科學圖書大庫

數學研究叢書(四)

大域幾何之分析研究

譯者 郭應言

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十八日再版

數學叢書之四

大域幾何之分析研究

基本定價 1.60

譯者　郭應言　美國紐州立大學數學博士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號　電話9719739

目　　録

第一章 導 論

大域幾何（Global geometry）或分析是由微積分學的運算很自然的發展出來的。當微積分在研究單實變數或多實變數的可微分方程的一些理論時，近代微分幾何學却集中全部的精神，來研究「流形」（manifold）的性質。簡單的說，流形便是一個空間，而這空間在局部上的性質正與歐幾里德空間（Euclidean space）相似，同時在歐幾里德空間上的微分或積分的運算，都可擴展到此空間上。

然而，這種擴展在實際上並不是一件容易的事，而且最後的目標亦尚未到達。就微分方面來說，事實上就是張量運算（Tensor Calculus）以及其近代的一個分枝。至於積分方面，却從兩個不同的方向同時進行；一則爲測度論（Measure Theory），一則爲代數理論（Algebraic Theory）。而此代數理論把我們帶進代數拓撲中的微分形式以及上同調理論（Cohomology Theory）。因此，流形的重要性，在近代數學當中佔有重要的地位。

纖維空間（Fiber Space）是由流形的理論中發展而來的。一個纖維空間，就局部的性質來說，就像一個卡氏乘積之（Cartesian product）；同時還在每一個纖維上，帶著有一些代數的結構，諸如向量空間的結構等。我們可以如此大膽的說，在最近二十年來，纖維空間的大域理論在它的各分枝上的發展，包括了所有在這二十年當中的數學研究。

在這一册書，就像這一部書的其他幾册一樣，所包含的論文，都是適用於大學中較高的程度，或是研究所的程度。這些文章是一種補充性質的，因此不包含著一般課程或教科書中的材料。雖然如此，在這裡所研究的問題，却很新，同時指出最近數學的活躍範圍。

Morse 教授的論文是由一九四二年的American Mathematical Monthly中，他自已的一篇註釋性文章所翻印出來的，只是在這文章之後多加了一節。大約在廿五年後的今天，這篇論文還是如此的動人。在數學當中，幾乎沒有一個觀念，能比得上Morse的臨界點理論（Critical Point Theory）來得能簡單更具有重要性。若以最簡單的形式來說，這定理告訴我們，在一個

緊緻流形上，一個光滑函數（ Smooth Function ）在其臨界點上的性質，是受此流形的拓撲性質的強烈限制，換句話說，在流形上的許多拓撲性質，可以由一些此流形上的光滑函數得到。當我們把臨界點理論擴展到無限維流形上時，再利用一些其他的結果，便可得到在變分問題上的極值曲線及閉極値曲線的結論。Morse 理論的應用眞是未可限量。

第二篇論文是由本人所寫。此論文是討論於歐幾里德空間中，大域微分幾何的一些例子。雖然我們給了流形與歐幾里德空間許多相同的性質，由於歐氏空間所給我們的直覺，使得它還是佔有重要的地位。在歐氏空間中，所有的定理都是很吸引人的，那是因爲很易於了解，其實一些基本的歐氏空間的性質却被人誤解了。我們可以在歐氏空間中的大域曲面理論上，提出很多還無法解決的問題。很幸運地，在本論文上的一些定理，將要是黎曼流形（ Riemannian manifold ），等距映像的更一般化的結果的先驅者。

Flander 教授的論文是關於外可微分形式的一些基本性質，這篇論文可視爲他一部精彩的書的導論（書名爲H. Flander, Differential Forms With Applications to Physical Science. New York: Academic Press Inc., 1963 ）。外微分學是被偉大幾何學家Élie Cartan所定形下來的。他很成功地把外微分學開拓了出來。外微分形式只不過是重積分中的被積分函數而已，而外微分法却把向量分析中的傾斜量（ Gradient）及旋轉量（Curl）一般化了，同時給出了Stoke定理的代數意義。外微分學的重要性是由於其簡單性，外微分是極少數能被定義在任何流形上的運算當中的一個，所謂任何流形是指可微流形，而不知任何其他結構，例如黎曼測距或仿射聯絡（ Affine connection ）等，同時由於外微分運算可與可微映像互相交換，可知外微分是一個很自然的運算。在拓撲學上，把外微分解釋爲上邊緣運算（ Coboundary Oparator ），而外積解釋爲上積（ Cup Product ），這兩種看法，倍增外微分的光彩。

Kobayashi 教授的論文可能比上述三篇論文都來得更高深些。雖然這篇論文被視爲黎曼幾何上一個重要專題的導論，然而所用的方法却很基本。就幾何學而言，共軛及分割軌跡（ Cut locus ）在黎曼幾何上是相當具有誘惑性的，同時他們的性質可以反應出流形本身的一些幾何性質。其實他們已經在正曲率的黎曼流形上的扭轉定理（ Pinching Theorem ）中，擔任很重要的角色了（此定理由下列諸人所發展：H. Rauch , W. Klingenberg, M.Berger , D. Gromoll, E. Calabi, 等）。這種扭轉定理可說是在最近十年來，在黎曼幾何學中的重要成就之一。此定理是研究正截曲率的黎曼流形。一

個古典的結果告訴我們，一個緊緻可定向的二維流形，若為正曲率，則可等距地為視為三度歐氏空間中的一個凸曲面（ Convex Surface ），此即 Weyl 的問題，在較高度的空間中，便得考慮更多的情況了：可能僅有少數的緊緻單連通正曲率的黎曼流形存在而已。總之，我們在這方面的知識實在太少了。

Cesari 及 Santalo 教授的論文都是有關積分的問題。然而他們之間的精神上的差別，却給了我們一個極有趣的對比。Cesari 教授根據他自己所做的研究，給面積論（ Theory of area ）下一個很嚴格的基礎，而 Santalo 教授的論文中，對積分不變式之間的相互關係，有很多的報導。積分幾何在很多的幾何問題中，擔任重要角色。最近的一個發展，便是 Radon 變換式的一般化，這在偏微分方程及群的表現上有極重要的應用。

在結束這導論之前，我要提出最近的兩項重要的發展。第一個是 R. Thom 的邊緣定理。就像數學上其他重要觀念一樣，Thom 的基本概念亦是非常的簡單。兩個同維數的流形，若為定向且其差為一較高維數之流形之邊緣，則吾人稱此兩流形為共邊緣。由這種關係所形成的邊緣類（ bordism class ）可成為一特定結構的環，而由此可得到對於緊緻流形族更深的研究與了解。

第二個發展則是在研究解析不變式與拓撲不變式之間的關係。例如在緊緻的黎氏空間上，古典的 Riemann-Roch 定理，利用曲面的虧數（ Genus ）以及其他不變量，來表示一特別的向量空間的維數，此向量空間為由所有半純函數所形成者，其中半純函數之極點及零點（ Pole , Zero ）滿足某一特定關係。在這一方面做更深一步的應用，是於緊緻流形上之向量叢中，使用橢圓運算子於其截面上，同時研究其指數（ Indices ）（參看 F. Hirzebruch 所著之 Topological Method in algebraic Geometry, New York: Springer 1966，以及 R. S. Palais。所著之 Seminar on the Atiyah - Singer index Theorem. Princeton 1965 ）這方面的應用由 M. Atiyah，R. Bott , F. Hirzebruch ,及 I. M. Singer 所發展。流形上的奇積分運算子在此發展中佔了很重要的地位，這方面可參考 A. Calderon , A. Zygmund 以及 R. Seeley 等人的著作。

總之，幾何，拓撲以及分析，在現代再也無法再分離了。

第二章　何謂大域分析

1.　導論

所有的數學幾乎可分為大域及局部兩方面。至於要給這兩個名詞一個定義，使得所有的數學家都能滿意，這可說是決對不可能的。其實我們也不必，同時也不希望，急著給出這個為難我們的定義。在德文中，大域稱為 im Grossen，局部稱為 im Kleinen，同時這兩個字在很早以前已被應用於各種不同的方面了。對於讀者而言，要了解本篇的題目，最有趣同時最有用的方法，那就是讓我們觀察一些例子。

以下我們不給出任何證明。為了要給讀者關於大域分析一個概念，可由兩方面進行。 第一是試 著給讀者介紹一些基本運算技巧，很不幸的 ，這種介紹基本運算技巧的方法太多，同時所給的一些說明也是片斷的，要不然就是誇張一些特殊技巧的重要性，使得讀者無法對大域分析有一個整體上的了解。第二個方法，對初學者而言也可能是唯一能夠使讀者明白同時接受大域分析的觀念的，就是給出一些完整的例子。

2.　由微分幾何學上而來的例子

幾乎所有的古典微分幾何學都是討論局部的性質，也就是說所有定理，只是在某一點的鄰域上證明其成立。例如：在適當的假設之下，我們可以證明，在曲面上的某一點P的鄰域上，此曲面可用等溫參數表之，使得在此鄰域上，下式成立

$$ds^2 = \lambda(u,v)[du^2 + dv^2] \tag{2.1}$$

其中 $\lambda(u,v) \neq 0$ 。而在大域的研討上，我們便提出下列問題；對於何種的閉曲面，才可以把上述的參數（u，v） 引進整個曲面當中，使得 ds^2 可表為（2.1）的形式。這問題的答案在最近數年中才得到答案。此題目要求

在閉曲面上的每一點，只能有唯一的曲線u＝常數，以及唯一的曲線v＝常數通過。其實在含有（u，v）參數的定向曲面中，錨環（環面）為唯一可能滿足條件者（其中包括與環面有一對一連續映像的曲面）。

接著，我們可提出更為一般化的問題。對於何種閉曲面S，才可以把參數（u,v）引進整個S中，使得在S上的每一點，有且僅有一條u＝常數的曲線，以及有且僅有一條v＝常數的曲線通過。這種閉曲面告訴我們，在S上的每一點P，都付帶著有一個向量，切曲線u＝常數於P，且此向量為唯一。因此當P在曲面S上變動時，在S上便得到一個向量場，而此向量場中的向量，隨著P連續的變動。為了要使這種向量場的存在，則此曲面S，必是和環面有一對一的連續映像，即與環面有同樣的拓撲型式。

因此，在一個問題當中，若涉及參數網的存在，使得不產生奇點，則拓撲最具有控制性。由之吾人可看出，在大域的分析學或大域的幾何學當中，之所以大大依賴拓撲學的理由何在了。

3. 由複變數函數論而來的例子

假設$f(z)$為一複變數z的函數，且不包含奇異點，則在擴張平面中，除去$f(z)$之極點（Pole）之後，此函數可表為z的有理函數。此為一大域性定理，其證明更為大域分析顯示出了一些凸出的特徵。在證明時，先把$f(z)$在$z=z_0$的鄰域上，分為兩個函數的和，其一為$f(z)$在z_0的主部，其二為在z_0上解析（analytic）的函數。這步驟事實上最初步局部分析的應用。

其次，由$f(z)$中減去$f(z)$在每一個極點的主部之後，我們可得一函數$\phi(z)$，而此$\phi(z)$的絕對值為有界的，同時最多包含可去奇異點，再依照Liouville的定理，$\phi(z)$為一常數，由此定理得證。

大域分析的由來源自擴張平面的定義及Liouville定理的證明，於此不再加以詳細說明。其實Liouville定理可以把具有拓撲特性的定理，歸到向量場的性質上。

4. 大域微分方程式——由Henri Poincaré的研究工作而得的例子。

對Poicaré來說，獲知大域分析的可能性，並不是一件偶然的事。同時吾人亦可說Poincaré是近代拓撲學的始祖。Poincaré對於古典的微分方程

理論覺得不滿意，他想了解一些軌線系（System of trajectory）的性質，大域而非局部。同時他對於星球的運轉大感興趣，但發覺在古典理論中，沒有足夠的一般性及完整性。在他有關微分方程的論文中，可看出他對天體力學的興緻。

在Poincaré 有關微分方程式的第一篇論文裡，對微分方程式的一般性，並沒有深入的討論，但在方法上却是值得推崇的。Poincaré 首先考慮定義於球面上的一階常微分方程式。利用任何一組局部座標系，可把球面上的任何一點表爲（u_0,v_0），而在此點（u_0,v_0）的鄰域上，可將微分方程式表爲

$$\frac{du}{U(u,v)}=\frac{dv}{V(u,v)}$$

其中兩函數U及V我們假設在（u_0,v_0）的鄰域上是解析的。在球面上的點，使得U及V同時爲零者，稱之爲奇異點，吾人假設這種奇異點的個數爲有限。

Poincaré 還在奇異點上，加了許多假設。爲了要解釋這些假設，吾人令（u_0,v_0）爲原點。則在原點的鄰域上，U及V可表爲下式

$$\mathrm{U}=au+bv+\cdots\cdots\cdots,$$
$$\mathrm{V}=cu+dv+\cdots\cdots\cdots。$$

在Poincaré 的研究工作中，經常假設下述方程式的根不爲零，且互不相等及不爲全虛數，同時兩根之比亦不爲正整數：

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & b \\ c & , d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

上述這些條件，大部份的解析函數都能滿足。

凡是滿足此微分方程式的曲線，皆稱爲特徵曲線。一般而言這特徵曲線是不不包含奇異點的，除非通過一個此微分方程式的奇異點。由於Poincaré 的研究，可以把大域分析的典型，大致分爲下列三部份：

(甲) 研究特徵曲線在一個奇異點的鄰域上的性質。

(乙) 設法把指數±1加於每一個奇異點上，然後建立指數之間的關係（這一部份，通過組合拓撲的眼光，已被視爲簡易）。

(丙) 利用循環及極限軌線，把大域特徵曲線加以描述。（甲及乙的結果，爲丙之初步）。

甲部份：在他研究一個特徵曲線在奇異點的鄰近的性質時，Poincaré 指出下列三種奇異點，第一種稱爲節點，在節點的鄰域上，每一條特徵曲線皆以

此節點爲極限位置而趨近。例如下列微分方程式

$$\frac{du}{u}=\frac{dv}{2v}$$

於原點有一節點。在此例子當中，特徵曲線的形式爲 $kv = hu^2$，其中 k 及 h 皆爲常數。第二種稱爲螺線極點，當特徵曲線接近此點時是成螺線形式，而其弧長趨近於無限大。例如微分方程式

$$du/(u-v)=dv/(u+v)$$

有一螺線極點於原點上，而以對數螺線爲特徵曲線。第三種稱爲鞍點，只有兩條特徵曲線以鞍點爲極限。例如微分方程式

$$du/u=dv/-v$$

有一鞍點於原點上。其特徵曲線，uv ＝常數包含有兩特別特徵曲線，$u=0$ 以及 $v=0$，皆通過原點。

乙部份：Poincaré 把上述之節點及螺線極點附加以 $+1$ 的指數，而把鞍點附加 -1 的指數，他並且證明，在球面上，對於所有奇異點的指數和爲一常數 2。因此在球面上至少含有兩奇異點。

一個不包含多重點的閉特徵曲線稱爲閉鏈（cycle）。假若有一特徵曲線，以節點或螺線極點爲極限點的話，通常我們沒有辦法把此特徵曲線很自然的連續延長。而且大家公認爲，在此情況下，這條特徵曲線以節點或螺線極點爲終點。若一特徵曲線 g 以鞍點爲極限點，吾人約定 g 可以延著其他特徵曲線，由鞍點或向左或向右繼續延伸。就是由於這個約定，把我們的閉鏈的觀念擴大了，也就是說一個閉鏈除了鞍點之外，再也沒有其他奇異點。

丙部份：Poincaré 以完整的敍述特徵曲線爲結論。他指出若一個特徵曲線，在沒有極限的情況下延伸的話，可能於節點終止，可能是一個閉鏈，也可能是閉鏈之漸近線。至於一個螺線極點可視爲退化了的閉鏈，而在此點鄰域之螺線則視爲此閉鏈之漸近線。

這裡我們要求讀者觀察出甲乙及丙這三部份在解析方面的基本差別。同時注意到爲何甲及乙兩部份爲丙的初步，而使得丙成立。Poincaré 的指數定理，在Brouwer 的不變點定理當中，有其拓撲上的一般化。在丙部份中，特徵曲線的分析，是現代循環及傳遞性的先驅，這門學問由G. D. Birkhof 所發出來的，同時Hedlund，Morse，Von Neumann，Koopman,E. Hopf 等人亦有很大的貢獻。

5. 在大域平衡理論中的一些基本例子

在大域平衡理論（ Equilibrium Theory ）中，拓撲的應用，佔了絕大部份。同時在前些例子當中，所出現的分析理論，於此地又重複出現。簡略的說，在這些例子當中，**我們所用過的大域分析理論可分為下列三方面**：其一為基本的局部分析，其二為指數的局部決定法，其三為把這些局部的分析，利用各種方法（包括拓撲學在內）積分起來，由此得到大域方面的定理。在現在這個例子當中，將要指出有很多不同的問題，若由局部的眼光來看，會顯得有很大的差異，然而由拓撲學的眼光來看，實質上却又完全相同的。

令 Σ 為一個關閉且有界的 n 維流形，在足夠高維的歐幾里德空間中，吾人考慮定義在 Σ 上的一個函數 f 在 Σ 上某一點的性質。同時吾人假設 Σ 可由 n 個參數，在一些很好的可微性及正規性下，所表示出來。此外吾人又假定在這一參數（ u ）表示之下，函數 f 成為參數 u 的函數 $F(u)$ ，同時至少可微分三階以上且連續。則在 Σ 上之點，若使函數 F 的每一個偏微分皆為零者，稱之為 f 之臨界點或平衡點。

為了解釋清楚起見，吾人再做下列假設，而此假設在大部份的情形下是滿足的。假設 f 的每一個臨界皆為非退化的，也就是說，函數 F 在臨界點上的泰勒（ Taylor ）展開式中，二次項 F_2 為一非退化之二次形式。則由基本的圓錐截面理論可知，吾人可利用一個實非奇異的線性轉換，把變數 (u) 改為變數 (v) ，使得 F_2 有下列形式

$$F_2 = -v_1^2 - \cdots\cdots - v_k^2 + v_{k+1}^2 + \cdots\cdots v_n^2 \ .$$

其中 k 稱為此點臨界點之指數。

一個如 Σ 的流形，有一第 i 個Betti 數 R_i（ $i=1$, ……, n ）。這數為獨立且無界的第 i 個閉鏈的最大數。若 Σ 為一錨環，則 $R_0=1$, $R_2=2$, $R_3=1$. 現考慮三維的錨環 T_3 。這個流形 T_3 可由二維錨環 T_2 及於歐氏三度平面中，不與 T_2 相交的三度平面 π_2 組合而得。於包含吾人三度平面的四度平面中，將 T_2 以 π_2 為軸旋轉，即得 T_3 。這 T_3 亦常稱之為三圓之乘積。對 T_3 而言，吾人有 $R_0=1$, $R_1=3$, $R_2=3$, $R_3=1$ 。這些數恰與 $n=3$ 時之二次式係數相同。吾人可利用一正方形，把對邊互相對等起來，而得一通常的二度錨環。同法，亦可將一立方體的對面互相對等起來，而得一三度錨環 T_3。利用這種對等法，在立方體中，三個互相垂直的邊，代表三個獨立且無界的第 1 個閉鏈，類此，三個互相垂直的面，代表三個獨立且無界的第二個閉鏈。至於一個點，則可視為 0 －閉鏈，T_3 本身則視為第三個閉鏈 。用這種直覺的看法，不難得到上述 $R_0=1$, $R_1=3$, $R_2=3$, $R_3=1$ 之結果一個三度的流形，若與 T_3 有一對一的連續映像，則吾人稱此流形為拓撲

三一錨環（Topological 3 - torus）。

與下面有關的一個定理爲，於Σ上，一個函數f的第i個指數的臨界點個數M_i，滿足下列公式

（5.1）　　　$M_i \geq R_i$

因此在拓撲三—— 錨環上，吾人可知至少存在有$1+3+3+1=8$，個臨界點。

例子

1. 光的三角形（Triangle of light）。令C_1,C_2及C_3爲於平面上之三條不互相交；簡單，閉合，非奇異，解析的曲線。下列吾人所討論者爲一三角形，其三頂點P_1,P_2及P_3分別位於曲線C_1,C_2及C_3上。如此的三角形中，若有一條光線，沿三角形前進，於P_i點反射回來正如曲線C_i爲一面鏡子一般，或者在三角形中，P_i點之內角爲π者，則稱此三角形爲光之三角形。吾人問，有多少個光的三角形存在？

令f爲三角形$P_1P_2P_3$之三邊長之和。對每一個曲線C_i，吾人可引進一參數u_i，其中u_i與弧長成比例，且由0變至2π。則f成爲u_1,u_2及u_3之函數$f(u_1u_2u_3)$。使得f有定義之範圍，很顯然地爲一個拓撲三一 錨環。由局部分析觀之，由基本的方法可證得，f有一臨界點若且唯若對應的三角形爲光的三角形。

這些光的三角形可利用臨界點的指數來加以分類。依關係式（5.1），可知至少有$8=1+3+3+1$　個光的三角形存在。

2. 由一點到拓撲三—— 錨環上的法線。令Σ_3爲一於歐氏4度空間中的拓撲三——錨環。且令P爲一不於Σ_3上的固定點。吾人欲求出由P點到Σ_3的法線，欲達此目的，先設f爲由P點到Σ_3之距離，則f可視爲Σ_3上之點(u)之函數。吾人很容易可證得，除一些特別點P之外，函數f之臨界點皆爲非退化的。再者，利用局部的解析，亦可證得f有一臨界點(u)若且唯若由點P到點(u)之線段，爲於(u)上垂直於Σ_3之法線。因此，依據吾人上述的一般定理可知，至少有八個由P到Σ_3之法線存在。這些法線可以加以分類，同時亦可證明出，非退化之臨界點(u)之指數，恰與於P到(u)的法線上，Σ_3之主曲率之中心數。於拓撲二一 錨環上，亦有類似的定理，於此情形，法線的個數，至少爲四。

3. 通過一固定的二度平面同時切於一固定拓撲三—— 錨環之三度平面。首先假設此固定二度平面π_2不通過此固定拓撲三—— 錨環Σ_3之洞，亦即

吾人假設 π_2 可以在不與 Σ_3 相交之下，將其移開 Σ_3 至無限遠處。由此吾人可證明，若 π_2 並非特別化，則至少有八個三度平面通過 π_2 且切於 Σ_3。

4. 一個重鏈（ Heavy Chain ）的平衡，其中此鏈之兩端分別於拓撲二一描環上及一閉曲線上自由運動。吾人假設此曲線C及拓撲二一錨環同時於歐氏三度空間中，且C與拓撲二一錨環 Σ_2 於同一鉛垂線上無共同點。吾人又設有一鏈，其長度大於C與 Σ_2 之間最長距離，而此鏈之兩端可於 C 及 Σ_2 上分別自由移動，鏈則準於通過 Σ_2 或C。假若對 Σ_2 而言，C 的位置並非特別，則至少有八個位置能使得此鏈平衡，其中有七個位置是不穩定的。爲解決此問題，可設f爲此鏈的重心的高度，則f可表爲端點之函數，再求此函數f之臨界點即可。

在這一節中所提出的例子中，都有一個共同的事實，就是所有假設出來的函數，其定義域皆爲拓撲三一錨環。這些例子也是在力學，幾何學或是變分法中的好例子。至於上述例子中，凡是有關於圖形時所定的“非特別位置”的限制，都可借其他方法來除去。例如利用拓撲的方式來定義臨界點代替以導數的方式來定義臨界點，以及用一個群的理論特性的拓撲分類代替用指數所做的臨界點的分類，都可達到目的。至於這種一般化的問題，都是大域分析的特性。

或許吾人可將大域分析，最終歸於拓撲學，但那是將拓撲學大大擴展後的事。至於在大域分析上經常碰到的問題，雖然是比較不一般化，或許也可由將來的拓撲學，已造成正規的形式。

大域分析學上，現仍存在有很多難題，但是很重要的未解決的問題，於此吾人只提出其中之一如下。在兩個或多個天體問題當中，令J爲最小作用積分，我們問於 Jacobi 的最小作用積分J的圍道流形（ Contour Manifold ）上，其拓撲結構是以什麼方式，隨著J而改變。在J當中的獨立變數爲閉曲線。這個問題的解答，或許可以揭開一件事實，那就是星球的運動軌道，實質上是因拓撲的性質而存在。由純粹拓撲學的觀點，必須利用大域分析才能找得到答案的問題，實在是太多，同時也是我們尚未加以研究的一個範圍。

參考文獻

對於這一方面有感興趣的讀者，必須閱讀最近拓撲及微分拓撲的導論。在微分拓撲方面，我們推薦第一參考資料。第二參考資料則是給讀者介紹臨界點理論，最好能接著讀第三參考資料。至於臨界點理論發展的三個不同階

段的描述，可於第四參考資料及其他參考資料中得到。較高級的讀者，則可閱讀第五參考資料，包括其第七節“變分法運算的應用”（Application au Calcul des Variations）。在第六參考資料中，利用Morse理論中的法線及焦點以及關係（5.1）的適當形式，證明Lefschetz定理。在第七參考資料中，包含著臨界點理論最深奧的應用。在第八參考資料中，可以找得到大域分析的應用，正如於上述例一到例四中一般。

1. Georges de Rham, Variétés différentiables. Paris: Hermann et Cie., 1955.

2. M.Morse and G.B. van Schaack, "The critical point theory under general boundary condition," Annals of Mathematics, 35 (1934).

3. H.Seifert and W.Threlfall, Variationsrechung im Grossen, Leipzig und Berlin: Teubner 1938.

4. M.Morse, "Recent advances in variational theory in the large," Proceedings of the International Congress of Mathematics, (1950). pp. 143-55.

5. J.-P.Serre, "Homologie singulière des espaces fibrés," Annals of Mathematics 54 (1951), pp. 425-505.

6. A.Andreotti and T.Frankel, "The Lefschetz theorem on hyperplane sections," Annals of Mathematics 69 (1959), pp. 713-17.

7. R.Bott and H.Samelson, "Applications of the theory of Morse to symmetric spaces," American Journal of Mathematics, 70 (1958), pp. 964-1029.

8. Leon van Hove, "The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal," Physical Reviews, 89 (1953), pp. 1189-93.

9. John Milnor "Morse theory" (based on lecture notes by M.Spivak and R.Wells), Annals of Mathematics Series, No. 51. Princeton N.J.: Princeton University Press, 1963.

10. Differential and Combinatorial Topology, A Symposium in honor of Marston Morse. Princeton Mathematical Series, Princeton, N.J. Princeton University Press, 1965.

第三章

歐幾里德空間中的曲線及曲面

1. 導論

在這篇論文當中，包含著一些大域幾何的基本定理。這些是將來發展的起源。同時這標題有其將來性。於此，吾人將考慮最簡單的情況，於此情況中，一些幾何觀念最爲淸楚。

2. 轉向切線（Turning tangent）的定理

設E爲歐氏平面，此平面爲定向的，故有了一個預先決定的轉動方向。吾人定義平滑曲線如下：若令$X=(x_1,x_2)$表其位置向量，則此位置向量爲弧長之函數，令函數$X(s)$，即函數$x_1(s),x_2(s)$，爲兩次連續可微分，同時向量$X'(s)$皆不爲零，則稱曲線$X=(x_1,x_2)$爲平滑曲線。$X'(s)$皆不爲零的條件，保證我們一定可定義一單位切向量$e(s)$，使得其與向量$X'(s)$有同一方向。又因E爲定向的，故又可定義一單位向量$e_2(s)$，使得由e_1轉到e_2恰爲正轉向。稱$e_2(s)$爲單位法向量。三個向量，相互之間滿足下列公式，即所謂的 Frenet 公式

(1) $dX/ds=e_1$, $de_1/ds=ke_2$, $de_2/ds=-ke_1$。

其中函數$k(s)$稱爲曲率。此函數$k(s)$連同符號定義在內，同時當所定義的定向性改變時，$k(s)$亦變號。

一曲線C稱爲閉合者，若其位置向量$X(s)$以L爲其週期，其中L稱爲曲線C之長度。若$0<s_1-s_2<L$，使得$X(s_1)\neq X(s_2)$，則稱C爲簡單。若曲線C位於每一切線之同一側，則稱C爲凸的。

令C爲一定向的閉合曲線，其長度爲L，並將位置向量$X(s)$表爲弧長s的函數。又令O爲平面上的任一個定點，並利用此點爲此平面的座標系之原點。設Γ爲一以爲O爲圓心之單位圓。吾人定義一切線映像（Tangential