研究生教材

应用最优控制

吴受章 编著

西安交通大学出版社

研究生教材

应用最优控制

吴受章 编著

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书是工科院校自动控制类型各研究方向的硕士研究生的“最优控制”教材。主要内容为：变分法，变分与 Fréchet 微分。时间端点固定，有终端函数约束、终时不指定的连续系统最优控制。有限时间和无限时间的线性连续系统最优控制。矩阵 Riccati 方程的解法。奇异摄动法解 *LQ* 问题。离散系统最优控制。利用抽象空间的知识证明最小值原理。多段决策过程与动态规划，Hamilton-Jacobi 方程，微分动态规划。两点边值问题的几种数值解法。奇异控制。线性随机控制，非线性随机控制。双重影响，双重性质，双重控制。

本书主要介绍了有状态扰动或输出扰动时最优控制器的设计，为有参数变化扰动时最优控制器的设计奠定基础。

全书注重思想和概念，注意演算，便于阅读。每章末尾附有课外阅读文献、习题和上机安排。所以，不仅可作为硕士研究生的教材，而且是自动控制技术人员的良好进修读物。

应 用 最 优 控 制

吴受章 编著

*

西安交通大学出版社出版
(西安市咸宁路 28 号)
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32　印张 10,625　字数：268 千字
1987 年 4 月第 1 版　1987 年 7 月第 1 次印刷
印数：1——3,500

定价：2.30 元

ISBN7-5605-0013-7/TP-3
15340·121

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才 他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的，因此在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样的高层次教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

前　　言

1979～1985年，作者在西安交通大学对自动控制类型各专业的硕士研究生讲授“最优控制”，现将讲授内容整理成本书。

本书取名“应用最优控制”而不是“最优控制的应用”，亦即不偏于哪个专业方向的应用。在西安交通大学选修本课程（一学期，60学时）的专业主要有：自动控制理论及应用，自动化仪表与装置，工业自动化，液压传动及气动，反应堆工程，电厂热能动力及其自动化，系统工程等。

本书取名“应用最优控制”，意味着全书着眼于有工程应用价值的内容，不偏爱纯属数学兴趣的内容。

写作时考虑了以下几方面：1.关于教学方式：为了适应硕士生的学习方法，讲授时只需讲思想、讲思路，算式的推导可以自学。所以，全书以写细致些为宜。2.关于教学环节：为了不仅能引导入门，而且能引导到现代文献的研究水平，又要把培养独立工作能力放在首位，所以，各章节的有关内容都安排了经过精选的习题，或上机实习的内容，课外要求阅读指定的文献，并完成读书报告，以培养综合文献资料、分析问题和解决问题的能力。

写作本书，曾得到西安交通大学信息与控制工程系李人厚主任的支持。本书初稿曾供西安及外地一些兄弟院校硕士研究生使用，受到这些院校的支持。本书初稿的部分章节曾对四川建材学院工业自动化专业81届本科大学生讲授，受到学院和机电系领导的支持，特别受到李永镇副系主任的帮助。本书承西安交通大学系统工程研究所胡保生所长审阅，并提出宝贵意见。作者一并向他们致谢。

本书的不足之处，欢迎批评指教。

作　　者

1986.1. 于西安

目　　录

绪　论

1. 现代控制理论的内容

在现代控制理论中，用状态方程描写非线性或线性系统（包括时变及非时变的）。对于确定性非线性时变系统，可用下列状态方程描写，即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\\&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t),\qquad \forall t\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中，状态向量 $\boldsymbol{x}\in R^n$，控制向量 $\boldsymbol{u}\in R^m$，输出向量 $\boldsymbol{y}\in R^p$；$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 为非线性时变函数。记号$\forall$表示“一切”，为英文 *All* 第一个字母A的倒写。

式(1)描写从时刻 t_0 起(初始状态为 $\boldsymbol{x}_0$)，在控制向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 的作用下，如何影响系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$的变化及系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$的变化。式(1)适用于一切 t 大于等于零的时刻。

对于确定性非线性非时变系统，可用下列状态方程描写，即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t)),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\\&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)),\qquad \forall t\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式(2)和式(1)的差别仅为：式(2)中，$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$为非线性非时变函数。

对于确定性线性时变系统，可用下列状态方程描写，即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\\&\boldsymbol{y}(t)=C(t)\boldsymbol{x}(t),\ \forall t\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中，$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{u}\in R^m$，$\boldsymbol{y}\in R^p$；$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$各为维数合适的时变矩阵。可看出A为$n\times n$阵，B为$n\times m$阵，C为$p\times n$阵。

对于确定性线性非时变系统，可用下列状态方程描写，即

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\\&\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t),\ \forall t\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式(4)和式(3)的差别仅为：式(4)中，A，B，C为常量矩阵。

现代控制理论的内容有五个方面：

(1) 线性系统理论——主要研究式(3)和式(4)所示线性系统的性质，例如：能控性(或能达性)、能观性、稳定性、能检性、能稳定性等。

(2) 最优控制——主要研究确定性系统和随机系统的控制器设计，见图1。对于确定性系统，研究如何寻求最优的控制向量$\boldsymbol{u}(t)$(即式(1)～(4)中的$\boldsymbol{u}(t)$，或图1中的$\boldsymbol{u}(t)$)，使系统从初

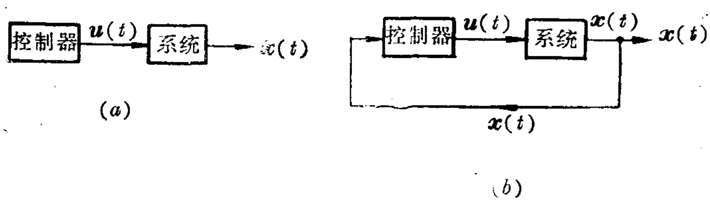

图 1 控制器设计

态$\boldsymbol{x}_0$变到所希望的终态$\boldsymbol{x}_f$，或使系统的输出初值$\boldsymbol{y}_0$变到所希望的输出终值$\boldsymbol{y}_f$，在过渡过程中和稳态应满足某种目标函数为最小，即$\min\limits_{\boldsymbol{u}(t)} J$，式中，$J$为标量目标函数，例如：要求能量消耗最少，动态误差和静态误差最小，过渡过程时间最短等等。

随机系统可用下列状态方程描写，即

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k)+\boldsymbol{v}(k),\ \boldsymbol{x}(k_0)=\boldsymbol{x}_0\\&\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(k),k)+\boldsymbol{w}(k)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式(5)为随机差分方程。式中，$\boldsymbol{x}(k)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(k)$为控制向量，$\boldsymbol{y}(k)$为输出向量，$\boldsymbol{v}(k)$为系统噪音向量，$\boldsymbol{w}(k)$为观测噪音向量。$\boldsymbol{x}(k)$和$\boldsymbol{y}(k)$都是随机向量，$\boldsymbol{x}_0$为已知的某种概率分布。

对于随机系统，研究有状态扰动或输出扰动的情况下如何寻求最优的控制向量 $\boldsymbol{u}(k)$，使系统满足某种目标函数为最小，即 $\min\limits_{u(k)} J$，式中，J 为标量目标函数，它表示某种代价的期望值。

(3) Kalman 滤波——在存在系统噪音和观测噪音的情况下，研究如何根据输入-输出的观测，对状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 作出最好的估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$。

(4) 系统辨识——研究如何根据输入-输出的观测，确定数学模型。

(5) 适应控制——当对象的数学模型未知，或对象的参数发生变化的情况下，研究控制器的设计。实际上，适应控制是研究参数扰动情况下的控制器设计；最优控制是研究状态扰动或输出扰动情况下的控制器设计。

在“最优控制”中，确定性最优控制是随机最优控制的基础，随机最优控制是确定性最优控制的发展。在“适应控制”中，模型参考适应控制实质上是一种特殊的最优控制；自校正控制实质上是一种特殊的随机最优控制。应该看到“最优控制”和“适应控制”的划分是人为的，是在不同的历史时期形成的。

应该注意：在以上五个方面中，“线性系统理论”是基础，其它四个方面都显示出浓厚的应用色彩。此外，在这五个方面中，控制是目的，其它都是工具和手段。

2. 确定性系统的频域设计与时域设计的对比

这里所指频域设计，实际指经典设计；时域设计实指现代设计。两者的对比示于表 1。

表 1

	确定性经典设计	确定性现代设计
时代	40年代兴起，50年代成熟	50年代末兴起，60年代成熟
背景	炮火控制，一般工业	空间飞行器，核反应堆，一般工业
方法	稳定性分析，频率响应(Bode 图， Nyquist 图等)，根迹，相平面，描述函数等——主要用 Laplace 变换。	最大值原理，动态规划等——主要用线性代数，变分法，泛函分析等。
特点	解析与作图结合，反复试凑。	纯解析（结合数字计算机）
适用范围	单输入-单输出，非时变，变量与控制都不受约束。	多输入-多输出，时变，状态和控制都受约束，例如：大小应在某一范围内。
目标	恒值或跟踪，不提出目标函数。	恒值或跟踪，而且提出目标函数，例如：要消耗能量最少，动态误差和静态误差最小，过渡过程时间最短等等。

从表 1 所示确定性系统的经典设计与确定性系统的现代设计的对比中，对最优控制的设计特点可略见一斑。

3. 本书的主要内容

硕士研究生在选学“最优控制”前，都已学过高等代数、概率论、计算方法；也已学过线性系统理论，或学过现代控制理论。“Kalman 滤波”，“系统辨识”也正在学习之中。这些都是先决条件。

高年级大学生在选学“最优控制”前，都已学过线性代数、

概率论；也已学过现代控制理论。因此，看懂本书的部分章节虽然没有困难，但仍然需要很好地组织与安排。

本书主要介绍以下几个内容：

(1) 变分法与 Fréchet 微分。

(2) 确定性的非线性系统最优控制，包括连续系统最优控制和离散系统最优控制。

(3) 确定性的线性系统最优控制，包括连续 LQR 问题和离散 LQR 问题。矩阵 Riccati 微分方程和矩阵 Riccati 代数方程的解法。奇异摄动法设计次优控制器。

(4) 最大值原理和 Bang-Bang 控制。

(5) 动态规划和微分动态规划。

(6) 奇异控制。

(7) 非线性两点边值问题的解法。

(8) LQG 问题。

(9) 非线性随机控制，包括双重影响，双重性质和双重控制。并为适应控制伏笔。

课外阅读文献

[1] A. P. Sage and C. C. White, Ⅲ, Optimum Systems Control, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., 1977, pp. 1-3, pp. 9-18.

第一章　变分法

1.1　泛函

(1) 定义(泛函)

泛函是一映射J：$\mathscr{D}(J)\to K$，$\mathscr{D}(J)\subset Y$，Y为向量空间，$\mathscr{D}(J)$为J的域，K为R或K为C。

该定义说明泛函是一种变换，它把向量空间Y中某一子集$\mathscr{D}(J)$的元素变换为标量K（实数或复数）。R为real的第一个字母，C为complex的第一个字母。

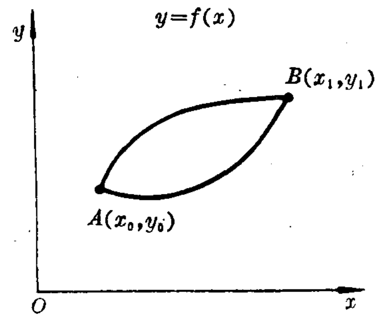

图 1-1　曲线的弧长

例：曲线的弧长

在xy平面上$A(x_0, y_0)$，$B(x_1,y_1)$两点之间的弧长公式为

$$\widehat{AB}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

通过A，B两点的函数若为$y=f(x)$，则不同的函数有不同的弧长，即弧长是y的函数，记为$J(y)$，即

$$\widehat{AB}=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=J(y)$$

因此，求弧长的定积分是一种变换，它把x_0与x_1之间各点

相应的 y 变换为标量（弧长）。由此例可看出定积分为泛函。例：

目标函数

以下各章经常要用到下列形式的目标函数

$$J=\theta[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\phi(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)dt$$

式中，t 为时间，t_0 为始时，t_f 为终时，$\boldsymbol{x}(t)$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制向量，$\boldsymbol{x}(t_f)$ 为状态向量的终态。θ 和 ϕ 都是标量函数。

上式中，第一项 θ 把向量 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 及 t_f 变换为标量，的确为泛函（此外，θ 也只不过是普通的标量函数）；第二项定积分把 t 及向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 构成的标量函数 ϕ 变换为标量，的确为泛函。泛函之和仍为泛函。因此，目标函数也有目标泛函之称。

(2) 定义（函数空间中的距离）

连续函数空间 $C[a, b]$ 是一种抽象空间，其中每一点表示一条曲线（C 为 continuous 的第一个字母；闭区间 $[a,b]$ 表示函数的定义域）。$C[a,b]$ 空间中两点之间的距离定义为

$d_0=\max\limits_{x\in[a,b]}|F(x)-G(x)|$，称为零级距离。

$d_1=\max\limits_{x\in[a,b]}|F'(x)-G'(x)|$，$d=\max(d_0,d_1)$ 称为一级距离

$d_2=\max\limits_{x\in[a,b]}|F''(x)-G''(x)|$，$d=\max(d_0,d_1,d_2)$

称为二级距离

……

$d_n=\max\limits_{x\in[a,b]}|F^{(n)}(x)-G^{(n)}(x)|$，$d=\max(d_0,d_1,\cdots,d_n)$

称为 n 级距离

该定义说明在闭区间 $[a, b]$ 内，两条曲线纵坐标的差取绝对值（因距离总为正），并从所有绝对值中找出最大的作为零级距离。如果零级距离很小，表示两条曲线很靠近。但是零级距离小并不能保证两条曲线形状相同，因此还要看一阶导数，二阶导数，…，n 阶导数是否接近。由于一级距离是从 d_0，d_1 中取出最大的

一个形成的，所以一级距离小就表示两条曲线的函数值很接近，一阶导数也很接近。对于二级距离，$\cdots$，n 级距离的解释可以类推。

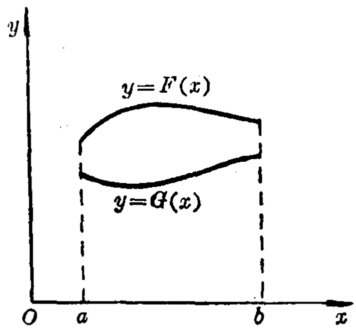

图 1-2 两条曲线之间的距离

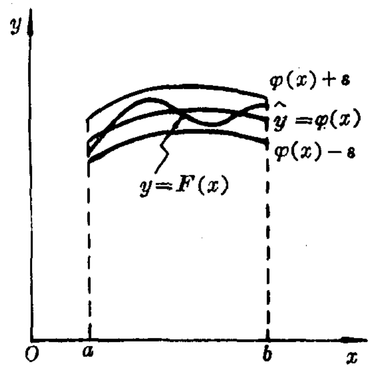

图 1-3 泛函求极值

(3) 定义（n 级 ε 邻区和泛函求极值）

以函数 $\hat{y}=\varphi(x)$ 为中心，由 $\varphi(x)+\varepsilon$ 和 $\varphi(x)-\varepsilon$ 构成的带状（ε 为无穷小），称为函数 $\hat{y}=\varphi(x)$ 的 ε 邻区。若另有一函数 $y=F(x)$，$\hat{y}$ 和 y 的零级距离落入 ε 邻区内，称该 ε 邻区为零级 ε 邻区；若 $\hat{y}$ 和 y 的一级距离落入 ε 邻区内，称该 ε 邻区为一级 ε 邻区。n 级 ε 邻区的定义可类推。

所谓泛函求极值就是：设存在极值曲线 $\hat{y}=\varphi(x)$，寻找 $y=F(x)$，使 y 落入 $\hat{y}$ 的 n 级 ε 邻区内，则 $y=F(x)$ 就是所求的极值曲线。

(4) 定义（泛函的极值）

设 $J(y)$ 为泛函，y 为规定的域内可以取的曲线（简称可取曲线），$\hat{y}$ 为极值曲线。若 $J(\hat{y})>J(y)$ 则称泛函有极大值；若 $J(\hat{y})<J(y)$ 则称泛函有极小值。

该定义说明泛函极大值存在的充分条件为 $J(\hat{y})-J(y)>0$；泛函极小值存在的充分条件为 $J(\hat{y})-J(y)<0$。