線性代數

著者

KENNETH HOFFMAN

RAY KUNZE

譯者

薛　昭　雄

東華書局印行

中華民國六十四年二月初版
中華民國六十七年十一月三版

大專用書 線性代數

定價 新臺幣 壹佰參拾元整
(外埠酌加運費滙費)

編著者 薛昭雄
發行人 卓鑫淼
出版及印刷 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號

行政院新聞局登記證。局版臺業字第零柒貳伍號
(63007)

譯 者 序

這幾年來國內數學系及有關科系都開設"線性代數"一門課程。除中文書籍外，一般人均採用K.Hoffman與R.Kunze所著之Linear Algebra。這本書內容相當豐富而且取材新穎，是一本不可多得的好書，尤其後半部更佳。

按照教育部頒大學課程新制，普通數學內含線性數學或線性代數四學分，則本書前五章足用矣。後四章則可用於專題討論或適當補充教材。

但很多人常苦於語言的障礙。據譯者之經驗，很多人常在英文語句上咬文嚼字，這是比較遺憾的事。因而，譯者於課暇之時，試譯此書。

本譯本能夠出版，得感謝東華書局的合作。又承許正倫、胡明鴻二君的校對，一併致謝。

譯者學識淺陋，謬誤疏漏，在所難免，尚希海內專家，不吝指正。

薛昭雄

中華民國六十四年元月序於政大

目　錄

第一章　線性方程式 (Linear Equations)

1-1　體(Fields)

我們假定讀者已熟悉實數和複數的基本運算及性質. 在此書中, 我們將要用到的代數性質大部份均很容易可從下面所列的加法和乘法性質推演出來. 我們特以F表示實數集合或複數集合.

1. 加法交換性, 即對於任意F中二元素x和y, 我們有

$$x+y=y+x$$

2. 加法結合性, 即對於任意F中三元素x, y, z, 我們有

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

3. 對F中每一元素x而言, F中存在有惟一元素0（零）, 使得$x+0=x$.

4. 對F中每一元素x而言, 在F中有惟一元素（$-x$）與之對應, 使得 $x+(-x)=0$.

5. 乘法交換性, 即對於F中任意二元素x和y, 我們有

$$xy=yx$$

6. 乘法結合性, 即對於F中任意三元素x, y, z, 我們有

$$x(yz)=(xy)z$$

7. 對F中每一元素x而言, F中存在有一不為零的惟一元素

1，使得 $x1 = x$.

8．對F中每一不為零的元素x而言，在F中有惟一元素 x^{-1}（或 $1/x$）與之對應，使得 $xx^{-1} = 1$.

9．乘法對加法之分配性，亦即對於F中任意三元素x，y，和z，我們有

$$x(y+z) = xy + xz.$$

設有以事物x，y，z，···為元素的集合F和F中之二種運算．第一種運算叫做加法，它聯結F之任二元素x，y成為F之一元素$(x+y)$；第二種運算叫做乘法，它聯結F之任二元素x，y成為F中之一元素 xy；同時這二種運算滿足上述（1）－（9）條件．集合F和此二運算合稱為**一體**．粗淺地說，一體，在意義上言，是具有像數的平常加法，減法，乘法和除法的一些運算，同時這些運算遵守上述九個代數性質．對平常的加法和乘法二運算，複數集合C是一體，實數集合R亦然．

在此書的大部份裏，我們用“數”來代表任一體中的元素．為了更廣泛些，我們將用“純量”來代替“數”．如果讀者常假定純量體是複數體的一**子體**（subfield），他將不會覺得太茫然．體C的一子體是C的部分集合F，在平常的複數加法和乘法的運算下，F本身是一體．意即0和1是在F裏，若x和y是F之元素，則$(x+y)$，$-x$，xy，和$x^{-1}(x\neq 0)$亦是F之元素．例如，實數體R是複數體C的一子體；因為，若我們把實數表成複數形式$(a+ib)$，（$b=0$），那麼複數體中的0和1就是實數，同時若x和y是實數，則$(x+y)$，$-x$，xy 和 x^{-1} $(x\neq 0)$亦在R裏．在下面，我們將舉出其他的例子．我們現在所討論子體的要點是：若我們用體C的某一已知子體F之純量來計算，則在純量上的加法，減法，乘法或除法諸運算的演算，結果的純量均在此子體F裏．

例 1．**正整數**（positive integers）集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 不是體 C 的一子體．因 0 不是正整數；且不存在正整數 n 使得 $-n$ 爲一正整數；除 1 以外不存在正整數 n 使得 $1/n$ 爲正整數．

例 2．**整數**（integers）集合 $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 不是體 C 的一子體．因除了 $n=1$ 或 $n=-1$ 外，對任一整數 n 言，$1/n$ 不是一整數．在平常的加法和乘法運算下，整數集合幾乎滿足所有的條件（1）—（9），（（8）除外）．

例 3．**有理數**（rational numbers）集合 $\{p/g \mid p, g$ 是整數，$g \neq 0\}$ 是複數體的一子體．除法在整數集合內是不可能，而在有理數集合內是可能的．有興趣的讀者應能證明體 C 的任一子體必含有每一有理數．

例 4．形式爲 $x + y\sqrt{2}$（x, y 皆爲有理數）的所有數所成之集合是體 C 之一子體．我們留給讀者去證明．

在此書的例子和習題中所提到的"體"，除非有特別聲明，我們將視爲複數的一子體．我們不想詳論此點；無論如何，我們將簡單說明爲什麽我們要作此規定．若 F 是一體，連加有限次的單位元素 1 而可能得到 0（看 1.2 節習題 5）：

$$1 + 1 + \cdots + 1 = 0.$$

此種情形在複數體（或其子體）是不可能發生的．若發生在體 F 中，則最小的正整數 n 使得 n 個 1 的和是 0，我們就稱 n 爲體 F 的**特徵數**（characteristic）．若沒有此正整數存在，則稱 F 是特徵數爲 0 的體．通常，當我們假定 F 是體 C 的一子體時，我們所要保證的是，F 是特徵數爲 0 的體；但剛開始唸線性代數時，最好不要太耽心體的特徵數．

1-2 線性方程式組(Systems of Linear Equations)

設F是一體，考慮此問題：找出n個純量（F中之元素）x_1, $\cdots$, x_n滿足下列的條件

$$
\begin{array}{rcccccccl}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & y_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & y_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & y_m
\end{array} \tag{1-1}
$$

其中y_1, $\cdots$, y_m 和A_{ij},$(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$是$F$中之已知元素，我們稱（1-1）爲含$n$個未知數，$m$個方程式的線性方程式組．若$F$之$n$個元素$x_1$, $\cdots$, x_n滿足（1-1）的每一方程式，則$(x_1, \cdots, x_n)$稱爲此方程式組的一**解**（solution）．若$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$，我們說此方程式組是**齊次的**（homogeneous）．

找出線性方程式組的解，最基本的技巧或許是消去法，我們將以齊次的方程式組爲例來說明消去法．如：

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \qquad (1)\\
x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

若以-2乘方程式（2）各項再加上方程式（1）得：

$$-7x_2 - 7x_3 = 0 \quad (\text{或 } x_2 = -x_3).$$

其次，以3乘方程式（1）各項再加上方程式（2）得：

$$7x_1 + 7x_3 = 0 \quad (\text{或 } x_1 = -x_3)$$

所以我們得一結論：若(x_1, x_2, x_3)是此方程式組之一解，則$x_1 = x_2 = -x_3$．反之，我們易驗證任何此三元必是此方程式組之一解，其解集合是包含所有的三元$(-a, -a, a)$.

利用消去未知數的方法，我們能找到這個方程式組的解．換言

之，以純量乘以某方程式再加上另一方程式，則某一未知數 x_j 將不出現在所得的新方程式中．我們希望把此過程稍微地形式化，那麼我們就可瞭解爲什麼經此過程就能找到此方程式之解．同時，我們可用一種有組織的方法來實行所必要的計算，以解一方程式組．

對於一般的方程式組（1-1），我們選出 m 個純量 $c_1, \cdots c_m$，以 c_j 乘第 j 個方程式，然後再相加，我們可得方程式

$$(c_1A_{11}+\cdots+c_mA_{m1})x_1+\cdots+(c_1A_{1n}+\cdots+c_mA_{mn})x_n$$
$$=c_1y_1+\cdots+c_my_m.$$

我們稱此方程式爲（1-1）所有方程式的**線性組合**（linear combination）．顯然，方程式組（1-1）的任一解將也是新方程式的解，這是消去法的基本觀念．若另有一線性方程式組

$$\begin{array}{ccccccc} B_{11}x_1 & + & \cdots & + & B_{1n}x_n & = & z_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ B_{k1}x_1 & + & \cdots & + & B_{kn}x_n & = & z_k \end{array} \tag{1-2}$$

（1-2）的每一方程式是（1-1）的所有方程式的線性組合，則（1-1）之每一解也是此新方程組之一解．當然，可能發生此種情形：（1-2）的某些解不是（1-1）之解．若（1-1）的每一方程式是新方程式組的線性組合，則此種情形不會發生是顯然的．若每一方程式組之每一方程式是另一方程組之所有方程式的線性組合，我們就說二方程式組**等價**（equivalent）．這樣，我們就能正式地敍述以上的觀察如下．

定理 1：等價的線性方程式組有相同的解．

若消去法在找像（1-1）方程組之解爲有效時，則用所給方程式的線性組合方法，我們必能明白如何產生較簡單的一等價方程式組來解之．在下一節，我們將討論求較簡單的等價方程式組的方法．

習題

1. 證明如例 4 所述的複數集合是 C 之一子體

2. 設 F 是複數體，下面二組線性方程式組是否等價？若是，試將每一方程式組的每一方程式表成另一方程式組的線性組合

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3. 仿習題 2，察驗下面的方程式組

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{5}{2}x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4. 仿習題 2，察驗下面的方程式組

$$\begin{aligned} 2x_1 + (-1+i)x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ 3x_2 - 2ix_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \left(1+\frac{i}{2}\right)x_1 + 8x_2 - ix_3 - x_4 &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5. 設 $F = \{0, 1\}$. 用下二表來定義加法和乘法

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

驗證 F 和其二種運算形成一體.

6. 若含二未知數的二齊次線性方程式組之解相同，則此二方程式組等價. 試證明之.

7. 試證複數體的任一子體包含每一有理數.

8. 試證特徵數為 0 的每一體包含每一有理數.

1-3 矩陣和基本列運算(Matrices and Elementary Row Operations)

我們注意到，在寫線性方程式的線性組合時，不必再把“未知

數 x_1，　$\cdots$，　x_n"寫出來，因計算時僅用到係數 A_{ij} 和純量 y_i．現在，我們把（1-1）簡寫成

$$AX = Y$$

這裏，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ and } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

我們稱 A 爲此方程式組的**係數矩陣**（matrix of coefficients）．嚴格地說，上面所排長方形列陣不是矩陣，但爲一矩陣之代表．**佈於體 F 之 m × n 矩陣**（matrix over the field）是從"整序對 (i, j) 所成之集合（$1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$）"映至"體 F"之函數 A．矩陣之**元**（entries）是純量 $A(i, j) = A_{ij}$，通常，描述矩陣最好之法（如上所示）是把它的每一元排在一 m 列 n 行的長方形列陣裏。因此，上面的 X 是（或把它視爲定義）$n \times 1$ 矩陣，Y 是 $m \times 1$ 矩陣．目前，$AX = Y$ 僅是（1-1）之簡記的表示法．稍後，當我們定義矩陣的乘法時，其意是 Y 爲 A 和 X 之積．

現在，我們希望考慮矩陣 A 之列運算，我們只考慮佈於 F 的 $m \times n$ 矩陣 A 之三種**基本列運算**：

1．以一不爲零之純量乘 A 之任一列．
2．將第 s 列與任一純量 c 之積加於第 r 列（$r \neq s$）．
3．交換 A 之任意二列．

一基本列運算是一特殊型式的函數 e，它是把 $m \times n$ 矩陣 A 映至 $m \times n$ 矩陣 $e(A)$．我們可用下面三種型式來正確地描述 e：

1. $e(A)_{ij} = A_{ij}$ 若 $i \neq r$, $e(A)_{rj} = cA_{rj}$.
2. $e(A)_{ij} = A_{ij}$ 若 $i \neq r$, $e(A)_{rj} = A_{rj} + cA_{sj}$.
3. $e(A)_{ij} = A_{ij}$ 若 $i \neq r$且 $i \neq s$, $e(A)_{rj} = A_{sj}$, $e(A)_{sj} = A_{rj}$.

定義 $e(A)$ 時, A有多少行是不太重要, 但A的列數是重要的. 舉例言, 我們會擔心如何決定:"交換一 5 × 5 矩陣之第 5 列和第 6 列". 爲了避免像這樣的糾紛, 我們同意一基本列運算 e 是定義在佈於 F 的所有 $m \times n$ 矩陣而成的集合上, (m爲固定, n 爲任意正整數). 換言之, 一個特別的 e 是定義在佈於F之所有m列矩陣的集合上.

我們限制這三種簡單型式的列運算的一個簡單理由是: 我們用像這樣的運算 e 操作在A上, 同時也用類似的運算操作在 $e(A)$上, 我們就能得A.

定理 2： 對於每一基本列運算 e ，存在有一個與 e 同型式的基本列運算e_1 ，使得$e_1(e(A))=e(e_1(A))=A$ ，對$\forall A$ · 換言之，一基本列運算的反運算（反函數）存在，且是與 e 同型式的基本列運算 ·

證明: (1) 設 e 是以一不爲零之純量 c 乘一矩陣之第 r 列的一運算. 令 e_1是以 c^{-1}乘第 r 列的一運算. (2) 設 e 是將第 s 列與 c 之積加於第 r 列的一運算, ($r \neq s$). 令 e_1是將第 s 列與 ($-c$) 之積加於第 r 列的一運算. (3) 設 e 是交換第 r 列和第 s 列. 令$e_1 = e$. 因此在這三種情形下, 我們淸楚地得到, 對於每一A而言, 恒有 $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$

定義： 設 A和 B是佈於 F的 m× n 矩陣 · 若從 A經由有限次的基本列運算而能得到 B ， 我們稱 B與 A是**列等價** (row-equivalent) ·

利用定理 2，讀者易證明每一矩陣是列等價於其自身；若 B 是列等價於 A，則 A 是列等價於 B；若 B 是列等價於 A 且 C 是列等價於 B，則 C 是列等價於 A．換言之，列等價是一種等價關係．

定理 3： 若 A 和 B 是列等價的 $m\times n$ 矩陣，則齊次線性方程式組 $AX=0$ 和 $BX=0$ 恰有同解．

證明：設從 A 得到 B 要經有限多次的基本列運算：

$$A=A_0\to A_1\to\cdots\to A_k=B.$$

證明本定理，因此可證明方程式組 $A_jX=0$ 和 $A_{j+1}X=0$ 有同解，亦即方程式組之解集合不受基本列運算的影響．

故我們可假設 B 是從 A 經一單一的基本列運算而得．無論那一型式的運算 (1)，(2) 或 (3)，在方程式組 $BX=0$ 之每一方程式將是方程式組 $AX=0$ 之諸方程式的一線性組合．因為每一基本列運算的反運算是一基本列運算，方程式組 $AX=0$ 之每一方程式也是方程式組 $BX=0$ 之諸方程式的一線性組合．因此這二方程式組是等價的，且由定理 1 知它們有同解．▌

例 5．設 F 是有理數體，且

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\1&4&0&-1\\2&6&-1&5\end{bmatrix}.$$

我們將在 A 上做有限次的基本列運算，括號內的數字表示演算之列運算的型式．

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\1&4&0&-1\\2&6&-1&5\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix}0&-9&3&4\\1&4&0&-1\\2&6&-1&5\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -9 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -1 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{bmatrix}0 & -9 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 0 & -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -9 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -2 & 13\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2}\\ 1 & 0 & -2 & 13\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3}\\ 1 & 0 & -2 & 13\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3}\\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3}\\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

因此A與$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3}\\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$是列等價，這個結果告訴我們下面二方程式組的解是一樣的.

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0\\ x_1 + 4x_2 \qquad\quad - x_4 &= 0\\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}x_3 - \tfrac{11}{3}x_4 &= 0\\ x_1 \qquad + \tfrac{17}{3}x_4 &= 0\\ x_2 \qquad - \tfrac{5}{3}x_4 &= 0\end{aligned}$$

在第二個方程式組裏，若我們令$x_4 = c$（c為任一有理數），顯然的，我們可得一解$(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c)$，同時此方程式組之每一解也是這個形式.

例 6．設F是複數體且