边界单元法基础

严　更　丁方明　编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

边界单元法是近年来迅速发展的一种数值计算方法。由于它具有应用简便，精度较高，能降低问题的维数等优点，因而引起工程技术人员和科学工作者的关注，并在工程技术上得到广泛的应用。

本书主要介绍了应用边界单元法的一些基本知识，其中有张量初步、基本解、位势向题和弹性力学问题的边界积分方程解法（包括间接法和直接法）、数值方法和程序设计等内容，是目前国内学习边界单元法的一本入门书。

本书可作为高等院校计算力学、固体力学、岩石力学、流体力学、物理学等有关专业的高年级本科生或研究生选修课用教材，也可供从事数值计算的力学工作者和工程技术人员自学参考。

边界单元法基础

严 更 丁方明 编著

责任编辑：汪子和

*

重庆大学出版社出版

新华书店重庆发行所发行

重庆大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.25 字数：160千

1986年8月第一版 1986年8月第一次印刷

印数：1—1500

统一书号：13408·2 定价：1.30元

序　言

边界单元法作为一种新的有突出优点的数值计算技术正在引起国内外越来越多的工程技术人员和科学工作者的兴趣和注意。不少人迫切希望了解和掌握这门技术，以便解决实际工程中的各种问题。近年来随着边界元法技术的迅速发展，有关论著也逐渐增多，但总的说来，国内系统介绍边界元的书还比较少。为了普及和推广这门新技术，使想要在这方面从事研究和应用的人能较快地熟悉和掌握这种方法，更好地促进对边界元法的深入研究和对边界元法的广泛应用，我们编写了《边界单元法基础》这本书。

本书是一本学习边界单元法的入门书，着重介绍了边界单元法的一些最基本的知识。全书共分六章。第一章是绪论。第二章和第三章是一些预备知识，主要介绍矢量和张量以及在边界元法中起重要作用的基本解的概念。这些内容在工科院校中一般是没有学过的，但在阅读本书和其它边界元著作时又是必然会遇到的。第四章论述了解位势问题的边界单元间接法和直接法，同时介绍了与此密切有关的位理论等问题。通过本章的学习，读者可以对边界单元法解偏微分方程定解问题的基本思想有一个初步的了解。第五章主要论述了解弹性力学问题的边界单元法。在这一章中为了便于读者阅读，首先利用第二章的知识，将目前国内多数弹性力学著作中有关公式变换成指标符号的形式，以便于在论述边界单元法时可简明书写，方便运算。然后利用经典弹性力学中的一些基本概念，如Kelvin 问题的解，线性叠加原理，Betti 互换定理，Somigliana公式等，分别论述了间接法和直接法解弹性力学

问题的基本思想和具体做法。在阅读这一章后，读者可以对边界单元法解偏微分方程定解问题的基本思想有更进一步的了解。第六章是数值方法部分。在这一章中首先介绍了二维和三维问题中的各种类型的边界单元和单元插值函数，然后分别论述了边界单元间接法和边界单元直接法的具体做法，其中包括当分别采用常数单元和一般高次单元时，如何将一个边界积分方程的求解问题转化为一个线性代数方程组的求解问题，角点的处理方法，对称性的利用以及内点物理量的计算等问题。最后，简单介绍了边界单元间接法和直接法的程序设计和若干算例。

为了使初次接触边界元的读者对边界单元法的基本思想有一个较清楚的了解，能比较容易地理解和掌握这门新技术，笔者在论述中力求做到由浅入深，由简到繁。对于所涉及到的一般工科院校未学过的数学知识，在本书中也作了简单介绍。

本书是在1983年为我院教学需要而编写的《边界单元法基础》讲义的基础上经过修改补充而成的。在编写过程中得到重庆建筑工程学院原副院长乐怡然，教授朱可善、丁得忠，副教授汪礼顺、刘传义、肖明心、欧茂材、祝家麟等许多同志的指教、帮助和鼓励。特别是祝家麟同志对全书进行了认真细致的审阅，提出了不少宝贵的意见。在此谨向他们表示衷心的感谢。笔者还要衷心感谢重庆建筑工程学院的各级领导对本书出版给予的大力帮助和支持。

由于笔者水平有限，书中可能有不少不妥之处甚至错误，敬请读者批评指正。

严　更　丁方明

1985年7月于重庆建筑工程学院

目　录

第一章　绪论

§1　有限元与边界元

在工程技术和科学研究中常常会遇到大量的偏微分方程和偏微分方程组的问题，这些方程描述了某一类物理和力学现象的普遍规律。

例如，在热传导问题中，就会遇到热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

式中，u 为温度，$a^2=\dfrac{k}{C\rho}$，k 为热传导系数，C为比热，ρ为密度，均为常数。

对稳定热传导问题，则为Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

又如在弹性静力学中，会遇到Navier方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0$$

这些微分方程的求解不仅依赖于方程，而且必须考虑被

研究对象所处的外界状况及起始状况，即所谓定解条件，包括边界条件和初始条件。而方程加上定解条件就构成定解问题。显然，不同的定解条件（如不同的初始条件或边界条件），定解问题的解是不同的。

定解问题的求解一般有两类方法：解析解法和数值解法。解析解法所求得的解是一个数学表达式，它给出所要求的未知物理量在所研究区域中任意一点处的数值，因而对于该区域中无限个点都是成立的。而数值解法一般需将所研究的问题离散化，得到的解仅是所研究区域中离散点处的未知量的近似值。

在数学物理方程中已经系统地研究并给出了偏微分方程定解问题的解析解法。然而，解析解法一般只适用于物体几何形状较规则、物性较均匀、边界条件和初始条件比较简单的问题。对于实际工程和科研中存在的大量物性不均匀、物体几何形状不规则、边界条件和初始条件较复杂的问题，从目前看来，用解析解法求解是比较困难的。这就需要研究它的数值解法，以求出近似解。

随着电子数字计算机的出现和发展，偏微分方程定解问题的数值解法无论在解决问题的精度上还是在经济效益上，都有很大的改进和发展，从而使它在解决实际工程问题和科研问题中起着越来越大的作用。

从目前看，在现有的解偏微分方程定解问题的数值计算方法中，有限单元法是工程中应用最广泛最有效的方法之一。

有限单元法是以变分原理和剖分插值为基础的方法。它有很多优点，特别适用于工程实际中经常遇到的不规则几何形状和复杂定解条件的问题。它可以处理具有各种复杂材料

性质的物体，如各向异性、非线性、随时间变化或随温度变化的材料等的问题。

此外，由于有限单元法的解题步骤已经系统化、标准化，并且有相当数量灵活通用的计算机程序，所以有限元法从1960年开始实现计算机化以来，发展迅速，到七十年代已达到了成熟的高峰。它不仅广泛地应用于结构力学，而且还应用到其它许多领域，如流体力学、电磁物理学、核工程学等领域。

但是，从目前看来，有限单元法也还有它的不足之处，主要是：

1. 需要将整个所研究区域离散化。这样，一方面数据准备工作量较大，尤其对三维问题，分割连续体相当繁琐、复杂，费时，效率低，原始数据易出错，另一方面对整个连续体离散化，带来单元个数较多、总体刚度矩阵阶数较高，需要使用存储量较大的计算机和较长的计算时间。

2. 不能保证整个区域内某些物理量（如应力、应变）的连续性，区域上所有节点处的有关量值（如节点位移）不论是否需要，都要计算，因而浪费计算时间。

3. 对某些问题，如无限域问题、应力集中问题等，不易精确处理，计算结果也不能令人满意。

上述这些缺陷影响了有限单元法的计算精度和实际应用范围，尤其在我国目前中小型计算机占多数的情况下，有限单元法在实际应用上尚有一些困难。

近年来，新发展起来的一种解偏微分方程定解问题的数值计算方法——边界单元法，正好弥补了有限单元法的上述不足之处。这种方法的主要特点是：

1. 将问题的维数降低，只需要将所研究区域的边界离

散化。从而使原始数据准备简单、工作量小，尤其对三维问题，省事、直观、方便，方程组的阶数也比较低。

2. 由于只对边界离散，离散化误差仅仅来源于边界。区域内有关物理量是用精确的解析公式计算的，从而提高了结果的计算精度。

3. 可以只计算区域内所需要的任意指定点处的有关物理量，避免了不必要的计算，节省了计算工作量。

4. 对无限域、应力集中等问题特别适用，也易于处理。

例如，无限大板中一圆孔，求其在无限远处沿 x 轴方向受均匀分布拉力（ $q = 1$ ）作用下，孔边应力的问题（见图1-1）。

对此问题，我们用有限单元法求解。若用三角形单元解弹性力学平面问题程序计算，首先要准备数据。其步骤如下：由于问题对称，仅在第一象限中考虑。

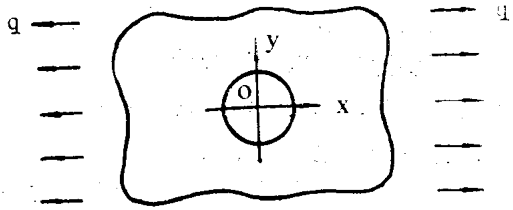


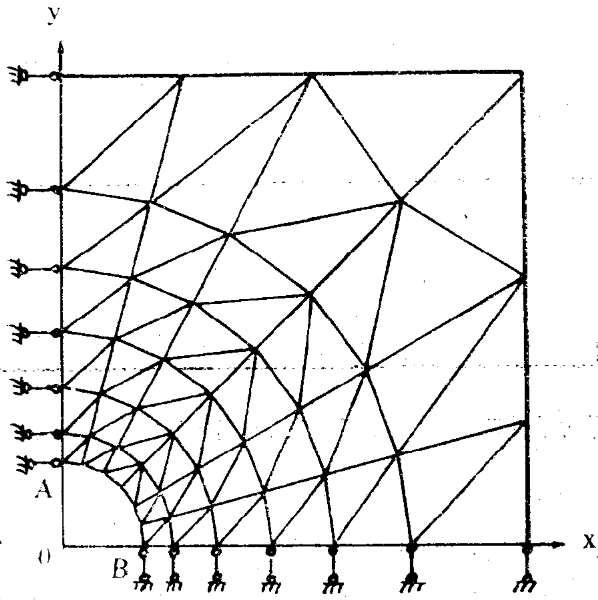
图 1—1

1） 估计外边界，确定计算区域。

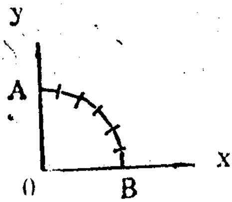
2） 在计算区域内划分单元，并给出单元和结点编号。

3） 给出结点坐标数组。

4） 给出单元结点码数组。



(a)



(b)

图 1—2

5） 把边界力转化为结点力，给出结点荷载数组。

6） 由于利用对称性，所以在x和y轴上结点处附加支承，给出结点支承数组。

用边界单元法计算，准备数据不需要估计外边界，只需要将它在第一象限的边界部分划分单元，给出边界单元坐标和单元边界条件即可。

图1-2(a)、(b)分别给出了上述问题的有限元剖分和边

界元剖分情况。这里有限元单元为74个，边界元单元为7个。

表1给出了对上述剖分，两种方法计算圆孔孔口应力σ_θ/q的结果比较情况。

表 1

点	有限元结果	边界元结果	解析解
A	① 2.2924 ② 2.8336	3.0046	3
B	① −0.5123 ② −1.2649	−0.9547	−1

注①为采用绕结点平均法得到的结果；

②为采用二单元平均法后，先环向抛物线推算，再径向抛物线推算后的结果。

边界元结果为直接计算结果。

从上例可见，边界单元法所用的单元数比有限元少得多，原始数据、准备工作量也小得多（上例中有限元准备数据用了约几个小时，而边界元只用几分钟），而其计算结果精度却比有限元高得多。

使用方便，精度高，这是边界元法的突出特点，也是它的优点。正是由于这些优点使边界单元法逐渐成为一种重要的数值计算方法。

然而边界单元法也不是十全十美的，也有它的不足之处。例如一般边界元法得到的线性代数方程组的系数矩阵是一个满的、不对称矩阵，这就不便于应用目前在有限元中已成熟的对稀疏对称矩阵的线性代数方程组的一系列解法。此外，应用边界单元法必须事先知道所求问题的控制微分方程的基本解，但从目前看，非线性问题的基本解的求得还是比较困难的，这就影响了边界元的应用范围。所以，现在不少科

学工作者和工程技术人员正在研究将边界元与有限元法结合，取长补短，以解决一些较复杂的问题。

§2 间接法与直接法

边界单元法是一种积分方法。它是将偏微分方程的定解问题化为边界积分方程来求解，所以在有的文献中又称为边界积分方程法。边界单元法的名称来源于英国的Southampton大学。严格地说，边界单元法实际上指的是求解相应偏微分方程定解问题的边界积分方程的一种数值解法，即将边界剖分插值后，将边界积分方程化为一个线性代数方程组来求解的方法。但是现在我们所说的边界单元法实际上指的是边界积分方程法及其数值解法——边界单元法。

一般根据积分方程的形成方式和积分方程中未知函数的性质，边界单元法又可以分为边界单元间接法和边界单元直接法，或简称为间接法和直接法。

间接法又称虚拟密度法。在间接法中，首先假设所研究的区域被置于一个与该区域相同物性的无限域中，且在该区域中满足微分方程的所求未知量是由该区域边界上分布的一个虚拟"源"的作用所产生的，然后在所讨论的偏微分方程满足线性叠加原理的基础上，利用该微分方程的一个基本解把边界上虚拟连续分布"源"作用用无数个集中分布源作用的叠加来表示，且要求该"源"的分布状况和大小必须使得区域边界上的真实的已知边界条件被满足，从而建立起边界积分方程。在此积分方程中，未知函数是边界上虚拟"源"的密度函数，它们本身没有客观实在的物理意义。但是，一旦它们被确定，就可以利用虚拟"源"的密度函数与所求物

理量之间的关系求得该物理量在所研究区域上任意点处的值。

由于所求的未知物理量不是直接由求解边界积分方程所得到的，而是间接地通过边界上虚拟的密度函数求得的，所以称为间接法。

在直接法中，边界积分方程的获得同样要利用相应微分方程的一个基本解。与间接法不同的是这里要用到一个互易关系来建立区域内物理量与边界上物理量之间的关系，然后由此关系导出边界积分方程。在此积分方程中，未知函数是边界上客观实在的物理量，它们具有明确的物理意义，例如边界位移、面力、温度等等。一旦这些未知函数被确定，所求物理量在区域内任意点上的值可以利用区域内物理量与边界上物理量之间的关系，由边界值求出。

由于在求解边界积分方程后，可以直接得到边界上所求的物理量，所以称为直接法。

一般说来，间接法比较简单，方便，计算工作量比较小。缺点是假设的边界上虚拟分布的“源”没有客观实在的物理意义。但近年来也有人开始在研究克服此缺点的途径。

而直接法中的的未知函数具有明确的物理意义，可以通过求解边界积分方程直接得到边界上客观实在的物理量。但是计算公式较间接法复杂、麻烦。

§3　边界单元法发展简述

边界元法既可以说是一种新方法，又可以说是一种老方法。说它是新方法是指边界元法作为一种解决工程问题的有效数值计算方法，还仅仅只有十来年的历史；说它是老方法

是指它的基本思想，即关于用积分方法解微分方程的思想可以追溯到本世纪初。早在1905年，Fredholm 就对积分方程的分类作了研究，并首先将其应用于弹性力学问题。从那以后，许多人对积分方程的性质作了严格的数学探讨。但是一直到40年代末，除一些特殊的问题，如第一边值问题等外，弹性静力学边值问题的积分方程解法还没有被完整地研究过。

50年代后，一些学者如苏联Mikhlin、Muskhelishvili等对积分方程尤其是奇异积分方程的理论作了更深入的研究，为进一步应用边界积分方程法开辟了道路。

1963年Jaswon、Symm 等人研究了位问题的边界积分方程间接解法，并用电子计算机计算了一些二维的位问题。

1967年Rizzo利用位理论与经典弹性力学的相似性，全面地考虑并给出了关于弹性力学平面问题的第一、二、三类边值问题的统一的积分方程直接解法和数值方法，并用电子计算机分析了一些简单的弹性力学平面问题。

1968年Cruse和Rizzo开始将直接法应用于解弹性动力学问题。

1969年Cruse给出了三维弹性静力学问题的积分方程数值解。

1971年Cruse开始在断裂力学中应用边界积分方程法。同年Swedlow和Cruse又将该方程开始应用到塑性力学中。

1972年Butterfield和Tomlin研究了各向异性问题的积分方法。

1978年Brebbia在其著作《The Boundary Element Method for Engineers》一文中首次使用“边界单元法”这个术语，并研究了边界单元法与其它数值计算方法之间的