SCHAUM'S outlines

全美经典学习指导系列

微分方程

（第二版）

〔美〕R. 布朗森 著

刘嘉焜　罗瑞艳　徐凌 译

- 涵盖所有课程的基本内容
- 是任一教科书的补充
- 教授解题技巧
- 563道有完全解答的习题
- 几百道有答案的补充习题

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

内 容 简 介

本书利用提纲的方式介绍工程、自然科学、经济和商业中常用的微分方程的理论与方法，主要包括待定系数法、参数变异法、Laplace 变换、矩阵方法以及在计算机上计算的数值方法.

本书每一章分为三部分：第一部分概述理论的重点和解题的过程. 第二部分通过习题解答介绍理论的各种各样的解法和应用. 第三部分是有答案的习题，用以检验读者对理论理解的程度.

本书叙述简明易懂、强调应用，是一本极好的教材和参考书.

读者对象为高等院校理工科师生和广大科技工作者.

Schaum's Outlines

Richard Bronson: Differential Equations, Second Edition

ISBN: 0-07-008019-4

图字：01-2001-2120

图书在版编目(CIP)数据

微分方程(第二版)/(美)R. 布朗森著；刘嘉焜，罗瑞艳，徐凌译. —北京：科学出版社，2002.1

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009770-X

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①布… ②刘… ③罗… ④徐… Ⅲ. 微分方程 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 063364 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版 开本：A4(890×1240)

2002年1月第一次印刷 印张：17

印数：1—4 000 字数：488 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

现代数学同矩阵一起，构成了分析和解决工程、自然科学、经济甚至商业中复杂问题的重要方法，而微分方程是其中的一个关键.廉价而高速的计算机的出现产生了解决微分方程的新技术，这使得人们能基于微分方程组建立模型，解决复杂问题.

与第一版相同的是，本书概括论述了微分方程的古典理论和近代刚发展的在实践中较受欢迎的方法.其中包括利用矩阵方法和拉普拉斯变换的系统方法和计算机上实施的数值方法，后者包含在特征值问题的讨论中.书中利用许多习题解答将介绍的各种方法分类，通过各种实际应用来阐述如何利用微分方程建立模型并解决问题.

本版和第一版也有很大的差别.最明显的是习题解答的数目增多，达 500 个之多；补充习题的数目增长不止一倍，有 800 多个.Adams-Bashforth-Moulton 方法添加在数值方法一节，重点放在 Runge-Kutta 方法上.许多更古老、现已过时的数值方法被删除，增添了银行利率问题、浮力问题和画图法，包括方向场.

新版在材料组织上更紧扣主题，前后更连贯一致.在以前，书中强调的是初值问题和无边界条件的微分方程.现在，所有解线性微分方程的方法编排在连续的章节中.这样，在特征方程后紧跟的就是待定系数法、参数变异法、Laplace 变换和矩阵法.然后是非线性微分方程问题和对线性、非线性都适用的数值方法.最后两章是对边值问题的介绍.

书中每章都分为三个部分.第一部分概述了理论的重点和解题过程，引起对容易被忽视的潜在问题和细微处的注意.第二部分通过习题解答，对第一部分的内容进行分类，有时亦进行补充.最后一部分是习题(附有答案)，读者可用来检测对前文的理解程度.

目　录

第一章　基本概念

微分方程

微分方程是包含未知函数及其导数的方程.

例 1.1　下列是含未知函数 y 的微分方程.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{1.1}$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1.5}$$

若微分方程的未知函数仅含一个自变量,则称之为常微分方程;若未知函数依赖于两个或两个以上未知变量,则称为偏微分方程.本书中仅讨论常微分方程.

例 1.2　方程(1.1)至(1.4)是常微分方程,因为未知函数 y 仅依赖于变量 x.方程(1.5)是偏微分方程,因为 y 依赖于变量 t 和 x.

微分方程的阶是方程中最高阶导数的阶.

例 1.3　方程(1.1)是一阶微分方程;(1.2),(1.4)和(1.5)是二阶微分方程.[注意在(1.4)中方程的最高阶导数是二.]方程(1.3)是三阶微分方程.

记号

一般地,表达式 $y', y'', y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}$ 分别表示 y 的对某自变量的一阶,二阶,三阶,四阶,…,n 阶导数.这样,若自变量是 x,y'' 表示 d^2y/dx^2;若自变量是 p,y'' 表示 d^2y/dp^2.注意,在 $y^{(n)}$ 中用括号来将它与 n 次幂 y^n 区分开.如果自变量是时间,通常记为 t,撇号经常用点来代替.这样,$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ 分别表示 $dy/dt, d^2y/dt^2, d^3y/dt^3$.

解

关于未知函数 y 和自变量 x 的微分方程在区间 φ 的解是指对 φ 中所有的 x 都满足方程的函数 $y(x)$.

例 1.4　$y(x) = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x$(其中,$c_1$ 和 c_2 是任意常数)是 $y'' + 4y = 0$ 的解吗?

对 y 微分得

$$y' = 2c_1\cos 2x - 2c_2\sin 2x, \qquad y'' = -4c_1\sin 2x - 4c_2\cos 2x$$

于是

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1\sin 2x - 4c_2\cos 2x) + 4(c_1\sin 2x + c_2\cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1)\sin 2x + (-4c_2 + 4c_2)\cos 2x = 0 \end{aligned}$$

这样,$y = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x$ 对所有的 x,满足微分方程,故是区间$(-\infty, +\infty)$上的解.

例 1.5　判断 $y = x^2 - 1$ 是否是$(y')^4 + y^2 = -1$ 的解.

注意微分方程的左端对所有的实函数 $y(x)$和任意的 x 都是非负的,因为它是二次幂和

四次幂的和;而方程右端是负数,因为没有函数 $y(x)$ 满足此方程,所以该微分方程无解.

我们看到了一些微分方程有无穷多个解(例 1.4),而另一些方程没有解(例 1.5) 微分方程也可能有唯一的解. 考虑 $(y')^4+y^2=0$, 它在一定程度上等同于例 1.5 给定的方程, 有唯一的解 $y\equiv 0$.

微分方程的任一解是特解,通解是所有解组成的集合.

例 1.6 例 1.4 中的微分方程的一般解可以表示为(见第 7 和 8 章) $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$ 这就是说,微分方程的每一特解都具有一般解的形式. 部分特解是:(a) $y=5\sin 2x-3\cos 2x$ (取 $c_1=5, c_2=-3$),(b) $y=\sin 2x$ (取 $c_1=1, c_2=0$),(c) $y\equiv 0$ (取 $c_1=c_2=0$).

微分方程的通解并不能总由一个式子表示. 例如微分方程 $y'+y^2=0$, 它有两个特解 $y=1/x$ 和 $y\equiv 0$.

初值问题和边值问题

微分方程和未知函数及其导数关于自变量在同一点的辅助条件共同构成了初值问题(或称初始问题). 辅助条件就是初始条件. 如果给出了自变量在一个以上的点处的辅助条件, 则问题成为边值问题, 辅助条件为边值条件.

例 1.7 问题 $y''+2y'=e^x; y(\pi)=1, y'(\pi)=2$ 是初值问题, 因为两个辅助条件都在 $x=\pi$ 处给出. 问题 $y''+2y'=e^x; y(0)=1, y(1)=1$ 是边值问题, 因为两个辅助条件在不同的点 $x=0$ 和 $x=1$ 给出.

初值或边值问题的解是同时满足微分方程和所有给定的辅助条件的函数 $y(x)$.

习题解答

1.1 判断下列各微分方程的阶, 未知函数和自变量:

(a) $y'''-5xy'=e^x+1$　　(b) $t\ddot{y}+t^2\dot{y}-(\sin t)\sqrt{y}=t^2-t+1$

(c) $s^2\dfrac{d^2t}{ds^2}+st\dfrac{dt}{ds}=s$　　(d) $5\left(\dfrac{d^4b}{dp^4}\right)^5+7\left(\dfrac{db}{dp}\right)^{10}+b^7-b^5=p$

解 ☞ (a)三阶, 因为最高阶导数是三. 未知函数是 y; 自变量是 x.

(b)二阶, 因为最高阶导数是二. 未知函数是 y; 自变量是 t.

(c)二阶, 因为最高阶导数是二. 未知函数是 t; 自变量是 s.

(d)四阶, 因为最高阶导数是四. 增加导数的幂不改变导数的阶. 未知函数是 b; 自变量是 p.

1.2 判断下列各微分方程的阶, 未知函数和自变量:

(a) $y\dfrac{d^2x}{dy^2}=y^2+1$　　(b) $y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2=x^2+1$

(c) $2\dddot{x}+3\dot{x}-5x=0$　　(d) $17y^{(4)}-t^6y^{(2)}-4.2y^5=3\cos t$

解 ☞ (a)二阶. 未知函数是 x; 自变量是 y.

(b)一阶. 因为最高阶导数是一, 即使它是二次幂. 未知函数是 x; 自变量是 y.

(c)三阶. 未知函数是 x; 自变量是 t.

(d)四阶. 未知函数是 y; 自变量是 t. 注意带括号的四阶导数 $y^{(4)}$ 和没有括号的五次幂 y^5 之间的不同.

1.3 判断 $y(x)=2e^{-x}+xe^{-x}$ 是否是 $y''+2y'+y=0$ 的解.

解 ☞ 对 $y(x)$ 微分, 得

$$y'(x)=-2e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=-e^{-x}-xe^{-x}$$
$$y''(x)=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x}$$

将这些值代入微分方程, 我们得到

$$y''+2y'+y=xe^{-x}+2(-e^{-x}-xe^{-x})+(2e^{-x}+xe^{-x})=0$$

于是, $y(x)$ 是解.

1.4 $y(x)\equiv 1$ 是 $y''+2y'+y=x$ 的解吗?

解 ☞ 由 $y(x)\equiv 1$ 得 $y'(x)\equiv 0$, $y''(x)\equiv 0$. 代入微分方程,得

$$y''+2y'+y=0+2(0)+1=1\neq x$$

于是, $y(x)\equiv 1$ 不是解.

1.5 证明 $y=\ln x$ 是 $xy''+y'=0$ 在 $\varphi=(0,\infty)$上的解,但不是在 $\varphi=(-\infty,+\infty)$上的解.

解 ☞ 在$(0,\infty)$上,有 $y'=1/x$ 和 $y''=-1/x^2$. 将这些值代入微分方程,得

$$xy''+y'=x\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=0$$

于是, $y=\ln x$ 是$(0,\infty)$上的解.

注意 $y=\ln x$ 不能是$(-\infty,\infty)$上的解,因为对数对负数和零没有意义.

1.6 证明 $y=1/(x^2-1)$是 $y'+2xy^2=0$ 在 $\varphi=(-1,1)$上的解,但不是在包含 φ 的更大区间上的解.

解 ☞ 在$(-1,1)$上, $y=1/(x^2-1)$及其导数 $y'=-2x/(x^2-1)^2$ 有定义. 将它们代入微分方程,得

$$y'+2xy^2=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}+2x\left[\frac{1}{x^2-1}\right]^2=0$$

于是, $y=1/(x^2-1)$是 $\varphi=(-1,1)$上的解.

但是,注意 $1/(x^2-1)$在 $x=\pm 1$ 没有定义,因此它不能是任何包含这两个点中任一点的区间上的解.

1.7 判断(a) $y_1=\sin 2x$, (b) $y_2(x)=x$, 和(c) $y_3(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 是否是初值问题 $y''+4y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的解.

解 ☞ (a) $y_1(x)$是微分方程的解,满足第一个初始条件 $y(0)=0$,但是它不满足第二个初始条件 $y'_1(x)=2\cos 2x$; $y'_1(0)=2\cos 0=2\neq 1$;因此它不是初始问题的解. (b) $y_2(x)$满足两个初始条件,但不满足微分方程;因此, $y(x)$不是解. (c) $y_3(x)$满足微分方程和两个初始条件;因此,它是该初值问题的解.

1.8 求初值问题 $y'+y=0$; $y(3)=2$ 的解,已知微分方程的通解是(见第 7 章) $y(x)=c_1e^{-x}$,其中 c_1 是常数.

解 ☞ 因为 $y(x)$对 c_1 取每个值都是微分方程的解,我们找满足初始条件的 c_1. 注意 $y(3)=c_1e^{-3}$. 要满足初始条件 $y(3)=2$,只需找 c_1 使得 $c_1e^{-3}=2$,即取 $c_1=2e^3$ 用它代替 $y(x)$中的 c_1,得 $y(x)=2e^3e^{-x}=2e^{3-x}$是该初始问题的解.

1.9 求初值问题 $y''+4y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的解,已知微分方程的通解(见第 8 章)是 $y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$.

解 ☞ 因为 $y(x)$对 c_1 和 c_2 取所有值都是微分方程的解(见例 1.4),我们找满足初始条件的 c_1 和 c_2. 注意 $y(0)=c_1\sin 0+c_2\cos 0=c_2$. 要满足第一个初始条件 $y(0)=0$,我们取 $c_2=0$. 又 $y'(x)=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x$,因此, $y'(0)=2c_1\cos 0-2c_2\sin 0=2c_1$. 要满足第二个初始条件 $y'(0)=1$,我们取 $2c_1=1$,或$c_1=\frac{1}{2}$. 将它们代入 $y(x)$,得 $y(x)=1/2\sin 2x$. 这就是初值问题的解.

1.10 求边值问题 $y''+4y=0$; $y(\pi/8)=0$, $y(\pi/6)=1$ 的解,若已知微分方程的通解是 $y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$.

解 ☞ 注意到

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right)=c_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

要满足初始条件 $y(\pi/8)=0$,我们要求

$$c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=0 \tag{1}$$

又

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=c_1\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

要满足第二个初始条件 $y(\pi/6)=1$，我们要求

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}c_1+\frac{1}{2}c_2=1 \tag{2}$$

联立(1)和(2)，解得

$$c_1=-c_2=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

将它们代入 $y(x)$，得

$$y(x)=\frac{2}{\sqrt{3}-1}(\sin 2x-\cos 2x)$$

就是边值问题的解.

1.11 求边值问题 $y''+4y=0$；$y(0)=1$，$y(\pi/2)=2$ 的解，若已知微分方程的通解是 $y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$.

解 ☞ $y(0)=c_1\sin 0+c_2\cos 0=c_2$，我们必须取 $c_2=1$ 使得 $y(0)=1$ 成立. 因为 $y(\pi/2)=c_1\sin\pi+c_2\cos\pi=-c_2$，我们必须取 $c_2=-2$ 使得第二个条件 $y(\pi/2)=2$ 成立. 于是，要同时满足两个边界条件，就要求 c_2 同时等于 1 和 −2，这是不可能的. 因此，该问题无解.

1.12 求 c_1 和 c_2，使得 $y(x)=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+1$ 满足条件 $y(\pi/8)=0$ 和 $y'(\pi/8)=\sqrt{2}$.

解 ☞ 注意到

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right)=c_1\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+c_2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1=c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+1$$

要满足条件 $y(\pi/8)=0$，需 $c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+1=0$，或等价地.

$$c_1+c_2=-\sqrt{2} \tag{1}$$

因 $y'(x)=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x$，

$$\begin{aligned}y'\left(\frac{\pi}{8}\right)&=2c_1\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2c_2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\&=2c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)-2c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}c_1-\sqrt{2}c_2\end{aligned}$$

要满足条件 $y'(\pi/8)=\sqrt{2}$，需 $\sqrt{2}c_1-\sqrt{2}c_2=\sqrt{2}$，或等价地，

$$c_1-c_2=1 \tag{2}$$

联立(1)和(2)，解得

$$c_1=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1),\quad c_2=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1).$$

1.13 求 c_1 和 c_2，使得 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+2\sin x$ 满足条件 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=1$.

解 ☞ 因 $\sin 0=0$，$y(0)=c_1+c_2$. 要满足条件 $y(0)=0$，我们要求

$$c_1+c_2=0 \tag{1}$$

由

$$y'(x)=2c_1e^{2x}+c_2e^{x}+2\cos x$$

得 $y'(0)=2c_1+c_2+2$. 要满足条件 $y'(0)=1$，要求 $2c_1+c_2+2=1$，或

$$2c_1+c_2=-1 \tag{2}$$

联立(1)和(2)，解得 $c_1=-1$，$c_2=1$.

补充习题

求 1.14 至 1.23 各题中微分方程的(a)阶数，(b)未知函数，(c)独立变量.

1.14 $(y'')^2-3yy'+xy=0$

1.15 $x^4y^{(4)}+xy'''=e^x$

1.16 $t^2\ddot{s}-t\dot{s}=1-\sin t$

1.17 $y^{(4)}+xy'''+x^2y''-xy'+\sin y=0$

1.18 $\dfrac{d^nx}{dy^n}=y^2+1$

1.19 $\left(\dfrac{d^2r}{dy^2}\right)^2+\dfrac{d^2r}{dy^2}+y\dfrac{dr}{dy}=0$

1.20 $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^{3/2}+y=x$

1.21 $\dfrac{d^7b}{dp^7}=3p$

1.22 $\left(\frac{db}{dp}\right)^7 = 3p$ **1.23** $y^{(6)} + 2y^4y^{(3)} + 5y^8 = e^x$

1.24 下列哪些函数是微分方程 $y' - 5y = 0$ 的解？

(a) $y = 5$, (b) $y = 5x$, (c) $y = x^5$, (d) $y = e^{5x}$, (e) $y = 2e^{5x}$, (f) $y = 5e^{2x}$

1.25 下列哪些函数是微分方程 $y' - 3y = 6$ 的解？

(a) $y = -2$, (b) $y = 0$, (c) $y = e^{3x} - 2$, (d) $y = e^{2x} - 3$, (e) $y = 4e^{3x} - 2$

1.26 下列哪些函数是微分方程 $\dot{y} - 2ty = t$ 的解？

(a) $y = 2$, (b) $y = -\frac{1}{2}$, (c) $y = e^{t^2}$, (d) $y = e^{t^2} - \frac{1}{2}$, (e) $y = -7e^{t^2} - \frac{1}{2}$

1.27 下列哪些函数是微分方程 $dy/dt = y/t$ 的解？

(a) $y = 0$, (b) $y = 2$, (c) $y = 2t$, (d) $y = -3t$, (e) $y = t^2$

1.28 下列哪些函数是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

的解？

(a) $y = x$, (b) $y = x^8 - x^4$, (c) $y = \sqrt{x^8 - x^4}$, (d) $y = (x^8 - x^4)^{1/4}$

1.29 下列哪些函数是微分方程 $y'' - y = 0$ 的解？

(a) $y = e^x$, (b) $y = \sin x$, (c) $y = 4e^{-x}$, (d) $y = 0$, (e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

1.30 下列哪些函数是微分方程 $y'' - xy' + y = 0$ 的解？

(a) $y = x^2$, (b) $y = x$, (c) $y = 1 - x^2$, (d) $y = 2x^2 - 2$, (e) $y = 0$

1.31 下列哪些函数是微分方程 $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^t$ 的解？

(a) $x = e^t$, (b) $x = e^{2t}$, (c) $x = e^{2t} + e^t$, (d) $x = te^{2t} + e^t$, (e) $x = e^{2t} + te^t$

在 1.32 至 1.35 题中，求 c 使得 $x(t) = ce^{2t}$ 满足给定的初始条件.

1.32 $x(0) = 0$ **1.33** $x(0) = 1$ **1.34** $x(1) = 1$ **1.35** $x(2) = -3$

在 1.36 至 1.39 题中，求 c 使得 $y(x) = c(1 - x^2)$ 满足给定的初始条件.

1.36 $y(0) = 1$ **1.37** $y(1) = 0$ **1.38** $y(2) = 1$ **1.39** $y(1) = 2$

在 1.40 至 1.49 题中，求 c_1 和 c_2 使得 $y(x) = c_1\sin x + c_2\cos x$ 满足所给的条件. 判断各条件是初始条件还是边界条件.

1.40 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ **1.41** $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

1.42 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ **1.43** $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

1.44 $y'(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **1.45** $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 1$

1.46 $y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$ **1.47** $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

1.48 $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ **1.49** $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

在 1.50 至 1.54 题中，求 c_1 和 c_2 使得所给的函数满足后面的初始条件.

1.50 $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 4\sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

1.51 $y(x) = c_1x + c_2 + x^2 - 1$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

1.52 $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 3e^{3x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

1.53 $y(x) = c_1\sin x + c_2\cos x + 1$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$

1.54 $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^2e^x$; $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$

第二章　一阶微分方程的分类

标准形式和微分形式

关于未知函数 $y(x)$ 的一阶微分方程的标准形式是

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

其中,导数 y' 仅在(2.1)式的左端出现.在很多情况下(但不是所有情况),一阶微分方程可以通过用代数方法解出 y',将 $f(x,y)$ 放在所得方程的右端而写成标准形式.

(2.1)式的右端总可写成另外两个函数 $M(x,y)$ 和 $-N(x,y)$ 的商.于是(2.1)式变为 $dy/dx = M(x,y)/[-N(x,y)]$,它等价于*微分形式*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.2}$$

线性方程

考虑标准形式(2.1)下的微分方程.若 $f(x,y)$ 可写成 $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$(即 x 的函数乘以 y,加上 x 的另一个函数),则称此微分方程是*线性的*.一阶线性微分方程总可表示为

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.3}$$

线性方程的解在第五章讨论.

伯努利方程

*伯努利方程*是有如下形式的微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{2.4}$$

其中,n 是实数.当 $n=1$ 或 $n=0$ 时,伯努利方程退化为线性方程.伯努利方程在第五章讨论.

齐次方程

称标准形式(2.1)下的微分方程是*齐次的*,如果

$$f(tx,ty) = f(x,y) \tag{2.5}$$

对所有实数 t 成立.齐次方程的解在第三章中讨论.

注意:在微分方程的一般体系中,“齐次”有完全不同的意义(见第七章).只有在关于一阶微分方程的上下文中,“齐次”才有如上的意义.

可分离的方程

考虑形如(2.2)的微分方程.若 $M(x,y) = A(x)$(关于 x 的函数),$N(x,y) = B(y)$(关于 y 的函数),则称微分方程是*可分离的*,或*分离变量的*.可分离的方程在第三章中求解.

恰当方程

形如(2.2)的微分方程是恰当的,若

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2.6}$$

恰当方程在第四章中求解(那里给出了恰当的更精确的定义).

习 题 解 答

2.1　将微分方程 $xy' - y^2 = 0$ 写为标准形式.

解 ☞ 求解 y'，得 $y'=y^2/x$，它有(2.1)的形式，$f(x,y)=y^2/x$.

2.2 将微分方程 $e^x y'+e^{2x}y=\sin x$ 写为标准形式.

解 ☞ 求解 y'，得

$$e^x y' = -e^{2x}y+\sin x$$

或

$$y' = -e^x y + e^{-x}\sin x$$

它有(2.1)的形式，$f(x,y)=-e^x y+e^{-x}\sin x$.

2.3 将微分方程$(y'+y)^5=\sin(y'/x)$写为标准形式.

解 ☞ 由于此方程不能代数地解出 y，因此不能写成标准形式.

2.4 将微分方程 $y(yy'-1)=x$ 写为微分形式.

解 ☞ 求解 y'，得

$$y^2y'-y=x$$

$$y^2y'=x+y \tag{1}$$

或

$$y'=\frac{x+y}{y^2}$$

这就是标准形式，$f(x,y)=(x+y)/y^2$ 与(1)相对应的微分形式有无穷多个.这里给出其中的四个：

(a)取 $M(x,y)=x+y$，$N(x,y)=-y^2$.则

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{x+y}{-(-y^2)}=\frac{x+y}{y^2}$$

(1)等价于下面的微分形式

$$(x+y)dx+(-y^2)dy=0$$

(b)取 $M(x,y)=-1$，$N(x,y)=\dfrac{y^2}{x+y}$.则

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{-1}{-y^2/(x+y)}=\frac{x+y}{y^2}$$

(1)等价于下面的微分形式

$$(-1)dx+\left(\frac{y^2}{x+y}\right)dy=0$$

(c)取 $M(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$，$N(x,y)=\dfrac{-y^2}{2}$.则

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{(x+y)/2}{-(-y^2/2)}=\frac{x+y}{y^2}$$

(1)等价于下面的微分形式

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)dx+\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy=0$$

(d)取 $M(x,y)=\dfrac{-x-y}{x^2}$，$N(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}$.则

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{(-x-y)/x^2}{-y^2/x^2}=\frac{x+y}{y^2}$$

(1)等价于下面的微分形式

$$\left(\frac{-x-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)dy=0$$

2.5 将微分方程 $dy/dx=y/x$ 写为微分形式.

解 ☞ 此方程有无穷多个微分形式，其中的一个是

$$dy=\frac{y}{x}dx$$

它可写成(2.2)的形式

$$\frac{y}{x}dx+(-1)dy=0 \tag{1}$$

将(1)乘以 x，得

$$ydx + (-x)dy = 0 \tag{2}$$

是第二个微分形式.将(1)乘以 $1/y$,得

$$\frac{1}{x}dx + \frac{-1}{y}dy = 0 \tag{3}$$

是第三个微分形式.将(1)乘以 x 和 y 的其他函数,还可得到它的其它微分形式.

2.6 将微分方程 $(xy+3)dx+(2x-y^2+1)dy=0$ 写为标准形式.

解 ☞ 此方程是微分形式.将它改写为

$$(2x - y^2 + 1)dy = -(xy + 3)dx$$

它有标准形式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(xy+3)}{2x - y^2 + 1}$$

或

$$y' = \frac{xy+3}{y^2-2x-1}$$

2.7 判断下列微分方程是否是线性的:

(a) $y'=(\sin x)y+e^x$ (b) $y'=x\sin y+e^x$ (c) $y'=5$ (d) $y'=y^2+x$

(e) $y'+xy^5=0$ (f) $xy'+y=\sqrt{y}$ (g) $y'+xy=e^xy$ (h) $y'+\frac{x}{y}=0$

解 ☞ (a)方程是线性的;这里 $p(x)=-\sin x, q(x)=e^x$. (b)方程不是线性的,因为 $\sin y$ 项.

(c)方程是线性的;这里 $p(x)=0, q(x)=5$.

(d)方程不是线性的,因为 y^2 项.

(e)方程不是线性的,因为 y^5 项.

(f)方程不是线性的,因为 $y^{1/2}$项.

(g)方程是线性的;将之改写为 $y'+(x-e^x)y=0, p(x)=x-e^x, q(x)=0$.

(h)方程不是线性的,因为 $1/y$ 项.

2.8 判断 2.7 题中的哪些微分方程是伯努利方程.

解 ☞ 所有的线性方程都是 $n=0$ 的伯努利方程;除此之外,非线性方程中的(e)和(f)也是伯努利方程.将(e)改写为 $y'=-xy^5$,它有(2.4)的形式,$p(x)=0, q(x)=-x, n=5$.将(f)改写为

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^{1/2}$$

它有(2.4)的形式,$p(x)=q(x)=1/x, n=1/2$.

2.9 判断下列微分方程是否是齐次的:

(a) $y'=\dfrac{y+x}{x}$ (b) $y'=\dfrac{y^2}{x}$ (c) $y'=\dfrac{2xye^{x/y}}{x^2+y^2\sin\dfrac{x}{y}}$ (d) $y'=\dfrac{x^2+y}{x^3}$

解 ☞ (a)此方程是齐次的,因为

$$f(tx,ty) = \frac{ty - tx}{tx} = \frac{t(y+x)}{tx} = \frac{y+x}{x} = f(x,y)$$

(b)此方程不是齐次的,因为

$$f(tx,ty) = \frac{(ty)^2}{tx} = \frac{t^2y^2}{tx} = t\frac{y^2}{x} \neq f(x,y)$$

(c)此方程是齐次的,因为

$$f(tx,ty) = \frac{2(tx)(ty)e^{tx/ty}}{(tx)^2 + (ty)^2\sin\frac{tx}{ty}} = \frac{t^2 2xye^{x/y}}{t^2x^2 + t^2y^2\sin\frac{x}{y}}$$

$$= \frac{2xye^{x/y}}{x^2 + y^2\sin\frac{x}{y}} = f(x,y)$$

(d)此方程不是齐次的,因为

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 + ty}{(tx)^3} = \frac{t^2x^2 + ty}{t^3x^3} = \frac{tx^2 + y}{t^2x^3} \neq f(x,y)$$

2.10 判断下列微分方程是否是可分离的:

(a)$\sin x dx + y^2dy = 0$ (b)$xy^2dx - x^2y^2dy = 0$ (c)$(1 + xy)dx + ydy = 0$

解 ☞ (a)此微分方程是可分离的;这里,$M(x,y) = A(x) = \sin x, N(x,y) = B(y) = y^2$.

(b)此方程目前的形式不是可分离的,因为 $M(x,y) = xy^2$ 不只是 x 的函数.但是如果我们将方程的两端都除以 x^2y^2,可以得到$(1/x)dx + (-1)dy = 0$,它是可分离的.这里,$A(x) = 1/x, B(y) = -1$.

(c)此方程不是可分离的.因为 $M(x,y) = 1 + xy$,它不只是 x 的函数.

2.11 判断下列函数是否是恰当的.

(a)$3x^2ydx + (y + x^3)dy = 0$ (b)$xydx + y^2dy = 0$

解 ☞ (a)方程是恰当的;这里 $M(x,y) = 3x^2y, N(x,y) = y + x^3, \partial M/\partial y = \partial N/\partial x = 3x^2$.

(b)方程不是恰当的.这里 $M(x,y) = xy, N(x,y) = y^2$;故$\partial M/\partial y = x, \partial N/\partial x = 0, \partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$.

2.12 判断微分方程 $y' = y/x$ 是否是恰当的.

解 ☞ 恰当只对微分形式有定义,对标准形式则没有.给定的微分方程有许多微分形式.其中的一个由 2.5 题的(1)式给出,为

$$\frac{y}{x}dx + (-1)dy = 0$$

这里 $M(x,y) = y/x, N(x,y) = -1$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \neq 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

方程不是恰当的.同一个微分方程的另一个微分形式由 2.5 题的(3)式给为

$$\frac{1}{x}dx + \frac{-1}{y}dy = 0$$

这里 $M(x,y) = 1/x, N(x,y) = -1/y$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

方程是恰当的.因此,同一个微分方程有很多微分形式,其中的一些会是恰当的.

2.13 证明可分离方程总是恰当的.

解 ☞ 对一个可分离方程,$M(x,y) = A(x), N(x,y) = B(y)$.于是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial A(y)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial B(y)}{\partial x} = 0$$

因$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$,微分方程是恰当的.

2.14 一个一阶微分方程的定理指出,若 $f(x,y)$和$\partial f(x,y)/\partial y$ 在矩形域 $\mathcal{R}$: $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$上连续,则存在一个 x_0 的邻域,使得初值问题 $y' = f(x,y); y(x_0) = x_0$ 有唯一解.

初值问题 $y' = 2\sqrt{|y|}; y(0) = 0$ 有两个解 $y = x|x|$和 $y \equiv 0$.这与定理矛盾吗?

解 ☞ 不矛盾.这里 $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$.因此,$\partial f/\partial y$ 在原点不存在.

补充习题

将 2.15 至 2.25 题中给的微分方程写成标准形式.

2.15 $xy' + y^2 = 0$ **2.16** $e^xy' - x = y'$

2.17 $(y')^3 + y^2 + y = \sin x$ **2.18** $xy' + \cos(y' + y) = 1$

2.19 $e^{(y'+y)} = x$ **2.20** $(y')^2 - 5y' + 6 = (x + y)(y' - 2)$

2.21 $(x - y)dx + y^2dy = 0$ **2.22** $\frac{x + y}{x - y}dx - dy = 0$

2.23 $dx + \frac{x + y}{x - y}dy = 0$ **2.24** $(e^{2x} - y)dx + e^xdy = 0$

2.25 $dy + dx = 0$

在 2.26 至 2.35 题中,微分方程以标准形式和微分形式分别给出.判断标准形式的方程是否是齐次的和/或线

性的，若不是线性的，它们是否是伯努利的；判断微分形式的方程是否是可分离的和/或恰当的

2.26 $y' = xy$;　　$xydx - dy = 0$

2.27 $y' = xy$;　　$xdx - \frac{1}{y}dy = 0$

2.28 $y' = xy + 1$;　　$(xy + 1)dx - dy = 0$

2.29 $y' = \frac{x^2}{y^2}$;　　$\frac{x^2}{y^2}dx - dy = 0$

2.30 $y' = \frac{x^2}{y^2}$;　　$-x^2dx + y^2dy = 0$

2.31 $y' = -\frac{2y}{x}$;　　$2xydx + x^2dy = 0$

2.32 $y' = \frac{xy^2}{x^2y + y^3}$;　　$xy^2dx - (x^2y + y^3)dy = 0$

2.33 $y' = \frac{-xy^2}{x^2y + y^2}$;　　$xy^2dx + (x^2y + y^2)dy = 0$

2.34 $y' = x^3y + xy^3$;　　$(x^2 + y^2)dx - \frac{1}{xy}dy = 0$

2.35 $y' = 2xy + x$;　　$(2xye^{-x^2} + xe^{-x^2})dx - e^{-x2}dy = 0$

第三章　一阶可分离微分方程

通解

一阶可分离的微分方程(见第二章)

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \tag{3.1}$$

的解是

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c \tag{3.2}$$

其中 c 是常数.

在很多实际问题中,(3.2)式中的积分是不可进行的.在这种情况下,可以用数值方法(见第二十七章)来求近似解.即使(3.2)式中的积分可以进行,y 也可能不能用 x 代数地表示出来,这时得到的是隐式解.

初值问题的解

初值问题

$$A(x)dx + B(y)dy = 0; \qquad y(x_0) = y_0 \tag{3.3}$$

的解可以通过先由(3.2)式解微分方程,再应用初始条件确定 c 来得到.

或者,(3.3)的解可由

$$\int_{x_0}^{x} A(x)dx + \int_{y_0}^{y} B(y)dy = 0 \tag{3.4}$$

得到.但是,由(3.4)不能唯一地确定(3.3)的解;这就是说,(3.4)会有很多解,其中只有一个满足初始条件.

齐次方程的简化

齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.5}$$

有性质 $f(tx, ty) = f(x, y)$(见第二章).它可以通过替换

$$y = xv \tag{3.6}$$

变为可分离方程,相应的导数为

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \tag{3.7}$$

得到的以 v 和 x 为变量的方程可作为可分离的微分方程来求解;通过回代得到方程(3.5)的解.

或者,(3.5)的解可以通过将微分方程写为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \tag{3.8}$$

的形式,再将

$$x = yu \tag{3.9}$$

及其导数

$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy} \tag{3.10}$$

代入方程(3.8)得到.化简后,所得的微分方程是变量(此时是 u 和 y)分离的.

一般地,用哪个方法并不重要(见题 3.12 和 3.13).但有时,(3.6)或(3.9)中的某个变换比另一个好.此时,较好的变换通常可由微分方程本身一眼看出(见题 3.17).

习题解答

3.1 解 $xdx - y^2dy = 0$.

解 ☞ 对此微分方程，$A(x)=x$，$B(y)=-y^2$. 代入(3.2)式，得

$$\int xdx + \int(-y^2)dy = c$$

积分后，得 $x^2/2 - y^3/3 = c$. 解出 y，得到解为

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + k\right)^{1/3}, \qquad k = -3c$$

3.2 解 $y' = y^2x^3$.

解 ☞ 我们先将方程改写为微分方程的微分形式(见第二章)$x^3dx - (1/y^2)dy = 0$. 于是 $A(x) = x^3$，$B(y) = -1/y^2$. 将它们代入方程(3.2)，得

$$\int x^3dx + \int(-1/y^2)dy = c$$

或，积分得 $x^4/4 + 1/y = c$. 解出 y，得解为

$$y = \frac{-4}{x^4 + k}, \qquad k = -4c$$

3.3 解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+2}{y}$.

解 ☞ 这个方程可改写为微分形式

$$(x^2+2)dx - ydy = 0$$

它是可分离的，$A(x) = x^2+2$，　$B(y) = -y$. 其解为

$$\int(x^2+2)dx - \int ydy = c$$

或

$$\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}y^2 = c$$

求解 y，得到隐式解为

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 4x + k$$

而 $k = -2c$. 解 y，得它的两个解是

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k}, \qquad y = -\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 4x + k}$$

3.4 解 $y' = 5y$.

解 ☞ 首先将此方程改写为微分形式 $5dx - (1/y)dy = 0$，它是可分离的. 其解为

$$\int 5dx + \int(-1/y)dy = c$$

或，积分，得 $5x - \ln|y| = c$.

要求 y，我们先将解改写为 $\ln|y| = 5x - c$，两边取指数，得 $e^{\ln|y|} = e^{5x-c}$. 注意到 $e^{\ln|y|} = |y|$，我们有 $|y| = e^{5x}e^{-c}$ 或 $y = \pm e^{-c}e^{5x}$. 显式解可表示为 $y = ke^{5x}$，$k = \pm e^{-c}$.

注意，微分方程中$(-1/y)$的出现，要求在求解过程中 $y \neq 0$. 这个限制等价于 $k \neq 0$，因为 $y = ke^{5x}$. 然而，观察可见，$y \equiv 0$ 是原微分方程的解. 因此，$y = ke^{5x}$ 对所有的 k，是解.

原微分方程也是线性的. 题 5.9 给出了它的另一解法.

3.5 解 $y' = \dfrac{x+1}{y^4+1}$.

解 ☞ 此方程写为微分形式是$(x+1)dx + (-y^4-1)dy = 0$，它是可分离的. 其解为

$$\int(x+1)dx + \int(-y^4-1)dy = c$$

或，积分，得