，設 $n=2, 3, \cdots$.

0 $2^{n-2}-a_{n-1}$（這是本書作者所構想的公式。）

(b) 取以上 $\{a_n\}$ 的定義，試求 $a_n=f(n)$ 的明示公式，對