简明数理逻辑基础

刘治旺　邵春林　毕富生　赵哈黎

福建人民出版社

一九八五年·福州

简明数理逻辑基础

刘治旺　邵春林　毕富生　赵哈黎

*

福建人民出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本850×1168毫米　1/32　8.875印张　210千字

1985年6月第1版

1985年6月第1次印刷

印数：1—8,210

书号：7173·704　　定价：1.70元

目　　录

绪　　论

数理逻辑发展到今天，尽管只有短短的三百年历史，但已经是一门门类众多、系统完整的学科。随着现代科学技术的突飞猛进，它同其他许多学科的联系日益密切。数理逻辑研究的可计算性，是计算机运算的理论基础，它所揭示的推理的逻辑关系，在计算机的线路设计中得到应用。到了本世纪四十年代，数理逻辑在开关线路、电子计算机、自动控制、各种讯息处理系统等方面的应用获得显著成果。数理逻辑的发展和应用，进一步促进了哲学、语言学、法学和心理学等学科的发展，使这些学科产生了许多新的研究方法和值得探讨的问题。随着人们科学知识水平的不断提高，数理逻辑的理论及其应用必将进一步得到发展。

长期以来，唯心主义者歪曲数理逻辑的某些成果，他们割裂了思维和客观世界的联系，把数理逻辑神秘化，把数理逻辑的理论说成是不依赖任何经验的先验的理论。现代资产阶级哲学中影响较大的分析学派、逻辑实证主义、语义哲学等都曾片面地利用数理逻辑的某些方法和观点来“论证”其唯心主义理论。所以，我们今天学习和研究这门科学，要把数理逻辑本身同唯心主义哲学对它的歪曲和利用严格区别开来。我们之所以关心和重视这门科学，一方面因为它本身是经过实践检验的科学理论，另一方面要发挥它的真正作用，使它为提高人们的理论思维能力服务。

1.数理逻辑研究的对象和主要内容

逻辑学是研究思维形式及其规律的科学，它是一门比较抽象的科学，是人们认识真理和证明真理的一种工具。

逻辑学研究的内容和成果对任何科学都是必要的。

形式逻辑认为，思维形式就是思维的共有因素的联系形式，如概念、判断和推理。这些思维形式的具体结构就是思维的逻辑结构。让我们来看推理的逻辑结构：

例1 造福于人类的知识都是有价值的，
科学是造福于人类的知识，
所以，科学是有价值的。

例2 所有哲学上的唯物主义者都是无神论者，
所有马克思主义者都是哲学上的唯物主义者，
所以，所有马克思主义者都是无神论者。

例1和例2这两个推理的具体内容，即推理涉及的具体对象是不同的，但它们具有相同的逻辑结构。在逻辑学中，这一结构可用符号表示为下列形式：

所有M都是P，
所有S都是M，
所以，所有S都是P。

我们知道，这种共同的逻辑推理形式是由三个命题构成的。其中，前两个命题是前提，最后一个是结论。这种形式的推理就是传统逻辑中所谓的直言三段论推理。仅根据这一推理形式本身，我们无法辨别其正确与否。为此，传统逻辑制定了一整套复杂的推理规则，来保证三段论推理的正确性。然而，这些推理规则中的某些规则，如只准有三个名词的规则，又和自然语言的意义有

着十分密切的关系。因此，在传统逻辑中，要对思维的逻辑结构及其规律作精确的、纯形式的研究，实际上是不可能的。

另外，传统逻辑对假言、选言等混合而成的复杂推理及其形式，很难断定它们是否正确。比如，

例3 如果张三在课堂上认真听讲而且课后认真复习，那么他就会取得良好成绩。张三课后认真复习，但他没有取得良好成绩。所以，他在课堂上并未认真听讲。

如果按传统逻辑的方法来处理，那么可以把这个推理形式化如下：

如果p而且q，则r。
q而且非r.
———————
所以，非p。

其中，p表示“张三在课堂上认真听讲”；q表示“他课后认真复习”；r表示“他会取得良好成绩”。但是从上边的形式化中，我们很难断定此答案是否正确。如果我们采取数理逻辑的方法，那么就可以弥补这些缺陷。在数理逻辑中，我们可以用一系列的符号把上述的三段论的推理形式和假言、选言混合而成的复杂推理形式，表示为纯形式的符号公式。在不受自然语言的含混性干扰的情况下，通过对符号公式本身的研究，我们就能确定其相应的推理形式是否正确。

一般地说，传统逻辑推理理论的主要缺陷有：

第一，传统逻辑所讨论的主要限于主宾式语句和三段论，以致在很多方面都显得不适于使用。所谓主宾式语句是指“S是P”式的语句。它所讨论的限于四种：

全称肯定（A）：凡S是P，即SAP；

全称否定（E）：凡S非P，即SEP；

特称肯定（I）：有S是P，即SIP；

特称否定（O）：有S非P，即SOP。

然后，在这四种语句之上发展了三段论。

但是，在人们日常思维的领域里，常见的一些关系命题和关系推理是不能简单地被归结为主宾式的。比如，“甲大于乙，乙大于丙，所以，甲大于丙”和“帝国主义是战争的根源，所以，消灭帝国主义即消灭战争的根源”，这两种推理都是牵涉到关系的推理，不能归结为主宾式。也许有人会说，前一个推理可以变成三段论：

凡大于乙的是大于丙，

甲是大于乙的，

所以，甲是大于丙的。

这种说法把“大于”关系当作性质，从而把四项变成三项。这是一种混淆。“大于”根本不是性质。在“甲大于乙”这个命题中，甲和乙处于同等地位，都是关系主项，“大于”并不是属于甲的一种性质，而是甲和乙两者之间的关系。这个推理中有四项，即“甲”、“大于乙”、“乙”、“大于丙”，因而它违反了三段论规则。这个推理不是由主宾式语句构成的，不属于三段论。至于后一个关系推理更沾不上三段论的边。再如这样两个关系命题：

（1）有的液体可以溶解一切固体。

（2）一切固体都可以被有些液体溶解。

这两个关系命题从（1）可以推出（2），却不能从（2)推出(1)。（1）意指：有一个y，使得y是液体并且对所有x而言，如果x是固体，那么y溶解x。（2）意指：对所有x而言，如果x是固体，那么就有一个y使得y是液体并且y溶解x。这两个关系命题在传统逻辑中是无法表示的。

第二，传统逻辑的研究限于主宾式语句，这样对量词的研究非常有限，没有抓住量词的实质，而只能得出量词的一些次要性

质。请看下边两个命题：

(3) 有一个自然数大于其余一切自然数。

这个命题等于说：有一个y，使得y是自然数并且对所有x而言，如果x是自然数而$x \neq y$，那么y大于x。

(4) 对于任何自然数n都有自然数x和y，使得$2(n+1)=x+y$而且x和y都是质数。

(3) 和 (4) 中量词的使用，无论在日常语言中或者数学中都是不可缺少的，用传统逻辑的全称判断和特称判断显然是很难陈述出来的。

第三，传统逻辑研究一些逻辑结构并使用一些符号来表达逻辑形式，但由于它停留在自然语言上，没有专门的逻辑符号来处理各类思维形式，并由于它没有完全脱离自然语言，所以不够精确，因之也就不具有演算的性质，不能把推理转化为演算，对于复杂的命题形式及推理，它更是无法解决了。

由于上述原因，人们觉得传统逻辑很不够用，需要加以改革和发展。同时，由于理论科学的发展，特别是数学等科学的发展，有力地促进了演绎理论的研究。正是由于这些原因，从德国数学家兼哲学家莱布尼茨开始，逐渐创建了数理逻辑。

什么是数理逻辑？它就是采用数学的方法来研究思维形式的逻辑结构及其规律的学问。所谓数学的方法，就是用一套符号（即人工符号语言）表达思维的逻辑结构和规律，从而把对思维的研究转变为对符号的研究。

数理逻辑对推理形式结构的研究，采用了符号系统、形式化、公理化等数学方法，因而克服了传统逻辑的种种缺陷。它建立了各种演绎的符号系统，这些系统通常称之为“逻辑演算”或“逻辑推理”的系统。所谓逻辑演算，一般是指演绎逻辑的符号化的形式系统。系统中的公理和定理都是逻辑定律，如同一律、

矛盾律、排中律以及演绎推理所依据的各种定律。因为它本身就是关于逻辑的理论，所以它不假定各种推理形式，而只假定几个最基本的推演规则，根据这些推演规则可以从少数几个公理推出全部逻辑定律。

数理逻辑的逻辑演算同传统逻辑对推理的研究相比，有许多不同之点，主要是：

1.使用符号语言，简化了推理形式。数理逻辑使用一套专门的符号来处理各种思维形式，完全消除了自然语言的含混性，摆脱了自然语言的干扰和限制。数理逻辑的一系列定理是根据已知前提、推理规则、已证的定理推演出来的。这种演算过程是通过符号公式来进行的，而这种演算系统也就呈现为符号系统。数理逻辑借助人工符号语言来表示推理的形式结构，从而把推理关系表现为公式与公式之间的关系，使推理转化为公式的推演。这样的逻辑运算显然能象算术或代数那样严格、精确，自然要比传统逻辑推理简单得多。

2.数理逻辑借助人工符号语言，使整个推理形式化。它抽出自然语言的关联词，如“非”、“且”、“如果……则……”等，用人工符号语言表示思维形式的结构，把思维形式完全形式化，这样不仅能显示思维形式的结构，使推理换成演算，而且还有利于获得一系列逻辑定理。在数理逻辑中，逻辑联结词、命题、量词和推理的形式等，都用完全符号化、形式化的方法反映着思维的逻辑结构及其规律。当然，传统逻辑也具有形式的特点，但它并不是完全形式化的。

3.数理逻辑同逻辑学的其它分支相比较，它的主要特征是系统性。它通过符号把思维的各种逻辑形式联系起来，组成一个完整的系统。它研究各种系统（比如推理系统、控制系统等等）的逻辑发展过程，也研究系统之间的相互关联。

从以上分析可知，数理逻辑对思维的逻辑结构及其规律的研究比传统逻辑精确、丰富、系统、深刻。正如哥德尔说的，数理逻辑不外是形式逻辑的精确的和完全的表达。

顺便指出，对数理逻辑的研究，并不意味着抛弃传统逻辑，完全代替传统逻辑的研究。首先，传统逻辑本身不是从纯形式角度来研究思维形式及其规律的，而是从我们的日常语言及其表达方式的角度来阐明思维形式的正确性的。它的主要作用是帮助人们正确表达思想，正确进行论辩。所以，传统逻辑不能而且也不应该离开人们的日常语言和日常的具体思维。传统逻辑的这一作用是数理逻辑不能胜任的，人们在日常生活中决不会用数理逻辑的语言来表达和论辩。其次，传统逻辑讨论的一些和认识论有关的问题，数理逻辑也是处理不了的，因为这些问题不能用数学方法来处理。

总之，数理逻辑和传统逻辑既有联系又有区别，它们是两门不同的逻辑科学。从根本上讲，数理逻辑是传统逻辑的发展。因此逻辑学的学习不能停留在传统逻辑的阶段，只有进一步研究数理逻辑，才能对思维的逻辑结构及其规律有一个比较深刻的认识。

迄今为止，数理逻辑已经形成了自己的研究方法和理论体系。一般说来，数理逻辑分为五大部分：

逻辑演算；证明论；集合论；模型论；递归论（又叫做能行性理论）。

需要向读者说明，这五大部分内容中，逻辑演算（命题演算和谓词演算）是数理逻辑的基础部分。这部分讨论的内容都是纯逻辑的内容，而另外四部分则和数学是密切相关的，它们或者本身便是数学，从中抽出一部分作为数理逻辑的内容（如集合论、递归论），或者是由数学问题直接引出的（如证明论、模型论），

讨论数学时不能不考虑它们，只是因为它们和逻辑有关，才归于逻辑。其实把它们算作数学，作为数学的一个新兴部门是完全可以的。这四部分内容不是哲学、社会科学工作者和高等院校文科学生必须掌握的学问，因此我们就不再一一介绍了。

2.数理逻辑的发展概况

同任何一门科学一样，数理逻辑也经历了一个发生和发展的过程。它最初是作为“运用数学方法的逻辑”产生的，主要是在数学等演绎科学发展的基础上并适应它们的表述和论证的需要而兴起的。随后，数学的发展逐渐正式提出并要求认真解决数学的逻辑和哲学基础问题，于是数理逻辑又进一步发展成主要是“关于数学的逻辑”，并且与数学基础理论相结合，成了一门数学科学。前一种意义下的数理逻辑，又常称为逻辑演算，它通常作为基础部分包括在后一意义下的数理逻辑之中。后者是逻辑与整个数学相结合的产物，它研究数学中的逻辑问题。大家知道，数学的一个特点是它的抽象性和逻辑上的严格性。每一条数学定理都要求有严格的逻辑证明。对数学中特有的逻辑问题的研究，既丰富了逻辑学的内容，也促进了数学的发展。由此可见，数理逻辑和数学的关系是相当密切的，都是从量的侧面来研究，但数理逻辑是从量的侧面来研究思维的形式和规律，它要求通过思维的量的规定性去研究正确的思维形式与规律。

我们知道，数学研究的对象是现实世界的数量关系和空间形式，即数与形。数学的特点是它的高度抽象性、精确性和普遍性（应用的广泛性）。十七世纪时，数学的发展日臻完善。通过用字母表示已知数量和未知数量以及用符号表示运算，代数已经完全符号化，即完全用人工符号语言表达数学的运算和定律；解析

几何的创立，变量和函数概念的出现，使人们可以用代数方法来描述和研究几何图形。微积分学的产生，又使人们可以用几何和代数方法来研究物质运动的形式。以上这些成就，为用代数方法研究思维形式及其规律提供了可能。人们设想，是否可以用代数的方法，把命题的形式结构用符号和公式来表达，把推理中前提与结论之间的关系转换为公式与公式之间的运算。正因为如此，在西方逻辑发展史上，从古希腊的哲学家亚里士多德创立古典逻辑以来，有许多逻辑学家、哲学家都曾设想并探索，把逻辑进一步形式化，把思维形式之间的关系和逻辑推理变成象代数、算术的运算一样，把符号语言运用到逻辑上，以推动逻辑的发展。经过一个不太长的时期，这一设想终于变为现实。具体地讲，数理逻辑的产生和发展大致可分为三个阶段：

第一阶段——从十七世纪六十年代至十九世纪八十年代。

这个阶段数理逻辑研究的特点，是用一些初级的数学方法来处理古典逻辑中演绎推理的形式和规律，获得了初步的成功。逻辑代数就是这个阶段的重大成果。

早在古希腊毕达哥拉斯学派的哲学中，就有了把思维归为计算的思想。他们认为数是万物的本原，事物之间的关系就是数之间的关系。因此，观念（逻各斯）与数，思维与数的运算是一回事。其后，伊壁鸠鲁派的斐珞德谟（公元前一世纪）曾在他的《哲学的语法》中明确谈到逻辑与计算的同一性。欧洲中世纪时，西班牙逻辑学家瑞蒙·卢尔开始用字母即数学符号来表达概念，用＋（加）、－（减）、×（乘）等来表达对概念的运算，试图得到一种逻辑演算。他是第一个提出和设计“逻辑机”的人。十七世纪资本主义处于上升阶段时，随着生产力的发展，自然科学也日益繁荣。在当时的自然科学中，力学占着主导的地位。力学的发展与数学是密不可分的。数学的成就提供了表达运

动的形式和计算方法，同时力学的研究又推动了数学的进一步发展。数学的方法在认识自然、发展技术方面，起到了重要作用。所以，人们的头脑里就产生了把数学的方法推广到其它科学领域的思想。人们希望能够用数学方法来研究思维，希望能够把思维过程转换为数学的计算。此时一些哲学家、科学家感到数学方法的精确、可靠，提出把数学方法应用到其它科学领域中去。如英国的唯物主义哲学家托马斯·霍布士在1651年写的《利维坦》一书中，明确提出思维就是计算，逻辑推理就象数学中的加法和减法一样。还有法国哲学家和数学家勒奈·笛卡尔也认为思维就是计算，逻辑就是记号的演算，并明确提出要创立一种新的科学的认识世界的方法——普遍的数学方法的逻辑，使之可以应用到一切科学之中。不过大家公认数理逻辑的真正先驱是莱布尼茨。莱氏提出一个关于普遍符号语言即“通用语言”的计划。他要建立的这种语言，是要消除现存语言的局限性、不规则性，使得这种语言成为通行全人类的人工语言，并且使用简单明了的符号、合理的语言规则，它将非常便于逻辑的分析和逻辑的综合。同时，他想在这种通用语言的基础上来进行推理，即推理演算。这种演算将处理通用语言，规定符号的演变规则、运算规则，从而使逻辑演算依照明确的规则进行。1666年，莱布尼茨在其《组合的艺术》一书中，叙述了他的普遍逻辑推理系统的思想。

十七世纪末叶，简单计算器的制造有了发展。法国的数学家和物理学家巴斯噶在1642年制造了一架简单的数字计算机。莱布尼茨于1671年提出了改进巴斯噶机器的想法，并且在1694年制成了他所设计的机器。

以上所述的这些成就，促进了人们把一些思维过程化归为计算的思想。但是，在莱氏之后，特别是在十八世纪中，虽然逻辑数学化的方向一再出现，可是沿着这一方向的逻辑研究却进展迟缓，

并不普遍。此时在数理逻辑研究上出现了相当一段较不活跃的停顿时期。在这段时间内，传统逻辑仍处于主导地位，逻辑学家们基本上集中精力于传统逻辑的范围内做修修补补工作。但是，英国逻辑学家汉米尔顿和德·摩根对传统逻辑中的宾项和主项进行了量化和质化的工作。同时，德·摩根还提出一些关系逻辑的思想。

十九世纪中期，英国数学家和逻辑学家乔治·布尔相当成功地建立了一个逻辑演算系统，因此被视为数理逻辑的第二个创始人。他所建立的逻辑代数是数理逻辑的早期形式。布尔当初的目的就是要把代数方法应用于逻辑学研究。他在1847年发表了一篇论文，叫做《逻辑的数学分析，论演绎推理演算》，在1854年又出版一本书，叫做《思维法则的探讨，作为逻辑与概率的数学理论的基础》（简称《思维法则》）。在这些著作中，布尔完全按照数学的方式来发展逻辑，他正式提出改革传统逻辑的主张及具体方案。他用"类"来处理思维形式，把概念当成"类"，判断则表示"类"与"类"之间的关系。他所创立的逻辑是关于"类"的逻辑，亦称"类的代数"。他还创立了"命题代数"。这两种代数是今天数理逻辑的基本部分，即有名的"布尔代数"。

布尔的逻辑代数，从它的研究对象说，它既能表现整个类逻辑，又能表现整个命题逻辑。因此，它能够在外延方面包括传统逻辑的全部内容。也正如布尔宣称：凡传统逻辑所能处理的问题，用他所发展的代数都能处理。

据上所述，这个时期的数理逻辑主要是用符号和简单的代数方法来处理传统逻辑的演绎理论。

第二个阶段——从十九世纪八十年代到二十世纪三十年代。

这个阶段数理逻辑研究的特点，是把初等数论和集合论等数学方法运用到逻辑上，使数理逻辑的发展取得了较大的突破。在这阶段的前半时期，即1879年到1910年间已经形成了逻辑演算系

统。首先由德国数学家和逻辑学家弗雷格于1879年在其《表意符号》一书中最先引进和使用了量词和约束变元，并完备地发展了命题演算和谓词演算，建立了第一个比较严格的逻辑演算系统。后来意大利数学家和逻辑学家皮亚诺于1894年出版《数学公式》一书，正式利用了前人的命题演算与谓词演算成果来表述数学，推导数学。英国哲学家和逻辑学家罗素继续皮亚诺的研究，把皮亚诺关于命题演算和谓词演算这两部分最后搞完备了。并且，根据这一成果，他和怀特海合著了《数学原理》一书。可以说到当时为止，这本书是数理逻辑成果的总结，是传统逻辑向现代数理逻辑发展的起点。传统逻辑中关于演绎推理的内容已经完全可以用两个演算的方法处理。譬如，数理逻辑里在引用了表达"如果……那么……"的符号"→"以后，传统逻辑里的假言推理肯定前件式的形式就可以表达为：

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{A \qquad} \\ \therefore B \end{array}$$

又如传统逻辑里的三段论式：

$$\begin{array}{c} \text{所有}M\text{是}P \\ \underline{\text{所有}S\text{是}M} \\ \text{所以，所有}S\text{是}P \end{array}$$

数理逻辑在引进量词符号"∀"之后，上述三段论就可以表达为：

$$\begin{array}{c} \forall_x(M_x \to P_x) \\ \underline{\forall_x(S_x \to M_x)} \\ \therefore \forall_x(S_x \to P_x) \end{array}$$

在这一阶段中，数学也有了进一步的发展，例如出现了集合论。集合论是数学的基础理论。但在集合论的研究中却出现了自相矛盾的情况，即关于最大序数的悖论和最大基数的悖论。1902年罗素也发现了集合论中的悖论——罗素悖论。这一问题导致了数

学上的危机，引起对整个数学基础的探讨。许多数学家和逻辑学家开始研究和讨论悖论问题，研究数学基础里的无穷问题、证明论和公理方法等问题。由于创造和建立了新的方法——形式化的公理方法、求模型方法和逻辑算术化，数理逻辑的研究出现了重要的突破。悖论的研究也大大促进了数理逻辑的发展。对于公理方法的性质、形式语言系统的性质、能行可判定或能行可计算的问题等，都得到了明确的认识。这是演绎科学方法研究的一个飞跃。

在取得一些重要新成果的同时，产生了数理逻辑的三大派。实际上，也就是关于数学基础上的三大派。因为这三派的形成及其分歧，亦是由于数学基础问题而来的。所谓数理逻辑的三大派是：第一，逻辑主义派以罗素为代表；第二，直觉主义派以布鲁维为代表；第三，形式主义派以希尔伯特为代表。①

第三个阶段——从二十世纪三十年代末到今天。

三十年代所创建的这些方法在四十年代以后得到迅速发展，它取得的成就也是多方面的。它已经形成了自己的理论体系，就是上文提到的数理逻辑五大部分。

在此需要指出的是，数理逻辑的发展是和现代电子计算机的发明和发展相联系的。数理逻辑是计算机科学的基础理论之一。数理逻辑关于形式语言的研究，为建立计算机使用的程序语言提供了基础。数理逻辑关于形式系统的语法、语义的研究都可应用在计算机科学上，解决计算机软件的语言设计问题。同时，要化简一个有一定功能的计算机线路的问题，可以归结为化简一个命题逻辑公式的问题，这便是数理逻辑的最简单部分在计算机的硬件设计方面的应用。另一方面，数理逻辑在计算机科学中的这些重要应用，反过来又给逻辑研究提出了新的课题。比如与快速化

① 关于数理逻辑三大派的详细讨论，可参阅《数理逻辑初步》，莫绍揆著，上海人民出版社1980年版。