

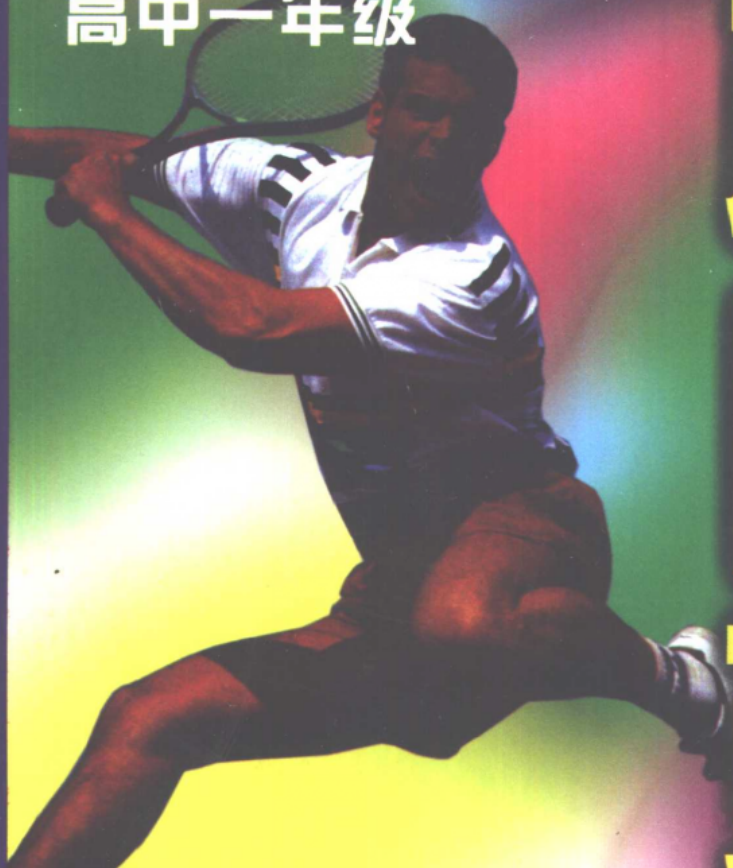
吉教社
奥林匹克丛书

SHUXUE OLYMPIC

COMPETITION

数学

高中一年级



奥林匹克

奥林匹克系列丛书

数学奥林匹克

奥林匹克历来以奋发努力、拼搏向上的精神为人们所崇尚。本套丛书正是以弘扬奥林匹克精神为宗旨，严格按照最新《教学大纲》及《考试说明》，集数位多年从事教学工作的老师们的心血，针对中小学生的不同特点所编辑的。

丛书着重教导学习方法，使学生们能够较容易地掌握各学科教科书的关键知识并在此基础上进行扩展训练，从而迅速、有效地提高学生的阅读、写作能力（文科类）及分析、解题能力（理科类）。

致天下之治者在人才，成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体，它在如林的教辅材料中，博采众家之长，自成完整知识体系，



是望子成龙、望女成凤的家长们的理想选择，是莘莘学子的好帮手。“诗也，书也，文也，无非心

其得也，知之，好之，乐之，当从学而习之。”

本套丛书分为小学版和中学版，是专门为中小學生出版的以快速提高学习水平及应试能力为目的的丛书，是一套不可多得优秀教辅图书。

成功， 来自奥林匹克！

ISBN 7-5383-4175-7



9 787538 341751 >

G·3796 定价：16.00元

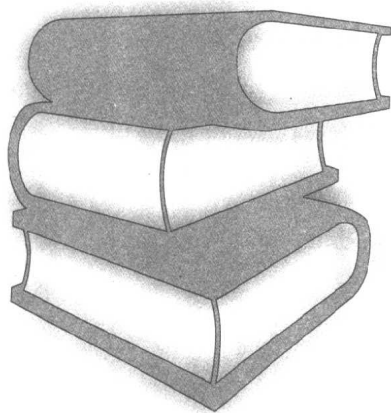


OLYMPIC COMPETITION

吉教社
奥林匹克丛书

数 学

高中一年级



奥 林 匹 克

(吉)新登字 02 号

数学奥林匹克 高中一年级 赵权忠 郭宗喜 主编

责任编辑:王世斌 阎爱群 封面设计:王 康

出版:吉林教育出版社 880×1230 毫米 32 开本 15.125 印张 427 000 字

2002 年 1 月第 2 版 2002 年 1 月第 2 次印刷

发行:吉林教育出版社 印数:13 001—23 000 册 定价:15.00 元

印刷:长春市第五印刷厂 ISBN 7-5383-4175-7/G·3796

丛书主编	阚秀敏	张劲松	张恩伟
主 编	赵权忠	郭宗喜	
副主编	王 琦	张嘉宾	
	孙艳华	吴宇杰	
编 委	赵权忠	郭忠喜	孙静波
	王丽锋	杨吉春	赵丽光
	杜凤华	李宏新	李雅旻
	李 婧	李卫东	邢雪锋
	陈佳辉	姜福强	杨惠敏
	刘艳玲	李叶青	王晓菊
	吴宇杰	孙艳华	张嘉宾
	贺 萍	杨亚庚	黄 静
	王孝男		

前 言

为了扩大广大学生的知识面,增加知识储备,激发学生学习的兴趣,有效地培养科学的思维方法和综合解题能力,我们编写组的全体成员经过一年多的艰苦工作,终于使这套丛书在“春绣人间千里绿肥红壮艳,歌传广宇万家书灿墨浓香”的氛围中和广大的热心读者见面了。

本丛书旨在开启学生的心扉,震撼学生的心灵,挖掘深层信息,架设由已知、经可知、达未知的桥梁,运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”,使学生真正体味“纸上得来终觉浅,心中悟出方知深”的真谛。

致天下之治者在人才,成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体。本丛书在如林的教辅材料中,博采众家之长,自成完整的知识体系。是望子成龙、望女成凤的家长的理想选择,是莘莘学子的好帮手。“诗也,书也,文也,无非心其得也,知之,好之,牙之,当从学而习之”。

寸有所长,尺有所短,由于我们水平有限,书中不足之处在所难免,敬请各位不吝赐教。

目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
1.1 集合	(1)
1.2 子集 全集 补集	(8)
1.3 交集 并集	(15)
1.4 含绝对值的不等式解法	(25)
1.5 一元二次不等式解法	(33)
1.6 逻辑联结词	(40)
1.7 四种命题	(47)
1.8 充分条件与必要条件	(55)
第二章 函 数	(82)
2.1 映射	(82)
2.2 函数	(88)
2.3 函数的单调性和奇偶性	(105)
2.4 反函数	(119)
2.5 指数	(128)
2.6 指数函数	(136)
2.7 对数	(144)
2.8 对数函数	(153)
2.9 函数的应用举例	(167)
第三章 数 列	(205)
3.1 数列	(205)
3.2 等差数列	(213)
3.3 等差数列的前 n 项和	(223)
3.4 等比数列	(232)

3.5	等比数列的前 n 项和	(240)
第四章	三角函数	(269)
4.1	角的概念的推广	(269)
4.2	弧度制	(275)
4.3	任意角的三角函数	(281)
4.4	同角三角函数的基本关系式	(290)
4.5	正弦、余弦的诱导公式	(299)
4.6	两角和与差的正弦、余弦、正切	(308)
4.7	二倍角的正弦、余弦、正切	(318)
4.8	正弦函数、余弦函数的图象和性质	(331)
4.9	函数 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	(340)
4.10	正切函数的图象和性质	(351)
4.11	已知三角函数值求角	(358)
第五章	平面向量	(394)
5.1	向量	(394)
5.2	向量的加减法	(399)
5.3	实数与向量的积	(404)
5.4	平面向量的坐标运算	(410)
5.5	线段的定比分点	(417)
5.6	平面向量的数量积及运算律	(426)
5.7	平面向量数量积的坐标表示	(434)
5.8	平 移	(440)
5.9	正弦定理、余弦定理	(448)
5.10	实习作业	(456)

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合

知识要点

1. 集合有关概念

(1) **集合**: 某些指定的对象集在一起就成为一个集合. 集合是数学中不加定义的基本概念.

(2) **元素**: 集合中的每个对象叫做这个集合的元素. 集合常用大写的拉丁字母表示, 集合的元素常用小写的拉丁字母表示.

(3) **特性**: 构成集合的元素必须符合确定性和互异性. 不确定的对象不能组成一个集合, 相同的对象在同一个集合中只能算作一个元素, 同时集合中的元素是无顺序的.

(4) 含有有限个元素的集合叫做有限集. 含有无限个元素的集合叫做无限集. 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$. N 、 N^* 、 Z 、 Q 、 R 是一些常用的数集.

2. 集合的表示方法

(1) **列举法**: 将集合中的元素一一列举出来的方法. 例如, 由方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有的解组成的集合, 可以表示为 $\{-1, 1\}$.

(2) **描述法**: 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法. 例如, 不等式 $x - 3 > 2$ 的解集可以表示为 $\{x \in R | x - 3 > 2\}$.

(3) **图示法**: 为了形象地表示集合, 我们常常画一条封闭的曲线, 用它的内部来表示一个集合. 例如, 图 1—1 表示集合 $\{1, 2, 3\}$.

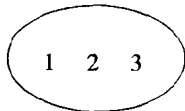


图 1—1

典型例题解析

例1 考查下列每组对象能否构成一个集合？

- (1) 比较小的数；
- (2) 所有无理数；
- (3) 比2大的数；
- (4) 直角坐标平面内横坐标与纵坐标相等的点；
- (5) 高一(2)班所有的男生.

分析

⇒

判断一组对象能否构成一个集合，关键在于是否有一个明确的标准来判断这些对象具有某种性质.

解

⇒

(1)“比较小”无明确的标准，对于某个数是否“比较小”无法客观地判断，因此“比较小”的数不能构成集合；类似地，(3)也不能构成集合.
(2)任给一个实数，可以明确地判断它是不是无理数，故“所有无理数”可以构成集合. 类似地，(4)、(5)也能构成集合.

例2 用列举法表示下列集合：

- (1) 不超过10的质数；
- (2) 两边长分别为3、5的三角形中，第三条边可取的整数；
- (3) $A = \left\{ x \mid x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数} \right\}$;
- (4) $B = \left\{ x \mid \frac{6}{3-x} \in Z, x \in N \right\}$.

分析

⇒

列举法就是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合. 列举时，元素要不重不漏，不计次序，元素与元素间用“,”隔开.

解 ⇒

(1)在自然数中,除1以外只能被1和本身整除的数叫质数,1既不是质数也不是合数,但2是质数.所以答案是 $\{2, 3, 5, 7\}$.

(2)设第三边长为 x ,则 $5-3 < x < 5+3$,即 $2 < x < 8$.故所求集合为 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

(3)关键是根据绝对值的意义化简 $x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$.当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$;当 $a < 0, b < 0$ 时, $x = -2$;当 a, b 异号时, $x = 0$,故 $A = \{-2, 0, 2\}$.

(4) x 所取的自然数,要使 $3-x$ 能整除6,故 $3-x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, x = 2, 4, 1, 5, 0, 6, -3, 9$,其中 $x = -3, x = 0$ 舍去,所以 $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$.

例3 用描述法表示下列集合:

- (1)被5除余1的正整数集合;
- (2)坐标平面内,不在一、三象限的点的集合;
- (3) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}\right\}$;
- (4)所有被4整除的自然数;
- (5)坐标平面内第一象限内点的集合.

分析 ⇒

用数学式子描述集合时,常用模式为 $\{x | x \in p\}$,要抓住竖线前面的代表元素 x 及集合中元素所具有公共属性 p .

解 ⇒

(1)集合为 $\{x | x = 5k + 1, k \in N\}$

(2)集合为 $\{(x, y) | xy \leq 0, x \in R, y \in R\}$

(3)集合为 $\left\{x \mid x = \frac{n}{n+2}, x \in N, n < 6\right\}$

(4) $\{x | x = 4n, n \in Z\}$.也可写成{被4整除的自然数}.

(5) $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$.

【点评】 $\Rightarrow$ 要重视同一数学对象的不同语言的表达方法，注意文字语言、符号语言、图形语言的互化，从而提高分析问题、解决问题的能力。

例4 设 $M = \{a + b\sqrt{2} \mid |a^2 - 2b^2| = 1, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ ，已知 $x \in M, y \in M$ ，求证：(1) $xy \in M$ ；(2) $\frac{1}{x} \in M$ 。

【分析】 $\Rightarrow$ 根据集合两方面的含义，已知 $x, y \in M$ ，则 x, y 都可写成 $a + b\sqrt{2}$ 的形式且 $|a^2 - 2b^2| = 1, a, b \in \mathbb{Z}$ 。而要证明 $xy \in M, \frac{1}{x} \in M$ ，则需证明它们符合 M 的属性。

【证明】 $\Rightarrow$

(1) $\because x \in M, y \in M$
 $\therefore$ 可设 $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}$
 且 $|a^2 - 2b^2| = 1, |c^2 - 2d^2| = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
 $\therefore xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$
 $= (ac + 2bd) + \sqrt{2}(bc + ad)$
 且 $|(ac + 2bd)^2 - 2(bc + ad)^2| = |(a^2 - 2b^2) \cdot (c^2 - 2d^2)| = 1 \therefore xy \in M$ 。

(2) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$
 $= \begin{cases} a - b\sqrt{2} & (\text{当 } a^2 - 2b^2 = 1) \\ -a + b\sqrt{2} & (\text{当 } a^2 - 2b^2 = -1) \end{cases}$
 显然有 $a - b\sqrt{2} \in M, -a + b\sqrt{2} \in M$
 $\therefore \frac{1}{x} \in M$ 。

知识训练

一、选择题

1. 在“(1)很大的有理数；(2)方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数根；(3)直角坐标平面的第一象限的一些点；(4)所有等腰直角三角形”中，能够组成集合的是().

- A. (2) B. (2)(3)(4) C. (2)(4) D. (1)(2)(3)(4)

2. 设 x, y 均是非零实数，则 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{xy}{|xy|}$ 的值组成的集合元素的个数是().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知 $M = \{x | x \leq 2\sqrt{3}, x \in R\}$, $a = \sqrt{11}$, $b = \sqrt{12}$, 则().

- A. $a \in M$ 且 $b \notin M$ B. $a \notin M$ 且 $b \in M$
C. $a \in M$ 且 $b \in M$ D. $a \notin M$ 且 $b \notin M$

4. 下列四个关系式中，正确的是().

- A. $\emptyset \in \{a\}$ B. $a \notin \{a\}$
C. $\{a\} \in \{a, b\}$ D. $a \in \{a, b\}$

5. 下列各题中的 M 与 P 表示同一个集合的是().

- A. $M = \{(1, -3)\}$, $P = \{(-3, 1)\}$
B. $M = \emptyset$, $P = \{0\}$
C. $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\}$, $P = \{(x, y) | y = x^2 + 1, x \in R\}$
D. $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\}$, $P = \{t | t = (y - 1)^2 + 1, y \in R\}$

二、填空题

6. 用列举法写出下列集合：

- (1) 不大于 6 的自然数集合 _____.
(2) $\{(x, y) | x + y = 5, x \in N, y \in N\}$ _____.
(3) $\{y | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in Z\}$ _____.

7. 用描述法表示下列集合：

- (1) 与数 a 相差 5 的数集 _____.

(2) 直角坐标系中, 两条坐标轴上所有点的坐标的集合_____.

(3) 被 3 除余 1 的所有整数的集合_____.

三、解答题

8. 设 $M = \left\{ x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z} \right\}$, 用列举法写出集合 M .

9. 已知集合 $M = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 只含有一个元素, 求实数 a .

能力提高

一、选择题

1. 不能构成一集合的是().

- A. 正三角形的全体
- B. 大于 2 的所有整数
- C. 《高一代数》中的所有难题
- D. 所有的无理数

2. 下列集合中, 表示同一集合的是().

- A. $M = \{(3, 2)\}$, $N = \{(2, 3)\}$
- B. $M = \{3, 2\}$, $N = \{2, 3\}$
- C. $M = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$, $N = \{y \mid x + y = 1\}$
- D. $M = \{1, 2\}$, $N = \{(1, 2)\}$

3. 下列关系中正确的是().

- A. $0 \in \{(0, 1)\}$
- B. $1 \in \{(0, 1)\}$
- C. $0 \in \{0, 1\}$
- D. $1 \notin \{0, 1\}$

4. 已知集合 $S = \{a, b, c\}$ 中的三个元素可构成 $\triangle ABC$ 的三边长, 那么 $\triangle ABC$ 一定不是().

- A. 锐角三角形
- B. 直角三角形
- C. 钝角三角形
- D. 等腰三角形

5. 下列命题中正确的是().

- A. $\{0\}$ 是空集
- B. $\left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{6}{x} \in \mathbb{N} \right\}$ 是有限集

C. $\{x \in Q \mid x^2 + x + 2 = 0\}$ 是空集

D. 集合 N 中最小的数是 1

二、填空题

6. 集合 $\{x \mid x = \frac{n-1}{n+2}, n \in N, n \leq 5\}$ 用列举法表示为_____.

7. 集合 $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$ 用描述法表示为_____.

8. $A = \{x \mid x \in R \text{ 且 } x \notin Q\}$, 下列实数: $-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi, -0.101010\dots, 3^{-\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{-2}, \cos 60^\circ$ 中, 集合 A 中的元素是_____.

9. 平面直角坐标系中, x 轴、 y 轴上的点集可表示为_____.

三、解答题

10. 已知由实数组成的集合 A 满足: 若 $x \in A$, 则 $\frac{1}{1-x} \in A$

(1) 设 A 中含 3 个元素, 且 $2 \in A$, 求 A

(2) A 能否是单元素集? 证明你的结论

11. 已知集合 $M = \{m \in R \mid m = a + b\sqrt{2}, a \in Q, b \in Q\}$ 判断下列元素 m 是否属于集合 M ;

① $m = 0.3 + \sqrt{2}\pi$

② $m = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

③ $m = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

竞赛精选

1. 集合 $S = \{x \mid m \leq x \leq n \text{ 且 } m \leq n\}$, 设集合 S 满足条件: “ $x \in S$, 则 $x^2 \in S$ ”.

(1) 证明 $0 \leq n \leq 1$;

(2) 证明 $m = 1$ 或 $m \leq 0$;

(3) 当 $m = 1$ 时, S 是什么样集合;

(4) 当 $m \neq 1$ 时对于数 $n (0 \leq n \leq 1)$, 试求 m 值的范围.

2. 有集合 $S = \{a + b\sqrt{5}, a, b \in Z\}$.

(1) 求证: $\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \in S$, 且 $\frac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \in S$;

(2) 求证: $1-\sqrt{5}$ 在集合 S 中没有倒数;

(3) 求证: $a+b\sqrt{5}$ 在集合 S 中有倒数的条件是 $a^2-5b^2=\pm 1$.

1.2 子集 全集 补集

知识要点

1. 子集及有关概念

(1) 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们就说集合 A 包含于集合 B , 或集合 B 包含集合 A , 记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A \text{)}.$$

这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

(2) 如果集合 A 的任何一个元素, 都是集合 B 的元素, 同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 我们就说集合 A 等于集合 B , 记作

$$A = B.$$

如果 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 就说集合 A 是集合 B 的真子集, 记作

$$A \subsetneq B.$$

(3) 几个重要关系

- ① 空集是任何非空集合的真子集;
- ② 任何集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$;
- ③ 若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$;
- ④ 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么 $A = B$.

2. 补集

(1) 设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集 (即 $A \subseteq S$), 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $C_S A$, 即

$$C_S A = \{x | x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}.$$

(2) 几个特殊性质:

$$C_S S = \emptyset, C_S \emptyset = S, C_S(C_S A) = A.$$

典型例题解析

例1 满足集合 $\{1, 2, 3\} \subsetneq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 M 的个数是().

A. 8

B. 7

C. 6

D. 5

分析

⇒

根据题中条件可知, 集合 M 的集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的真子集, 而且 M 中的元素除 $1, 2, 3$ 外, 还至少有 $4, 5, 6$ 中的一个. 所以符合条件的 M 有: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}$ 共有 6 个.

解

⇒

C

例2 已知全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | 3 \leq x < 5\}$, $B = \{x | x > 1, \text{ 或 } x \leq -2\}$, 求 $C_U A$ 和 $C_U B$.

分析

⇒

借助数轴求解.

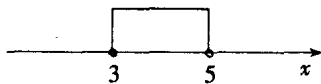


图 1—2

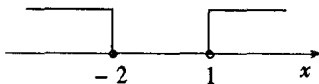


图 1—3

解

⇒

由图 1—2 可知, $C_U A = \{x | x \geq 5 \text{ 或 } x < 3\}$,
由图 1—3 可知, $C_U B = \{x | -2 < x \leq 1\}$.