现代数学丛书

临界点理论及其应用

张恭庆著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

临界点理论及其应用

张恭庆 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是反映临界点理论研究进展的一本专门著作。全书分五章，系统介绍 Люстерник-Шнирельман 理论，Morse 理论，Ambrosetti-Rabinowitz 理论以及它们的发展，并应用这些理论研究微分方程的解的存在性、多重性以及个数估计等问题。对于半线性椭圆边值问题、非线性波方程的周期解问题和 Hamilton 系统周期轨道问题都作了较深入的研究，其中包含许多在几何上或从方程角度看都很有意义的结果。

书中大部分结果是从文献资料中汇集整理的，许多证明经过简化，有些结果尚属初次发表。

本书可用作数学专业研究生教材，也可供微分方程、非线性分析、泛函分析、微分几何、拓扑学等方面的数学工作者参考。

现代数学丛书
临界点理论及其应用
张恭庆 著
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 10.25 字数 267,000
1986年7月第1版 1986年7月第1次印刷
印数：1—4,600
统一书号：13119·1289 定价：2.55 元

CRITICAL POINT THEORY AND ITS APPLICATIONS

CHANG KUNG-CHING

(abstract)

This is a monograph on the contemporary critical point theory, and it might be the first book in this field.

It consists of five chapters: Chapter I, Premilinary, Chapter II, Extremum theory, Chapter III, Minimax theory, Chapter IV, Category theory and index theory, Chapter V, Morse theory and its applications.

The basic theories of Ljusternik-Schnierelman, of Morse, as well as of Ambrosetti-Rabinowitz and their variants, are systematically developed. They are applied to study certain existence theorems, multiple solution theorems, and the estimations of the number of solutions of various kinds of differential equations. In particular, the semilinear elliptic boundary value problems, the periodic solution problems of nonlinear wave equations, and the periodic orbits of Hamiltonian systems are much more dealt with. Several interesting results from geometry and from differential equations are presented.

Most materials in this book are results scattering in recent journals and preprints. There are certain results published firstly.

This book can be used as a text for graduate students in mathematics departments as well as a reference book for those mathematicians working in the fields of nonlinear analysis, differential equations, functional analysis, differential geometry and algebraic topology etc., and interested in critical point theory.

前　言

变分问题有着极为丰富的源泉. 由于从经典力学到场论，其中所研究的一切物质的运动规律都遵从"变分原理"，即存在着某个泛函，使得对应的运动方程是它的 Euler 方程，因此，求这些 Euler 方程的解便化归为寻求对应泛函的临界点.

古典变分理论旨在确定泛函的极值和极值点. 对这种特殊形式的临界点问题，在 19 世纪以前，一直是将其化为微分方程去求解的. Dirichlet 原理可以认为是从反面考察变分问题与方程的关系的最早的例子之一. 它从极小化 Dirichlet 积分出发，求解 Laplace 方程. 但是直到 Poincaré (1887) 与 Hilbert (1898) 工作发表之前，这个极小函数的先验存在性却是不为正确推理所支持的，他们的工作不但证实了 Dirichlet 原理，而且使得由此产生的极小化序列方法，连同本世纪初意大利数学家 Tonelli 引进的关于泛函下半连续性的概念，延续到今天都是研究泛函极值问题的基本手段.

为了从泛函本身的性态判定出未必是极值点的临界点，极小化序列方法显然是无能为力的. 我们需要完全不同的方法. 因为主要依靠的是拓扑工具，所以这部分临界点理论又称为大范围变分法. 早在二、三十年代，M. Morse 与 Л. A. Люстерник, Л. Г. Шнирельман 就分别提出了两种联系紧流形上函数的临界点的行为与流形自身拓扑性质的理论. 通过这些联系，用流形自身的拓扑不变量可以估计出其上函数临界点的个数. 他们的这两个理论

已被成功地应用到变分学中的测地线问题中去. 然而,这些理论,在相当长时期内, 对更多的分析问题却难以应用; 相反地, Morse 理论成为微分拓扑的一个重要方面, 同时, Л. Ш. 的畴数理论也成了代数拓扑学的有兴趣的课题.

五十年代, M. A. Красносельский 与 M. M. Вайнберг 整理了 Л. Ш. 的工作,并对非线性积分方程进行了研究; 六十年代, R. S. Palais, S. Smale 又将 Morse 理论和 Л. Ш. 理论推广到无穷维流形上. 这些都为临界点理论广泛应用到分析问题作了必要的准备.

近十年来,变分理论又有重大的进展. 一方面前述理论更深入地应用到更多的微分方程问题,在方法上有了新的发展; 另一方面,由 A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz(1973)提出的山路引理(Mountain Pass lemma)又引出了一系列新的极小极大定理. 这些定理可以处理既无上界又无下界的泛函的变分问题. 在超线性椭圆边值问题、超线性弦振动的周期解问题以及 Hamilton 组的周期轨道问题的研究中,取得了很有意义的新结果.

在本书中,我们把临界点理论看成是变分学的一部分,这就决定了本书一方面要仔细地论述临界点的基本理论, 即用拓扑方法判定临界点的存在性并估计临界点的个数; 另一方面,又要利用抽象理论去解决具体的变分问题. 因此, 我们还要选择合适的泛函框架,并作细致的分析估算.

在内容的选择上,我们固然要介绍临界点理论的基本结果. 但却又偏重于近十几年来的进展. 因为这些材料至今仍分散在国内、外的文献资料之中,尚未加以整理.

本书第二章介绍求极值的变分理论, 侧重于求极值点的新的理论和方法. 包括凸分析与非光滑分析中的极值理论, 以及增添约束条件求极值的技巧. 对于应用, 我们则力求照顾到问题本身的兴趣和方法上的典型性两个方面.

第三章是以山路引理为中心的各种极小极大定理以及它们的应用, 在这一章, 我们用一种统一的极小极大原理系统地导出了文

献中出现的各种各样的这种类型的定理.

第四章介绍畴数与指标理论. 它们可以看成是 Л. Ш. 理论及其发展. 在此, 我们建立了无穷维流形上的有对称性的泛函的一种指标与伪指标理论. 并把 $\mathbb{Z}_2$ 群的指标——亏格和 S^1 群的几何指标作为这个一般指标理论的具体体现. 这一章还有许多在微分方程理论中应用的例子. 希望它们能够对提高分析学者的兴趣起一些作用.

第五章是 Morse 理论的无穷维陈述及其应用, 把 Morse 理论应用于微分方程的工作只是近几年的事, 这里有些材料, 例如 Arnold 猜测的解决等, 都是相当新的.

占全书 1/4 篇幅的第一章是准备知识——包括: Banach 空间的微分学、Finsler 流形、横截定理、拓扑度, 以及 Соболев 空间和它上面的微分算子. 这样安排是为了便于阅读. 即使如此, 本书也没能做到完全自封. 对于个别证明较长、或离题太远的定理, 我们仍不得不求救于其它参考文献. 然而, 对于已经熟悉了这部分内容的读者, 这一章完全可以跳过去, 而直接去看后面几章. 有的读者即使不完全熟悉这部分内容, 但若具有较好的数学训练, 也可以先从后面几章读起, 遇到有关的概念和定理时, 再翻到这章来.

本书虽有系统整理日益膨胀的文献资料的目的, 但却无囊括一切研究成果的企图. 这是因为临界点理论正在蓬勃发展, 其成果层出不穷, 面貌日新月异, 要想对它作全面总结显然是不可能的. 我们所要做的只能是抓住其中最本质的思想, 呈现一些重要结果. 为了帮助读者尽快地进入研究前沿, 书中吸取的材料有的刚刚刊出不久, 有的尚属首次发表. 每章之末附有参考文献介绍有意义的工作和进展.

临界点理论是由分析与拓扑结合而成的. 但是拓扑工具的使用目前尚处于萌芽状态. 随着对非线性问题研究的深入发展, 肯定会有更深奥的拓扑理论与更精密的分析方法结合的工作出现. 本书愿为此起抛砖引玉的作用.

这本书第三、四、五章的大部分材料，是根据作者在中国科学院数学研究所与北京大学联合举办的非线性分析讨论班上的讲稿改写而成的. 部分章节曾在国内外专业会议上报告过. 由于本书材料较新，编写过程中没有现成的书可以借鉴，许多证明又是作者重新给出的；因此疏漏错误必然不少，加之多次修改，仓促成书，前后脱节在所难免. 真诚地欢迎读者批评指正.

陈斌、刘嘉荃、张东同志阅读过本书初稿，提出了许多宝贵的修改意见，更正了不少错误. 最后又由浙江大学董光昌教授审阅了初稿. 作者在此对他们表示深切的感谢.

张 恭 庆

1983.12于北京大学中关园

目　录

第一章 准备知识

在微积分里，把求函数的极值，化归为求这函数的稳定点，即求其导数为零的点. 在变分法中，也是把求泛函的极值，化归到求这泛函的稳定点. 统一起来说，对于 Banach 空间上给定的函数，我们要求它“导数”为零的点. 如果再把函数限制在一个可微流形上，例如说，求约束极值问题，我们还要在无穷维流形上考察这函数的导数. 这一章是为以后几章作准备的.

首先，在§1介绍Banach空间上的微分学. 这部分内容现在已经有许多著作可供阅读. 为便于查阅，我们将罗列其中的基本内容，并简略地勾划出它们的证明. 已经熟悉了这些材料的读者，可以越过这节. §2介绍 Banach 流形的基本概念以及 Finsler 构造. 在这里我们不准备作详尽的讨论，只是为了第三章§1的需要而挑选出最必要的材料，如向量场和局部流的存在性，以及 Finsler 流形的可度量化问题.

大范围变分法是用代数拓扑的方法研究变分问题. 在后面几章经常要遇到流形的相交性质和从一个拓扑空间到另一个拓扑空间是否存在连续映射的问题. Brouwer 拓扑度和它的无穷维推广——Leray Schauder 度是这方面的一个有用的工具. 在§4我们从头建立这一理论，并介绍解析映射度的计算.

§3是关于横截概念和Sard定理的介绍. 引进这部分内容，一方面是为第四章 Morse 理论的需要；另一方面也是因为 Sard 定理与 Brouwer 度结合起来被用于证明 $\mathbb{Z}_2$ 群的以及 S^1 群的

Borsuk Ulam 定理. 而这些结果正是第三章的理论基础.

Соболев 空间是抽象泛函分析理论应用到偏微分算子问题中去的桥梁. 即便有了很好的泛函框架, 如不熟悉 Соболев 空间的性质, 也难以把它们应用到具体的微分方程中去. §5 是对 Соболев 空间及嵌入定理所作的一个快速的简略的介绍. 尽管有的地方不得不求助于其它参考书籍, 但通过这不多的几页, 读者当能领悟这部分内容的梗概.

§6 是三个典型的线性微分算子 $-\Delta$, $\Box$ 以及 $J\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 它们是在椭圆边值问题、半线性弦振动问题以及 Hamilton 组的周期解问题中经常遇到的.

§1 Banach 空间上的微分学

在这一节我们简短地回顾一下 Banach 空间之间的映射的连续性, 可微性, 以及微分学的基本事实. 由于这部分内容在近代数学中已经如此基本, 以致于读者可以从许多教科书上找到它们的详尽讨论和证明. 所以在这一节, 我们将满足于罗列基本的术语定义和定理.

以下设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间. $\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是一个映射.

1.1 非线性映射的有界性与连续性

定义 1.1 $\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 称为

在 $x_0\in\mathscr{X}$ *连续*, 指 $x_n\to x_0(\mathscr{X})\Rightarrow\mathbf{f}(x_n)\to\mathbf{f}(x_0)(\mathscr{Y})$;

在 $U\subset\mathscr{X}$ *连续*, 指 $\forall x_0\in U$, $\mathbf{f}$ 在 x_0 连续;

在 $U\subset\mathscr{X}$ *一致连续*, 指 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,

$$\|x-x'\|_{\mathscr{X}}<\delta\Rightarrow\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x')\|_{\mathscr{Y}}<\varepsilon.$$

定义 1.2 $\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 称为是

局部有界的, 指 $\forall x_0\in\mathscr{X}$, $\exists x_0$ 的一个邻域 $U(x_0)$ 使得

$$\sup\{\|\mathbf{f}(x)\|_{\mathscr{Y}}\,|\,x\in U(x_0)\}<+\infty;$$

有界的，指f映有界集为有界集.

当f是一个线性映射时，所有这五个概念是等价的. 然而在一般情况下，只有下列关系：

$$
\begin{tikzcd}
\text{连续} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, dashed, "\dim\mathscr{X}<+\infty"] & \text{局部有界} \arrow[d, Rightarrow, dashed, shift left, "\dim\mathscr{X}<+\infty"] \\
\text{一致连续} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{有界} \arrow[u, Rightarrow, shift left]
\end{tikzcd}
$$

图中虚线箭头是在条件：$\mathscr{X}$ 是有穷维的前提下成立的. 在一般的情形，这是不对的.

作为例子，我们考察下列复合函数算子：设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个可测集，$\mathbf{f}: \Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$. 定义

$$F: u(x)\mapsto \mathbf{f}(x, u(x)), \tag{1.1}$$

称为复合函数算子，又称为 Немыцкий 算子.

在对 Ω, $\mathbf{f}$ 适当添加条件后，我们来考察 F 在适当空间中的有界性和连续性. Немыцкий 算子在非线性分析中经常遇到.

1° 设 Ω 是一个紧集，而 $\mathbf{f}$ 是一个连续映射. 不难验证：F 是 $C(\Omega)$ 到自身的有界连续算子，其中 $C(\Omega)$ 是 Ω 上的连续函数空间.

2° 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个可测集，$\mathbf{f}$ 满足下列 Caratheodory 条件：

(1) 对 a. e. $x\in\Omega$, $t\mapsto\mathbf{f}(x, t)$ 是连续函数，

(2) $\forall t\in\mathbb{R}^1$, $x\mapsto\mathbf{f}(x, t)$ 是可测的.

因为有下列推广的 Лузин 定理：

$\mathbf{f}$ 满足 Caratheodory 条件

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists \text{ 可测集 } E\subset\Omega,\ \mathrm{mes}(E)<\varepsilon$$

$$\text{使得 } \mathbf{f} \text{ 在 } (\Omega\backslash E)\times\mathbb{R}^1 \text{ 上是连续的.}$$

(可以仿照实变函数论中 Лузин 定理的证明直接去证，也可参看 Вайнберг [Vai 1, p. 196～200])；所以对于满足 Caratheodory

条件的函数 $\mathbf{f}(x, t)$，只要 $u(x)$ 是可测函数，$\mathbf{f}(x, u(x))$ 就是可测的.

定理 1.1 设 $p_1, p_2 \geqslant 1$，又设有 $b \in L^{p_2}(\Omega)$ 以及常数 $a>0$，使得满足 Carathéodory 条件的函数 $\mathbf{f}$ 适合：

$$|\mathbf{f}(x, t)| \leqslant b(x)+a|t|^{\frac{p_1}{p_2}};$$

则(1.1)式中定义的 Немыцкий 算子是 $L^{p_1}(\Omega) \rightarrow L^{p_2}(\Omega)$ 的有界，连续算子.

证明 1° 有界性从 Minkowski 不等式立得：

$$\|Fu\|_{p_2} \leqslant \|b\|_{p_2}+a\|u\|_{p_1}^{\frac{p_1}{p_2}}. \tag{1.2}$$

2° 兹证连续性. 用反证法，倘若 F 不连续，则有 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{u_n\}_0^{\infty} \subset L^{p_1}$，使得

$$\|u_n-u_0\|_{p_1} \rightarrow 0,$$

$$\|Fu_n-Fu_0\|_{p_2} \geqslant \varepsilon_0.$$

记
$$f_n(x)=\mathbf{f}(x, u_n(x)),$$

$$g_n(x)=b(x)+a|u_n(x)|^{\frac{p_1}{p_2}}, \quad n=0, 1, 2, \cdots,$$

则可以抽出子列，仍记作 f_n，g_n 使得

$$f_n \rightarrow f_0 \quad \text{a. e.}, \tag{1.3}$$

$$g_n \rightarrow g_0 \quad \text{a. e.}, \tag{1.4}$$

$$|f_n| \leqslant g_n, \quad n=1, 2, \cdots.$$

由于
$$\left||u_n|^{p_1}-|u_0|^{p_1}\right| \leqslant |u_n|^{p_1}+|u_0|^{p_1},$$

按 Fatou 定理，

$$\int \varliminf\left[|u_n|^{p_1}+|u_0|^{p_1}-\left||u_n|^{p_1}-|u_0|^{p_1}\right|\right]$$

$$\leqslant \varliminf \int\left[|u_n|^{p_1}+|u_0|^{p_1}-\left||u_n|^{p_1}-|u_0|^{p_1}\right|\right],$$

即得
$$2\int|u_0|^{p_1} \leqslant 2\int|u_0|^{p_1}-\varlimsup \int\left||u_n|^{p_1}-|u_0|^{p_1}\right|.$$

所以有
$$\lim \int\left||u_n|^{p_1}-|u_0|^{p_1}\right|=0,$$

从而