# 极限的新概念

## 一元非标准分析初步

边均伯 张茂根编著

宇航出版社

# 极限的新概念

## ——一元非标准分析初步

边均伯　张茂根　编著

宇航出版社

## 内 容 简 介

本书提出了极限的新概念，即极限值为一个超实数的标准部，是国内未曾见有的非标准分析. 书中从鲁滨逊（A. Robinson）创立的非标准分析理论出发，广泛吸取了凯斯莱（H. J. keisler）等人编写的非标准分析教本的精华，其最大特点为直观、形象、通俗、易懂. 全书系统、清晰地介绍了超整数、实数、超实数、超有理数、极限、连续、微分、积分等微积分的初等理论. 书中有许多日常工作中的应用实例和习题，习题全部有答案或提示. 本书可作为大、中学校师生的参考书或教材，为他们实现教改提供途径，也可作为有高中文化程度的自学者的理想入门读物. 工程技术和经济管理人员通过学习本书也可对非标准分析理论及其数学模型有一基本了解，从而掌握这一基本数学工具为工程技术和经济管理服务.

**极限的新概念——一元非标准分析初步**

编 著 者：边均伯　张茂根

责任编辑：廖寿琪

宇航出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经销
杭州大学印刷厂印刷

☆

开本：787×1092 1/32　印张：21.375　字数：480千字
1988年10月第1版　第1次印刷　印数：10000册
标准书号：ISBN7—80034—093—7/G·027
定价：6.50元

# 前　言

随着微积分分析数学的形成、应用和发展，无穷小的概念广为传播，但任何两个不相同的实数之差决不能成为无穷小，即任何两个不相同的实数之间的距离决不能成为无穷小．这既是非标准分析对古典微积分的挑战，也是非标准分析的目的．300多年前，莱布尼兹的论点是：无穷小的理论和概念必然要引入一类假想的数，这类数不但包括无穷小而且又包括无穷大．当然这种无穷小和无穷大都是和实数相比较而存在的，并且这类数应该具有和实数相同的性质．但是莱布尼兹本人、莱布尼兹的同事和其追随者都没有能对这一伟大思想有所发展、有所前进，因而以无穷小为基础的分析理论渐渐从分析理论中消失，并且让极限理论占领微积分舞台．

经过以鲁滨逊为代表的数学家的努力，300多年前的莱布尼兹的伟大思想得到证实和发展，并且建立了和古典微积分相比完全是新奇的和新鲜的分析理论，即非标准分析理论，弥补了古典分析理论上的重大缺陷和不足．

传统的微积分以难度较大的极限为基础，而本书的非标准分析以更容易理解的无穷小为基础，把一个不必要的但又令人眼花缭乱的极限过程简化为一个超实数点上的“定点”分析，从而更深刻地揭示了微积分的本质．因而使中等程度水平的学生更能接受微积分的思想．以无穷小为基础的非标准

分析理论至少有三个优点．第一，直观性强，因为无穷小概念本身就是微积分的起源；第二，使极限、连续、导数、积分这些中心概念更容易被学生接受、理解和应用；第三，让学生们熟悉和掌握两种分析方法，实际上给他们增加了一种分析工具，而这种工具随时间的推移其重要性只会越来越强．

在古典微积分中，无穷小和无穷大是作为变量来定义的．而在非标准分析中，每一个无穷小都作为确定的超实数在超实数数轴上存在．同样，每一个无穷大的超实数也在超实数数轴上有其应有的“确定”的位置．这就使普通学生极易接受原来不易接受的极限思想，从而解决了极限难教、难讲、难懂、难学的问题．和有理数、无理数、虚数的引入一样，超实数的数学模型的产生使人类认识客观世界、了解客观世界、改造客观世界增加了一个锐利的思想武器．

有了超实数数系，大大简化了一系列数学证明的复杂性和繁琐性．例如，在微积分中最主要的二个中心概念为导数和定积分，在古典微积分中用极限来描绘导数和定积分，而在非标准分析中，导数和定积分都是一个超实数的标准部，即$\frac{dy}{dx}=\mathrm{st}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$，$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{st}\left[\sum_a^b f(x)dx\right]$，这就增加了运算的直观性．从而展示了以超实数为基础的非标准分析有巨大的优势和强大的生命力，所以人们认为非标准分析是本世纪最重大的数学进展之一．

本书中介绍的非标准分析，只要求有高中一年级的数学知识就可读懂，而不必要有高深的数学知识，因而为推广非标准分析创造了条件．同样，也为具有高中文化的在职职工继续深造、达到大专水平提供了速成数学教材．我们相信，广大大、中学校的数学、物理教师，广大的大、中学生，部

队军事院校、技术学校中的师生以及在职职工一定会喜欢学习非标准分析的方法，并掀起一个非标准分析"热".

最近,非标准分析理论在数学领域以外得到了广泛应用,并取得了许多鼓舞人心的成就，特别是在经济学和物理学方面. 超导理论和超导现象是对以无穷小为基础的超实数理论的有力支持. 正因为在实际的物理模型和社会经济模型中使用无穷小的超实数数学模型是十分自然的和方便的，因而其应用领域将会越来越广阔，并且越来越重要.

本书由浙江省物资学校数学讲师边均伯和浙江广播电视大学讲师张茂根合作编写，前半部分由边均伯执笔，后半部分由张茂根执笔. 二位作者在查阅翻译并消化了百万字的国外非标准分析资料的基础上，吸收了它们的长处，然后根据中国学生的特点，及多年教学经验编写了本书. 二位作者衷心感谢宇航出版社对本书的支持，使非标准分析理论得以和广大读者见面. 特别是廖寿琪、李明观、张国瑞同志，不但对书稿进行了精心的修改润色，而且与作者书信往返几十次，共同商讨最佳出书质量. 本书既凝结着他们辛勤耕耘的汗水，也凝结着他们的智慧.

此外杭州大学斯章梅、骆如峰,国家物资出版社李育仁、张亚明，浙江省物资局董服海、黄星安、孔繁华、王龙雨、王根海、吴乃斌，浙江科技出版社周伟元和杭州大清家用电器厂俞国迪等同志也曾给作者以支持和帮助. 浙江广播电视大学龚祥国为本书作了插图，谨在此向他们表示衷心感谢.

由于我们水平有限，加之时间仓促，书中难免存在不少问题和错误，谨请读者提出批评指正意见.

# 目　录

# 第一章　实数和超实数

## 1.1 实　　数

“数”是社会生活和科学技术不可缺少的工具．人类对数的认识经历了一个长期的过程，最初认识的是自然数，继而认识分数．数“0”被认为是一个数比分数要晚得多．尽管很早就根据记数的位置原则用“0”来表示某一数位是空位，但那时“0”只是作为表示“没有”的标记，并不认为它是一个数，真正把“0”看成数还是在研究负数的时候．我国是认识负数最早的国家，公元1世纪的《九章算术》就有了正负数的记载．在欧洲，直到17世纪，法国数学家提出了负数的几何表示法后，负数才得到承认．至于无理数在公元前500年左右，古希腊的数学家在线段的度量问题上就有所发现，然而直到19世纪随着微积分学的发现，人们才把它当作一个“真正的数”．16世纪，人们在解方程时引进了虚数，但它的被确立，也是在它的几何意义被发现、并在解决实际问题中得到了广泛的应用之后．

从数的发现历史看，新数的产生是交错的．但从大体上看，数的概念的发展基本上按照如下的顺序：

$$\text{自然数}\xrightarrow{\text{正分数}}\text{正有理数}\xrightarrow{\text{负数和零}}\text{有理数}\xrightarrow{\text{无理数}}$$

$$\text{实数}\xrightarrow{\text{虚数}}\text{复数}\xrightarrow{\text{无穷小}}\text{超实数}\longrightarrow\text{超复数}$$

数集的每一次扩大，都使得其内部构造逐步完善.

数集的扩大是为了适应实践的需要，是以实践为基础的. 实践主要来自二个方面：一是生产、生活的实践，如度量的需要等等. 二是进行数学运算的要求，不仅新数的引进是这样，就是新数集的有关法则与性质也无一不是现实世界中量和量相互之间联系的反映.

还要指出一点，随着科学技术的发展，人们对数的认识并没有到此结束.

到目前为止，我们已经学习了自然数集、有理数集、无理数集、实数集和复数集中的各种数。下面将复习和总结实数集，并在下一节提出超实数集的定义和性质.

我们将使用字母 $R$ 表示所有实数的集合. 众所周知，在直线上规定了原点、正方向和单位长度，就构成了实数轴. 在实数轴上，每一个点的位置都能用一个实数表示. 这个实数叫做这个点在数轴上的坐标，如图 1—1.

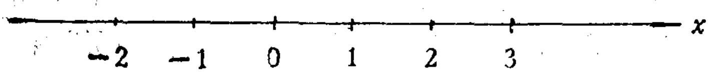


图 1—1　点在实数轴上的坐标

请千万不要被“实数”这一名字弄糊涂！实数体系是一个纯粹的数学模型. 这个模型可能给出也可能没有给出物质空间上的一条直线的精确形象. 事实是我们已经积累了关于中间尺寸（即不大不小尺寸）的直线段的丰富的感性知识，但对于物质空间中很长或很短的直线段却知道得很少. 另一方面，在实际应用中，实数轴和物质空间中的直线是非常相象的. 并且用实数集来分析问题往往比较方便. 所以在分

析空间中每一条实际存在的直线和直线段时，实数轴和实数集往往是很有用的数学模型.

那么什么是实数体系呢？回答这个问题的一种方法是从正的整数开始，一步一步地构造整数、有理数、无理数和实数.这是一个相当长的过程.最好把这个过程留给其它的数学课程来讨论.与这种方法相反，我们将简单明快地回答这个问题，方法是列出实数的一些性质.这些性质将作为基础知识来接受，在本书中我们称它们为公理.而我们所需要的其它性质将从公理出发获得证明.公理体系分成二组.第一组公理由本节给出.而第二组公理体系不仅包括实数，而且也涉及到超实数的新的数系.这第二组公理在以后几节中给出.

**A 实数的代数公理** (1)运算的封闭性：数 0 和 1 是实数；如果 $a$ 和 $b$ 都是实数，那么 $a+b$，$ab$，$-a$ 也是实数；当 $a\neq 0$ 时，$\frac{1}{a}$ 也是实数.

(2) 交换律成立：如果 $a$ 和 $b$ 都是实数，那么 $a+b=b+a$，$ab=ba$.

(3) 结合律成立：当 $a$、$b$、$c$ 为实数时，$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$ 成立.

(4) 同一律成立：当 $a$ 为实数时，$0+a=a$，$1\cdot a=a$.

(5) 逆元律成立：当 $a$ 为实数时，$a+(-a)=0$ 成立.当 $a\neq 0$ 时，$a\cdot\frac{1}{a}=1$ 成立.

(6) 分配律成立：如果 $a$、$b$、$c$ 为实数，那么 $a(b+c)=ab+ac$ 成立.

**定义** 正的整数是实数，且有 1，$2=1+1$，$3=1+1+1$，

$4=1+1+1+1$ 等等.

**B 实数的有序公理** (1) $0<1$ 成立.

(2) 传递律成立. 当 $a$、$b$、$c$ 为实数，而且 $a<b$, $b<c$, 那么 $a<c$.

(3) 三歧律成立：对于任意二个实数 $a$ 和 $b$，$a<b$, $a>b$, $a=b$ 这三种情况只有一种情况成立.

(4) 逆对称律成立：对于任意二个实数 $a$ 和 $b$，如果 $a<b$，那么有 $b>a$.

(5) 加法单调律成立：如果 $a$、$b$、$c$ 为三个实数，且 $a<b$，那么 $a+c<b+c$ 成立.

(6) 乘法单调律成立：如果 $a$、$b$、$c$ 为三个实数，而且 $c>0$, $a>b$, 那么 $ac>bc$.

(7) 根的存在性公理：对每一个大于零的实数 $a>0$，和每一个正整数 $n$，一定存在着一个实数 $b>0$，使 $b^n=a$ 成立.

**C 阿基米德公理** 对每一个实数 $a$，一定存在着一个正的整数 $n$，使 $a<n$ 成立. 换句话说，每一个实数 $a$ 总是小于一些有限个 1 的和，即 $a<\underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{\text{有限个 }1}$ 成立.

上面给出的公理并没有告诉我们所需要的关于实数的所有知识. 例如不能使用它们去证明 $\pi$ 是一个实数. 这是因为还有第二组公理没有在本节中给出.

但是无论如何，所有人们熟悉的称之为"初等代数"的所有事实都能够用上面的三个公理来证明. 我们的主要目的是讲述微积分，因而不准备花费时间用上面的公理来证明初等代数的事实. 恰恰相反，我们把掌握初等代数的有关知识作

为学习这一课程的必不可少的先决条件，并把大多数有用的代数公式列在本书最后的附录中.

阿基米德公理有时候也以下列形式给出，我们把它作为一个定理予以证明.

**定理** 设 $a$ 为一个正的实数，那么对一些正整数 $n$，$a>\frac{1}{n}$一定成立.

**证明** 因为 $a$ 为一个正的实数，所以$\frac{1}{a}$也是一个实数，由阿基米德公理，一定存在着正整数$n$，使 $\frac{1}{a}<n$ 成立. 二边同时取倒数，即有 $a>\frac{1}{n}$成立.

微积分主要是分析实数和实数函数. 下面通过分析一些实数集合的例子为我们的课程作准备. 一个实数集合$X$的意思是：集合$X$中的数具有某种相同的性质. 这些数也叫$X$的元素，或叫集合$X$中的点. 一种特别简单的集合类型是一个区间. 已知二个实数 $a$ 和 $b$ 且 $a<b$，那么区间 $[a,b]$ 定义为所有具有性质 $x\leqslant b$ 且 $x\geqslant a$ 的实数 $x$ 的集合（更简明的表示是$a\leqslant x\leqslant b$）.

开区间 $(a,b)$ 定义为所有性质为 $a<x<b$ 的实数 $x$ 的集合. 闭区间 $[a,b]$ 和开区间 $(a,b)$ 的说明见图 1—2.

不论是开区间 $(a,b)$ 和闭区间 $[a,b]$，实数 $a$ 都叫做区间的下端点，$b$ 叫做区间的上端点. 开区间 $(a,b)$ 和闭区间 $[a,b]$ 之间的差别是：点 $a$ 和点 $b$ 是闭区间 $[a,b]$ 中的元素，而不是开区间 $(a,b)$ 中的元素. 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$x$ 在

$a, b$ 之间. 当 $a<x<b$ 时，$x$ 严格地在 $a, b$ 之间.

(a)

(b)

图1—2　(a) 闭区间 $[a,b]$，(b) 开区间 $(a,b)$.

还有其他三种开区间：（一）集合 $(a, \infty)$，表示所有比 $a$ 大的实数 $x$ 的集合.（二）集合 $(-\infty, b)$，表示所有比 $b$ 小的实数 $x$ 的集合.（三）集合 $(-\infty, \infty)$，表示整个实数的集合. 记号"$\infty$"和"$-\infty$"分别读作"无穷大"和"负无穷大". 但"$\infty$"和"$-\infty$"并不代表任何一个实数. "$\infty$"指明一个区间无上端点，"$-\infty$"指明一个区间无下端点.

除了开区间和闭区间以外，还有其他类型的一些区间，叫做半开区间. 所有 $a \leqslant x<b$ 的实数 $x$ 的集合叫做半开区间，记作 $[a, b)$. 所有 $a \leqslant x$ 的实数 $x$ 的集合也是一个半开区间，记作 $[a, \infty)$. 表 1—1 给出各种类型的区间.

已知二个集合 $A$ 和 $B$，且集合 $A$ 中的每一个元素都是集合 $B$ 的元素（但集合 $B$ 可能有比 $A$ 更多的元素），那么集合 $A$ 叫做 $B$ 的一个子集. 例如开区间 $(a, b)$ 是闭区间 $[a, b]$ 的一个子集，一个闭区间 $[0, 1]$ 是另一个闭区间 $[0, 1.5]$ 的一个子集. 每一个集合 $A$ 是它自己的一个子集.

表 1—1 各种类型的区间

| 区间类型 | 记号 | 定义式 |
|---|---|---|
| 闭区间 | $[a,b]$ | $a\leqslant x\leqslant b$ |
| 开区间 | $(a,b)$ | $a<x<b$ |
| 开区间 | $(a,\infty)$ | $x>a$ |
| 开区间 | $(-\infty,b)$ | $x<b$ |
| 开区间 | $(-\infty,\infty)$ | $-\infty<x<\infty$ |
| 半开区间 | $[a,b)$ | $a\leqslant x<b$ |
| 半开区间 | $[a,\infty)$ | $a\leqslant x$ |
| 半开区间 | $(a,b]$ | $a<x\leqslant b$ |
| 半开区间 | $(-\infty,b]$ | $x\leqslant b$ |

这里还有二类集合，有界的和无界的集合．如果一个实数集合$A$是某一个闭区间$[a,b]$的子集，那么这个实数集合$A$是有界的．当一个实数集合$B$不能成为某一个实数闭区间$[a,b]$的子集时，那么这个实数集合$B$是无界的．下面我们举出一些有界的实数集合和无界的实数集合的例子，并作一说明．

有界集合的例子（已知$a$和$b$都是实数）：

(1) 闭区间$[a,b]$.

(2) 开区间$(a,b)$.

(3) 空集$\phi$（没有任何元素）．空集是任何一个实数

集合的子集.

(4) 由有限多个实数组成的集合$\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$.这个集合的元素仅仅是 $n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$. 如果把它们从小到大重新排列为 $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant a'_3 \leqslant \cdots\cdots \leqslant a'_n$，那么集合 $\{a'_1, a'_2 \cdots\cdots, a'_n\}$ 是闭区间 $[a'_1, a'_n]$ 的一个子集.

(5) 集合$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots\right\}$和集合$\left\{1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \cdots\cdots\right\}$都是闭区间 $[0, 1]$ 的一个子集.

无界集合的例子：

(1) 所有正实数的集合，即开区间 $(0, \infty)$.

(2) 非零实数的集合，即 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(3) 所有实数的集合 $(-\infty, \infty)$.

(4) 所有正整数的集合 $N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$.

这个集合是无界的，因为由阿基米德公理，对于任何一个实数 $a$，在集合 $N$ 中一定有一个整数 $n$，使 $n > a$ 成立.

(5) 集合$\{1^2, 2^2, 3^2, \cdots\cdots\}$，$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots\cdots\}$等都是无界的.

(6) 形如 $(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$，$(a, \infty)$，$[a, \infty)$ 的集合是无界集合.

实数集合还可以分为有限集和无限集. 如果一个集合 $A$ 的元素只有有限个，则称 $A$ 是有限集. 例如实数集合 $\{1, 0, -1\}$和 $\{2, 4, 6\}$ 为有限集. 如果一个集合 $B$ 中的元素有无穷多个，那么集合 $B$ 就是无限集. 如开区间 $(0, 7)$，整数集 $\{\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\cdots\cdots\}$ 等都是无限集.

最后介绍邻域的概念.

设 $a$ 和 $\delta$ 是两个实数，且 $\delta > 0$.满足不等式 $|x-a| < \delta$的一切实数 $x$ 的全体称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域. 点 $a$ 称为这邻域的中