21世纪高等院校选用教材

非数学专业

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

# 数学物理方程

哈尔滨工业大学数学系　组编

谢鸿政　杨枫林　编

2

科学出版社

21世纪高等院校选用教材(非数学专业)

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

# 数学物理方程

哈尔滨工业大学数学系　组编
谢鸿政　杨枫林　编

科学出版社

2001

## 内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系，根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一.

本书主要内容为数学物理方程相关的背景，偏微分方程的基本概念，数学模型的建立与定解问题，特征线积分法，傅里叶级数理论，分离变量法，本征值问题，椭圆型方程边值问题，高维问题，δ 函数与格林函数法，积分变换法等. 书中重点介绍了定解问题的各种基本解法，突出了应用性.

本书可作为工科各专业本科生、研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

数学物理方程/谢鸿政，杨枫林编. -北京：科学出版社，2001
(21 世纪高等院校选用教材(非数学专业))
ISBN 7-03-009549-9

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①谢… ②杨… Ⅲ. 数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039772 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2001 年 8 月第一次印刷 印张：20 1/2
印数：1—6 000 字数：366 000

**定价：28.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

# 前　言

现代科学技术的发展,使得以物理学、力学、化学等自然科学和工程技术中的问题作为主要研究对象的数学物理方程在理论和应用两方面的内容愈加丰富,并因此而不断加强其同数学其他分支的广泛、深入的联系和相互渗透,从而促进了数学科学的发展.

为适应新世纪大学教改的发展,依据工科专业的特点和要求,我们在修改原有教材的基础上,适当吸取了国内外相关教材的长处,编写出这部更加突出应用性的教学参考书.

本书主要根据各种基本定解问题及其相关解法展开讨论.在介绍有关基本概念、基本原理的同时,重点阐述解偏微分方程定解问题的重要方法和技巧.全书共十一章:第一章绪论,介绍数学物理方程有关的背景和偏微分方程的基本概念.第二章描述相应于一些物理现象的典型数学模型的建立及基本的定解问题.第三章叙述了两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类、化简与标准型及求部分简单方程通解的方法.第四章介绍了主要用于求解双曲型方程有关问题的特征线积分法.第五章较详细地介绍了作为辅助材料与其后三章有密切联系的傅里叶级数理论(本章可略去不讲).第六章与第七章详细介绍了应用十分广泛的含边界条件的分离变量解法和相关的本征值问题与特殊函数,以及常微分方程边值问题的格林函数解法.第八章介绍了椭圆型方程的边值问题和极值原理.第九章讨论了更复杂的高维边值问题与本征函数法.第十章介绍了与解偏微分方程边值问题相关的格林函数的概念、构造和应用.第十一章介绍了傅里叶积分变换和拉普拉斯积分变换的有关概念、性质和对求解偏微分方程无界区域定解问题的应用.

对于上述内容,教师可依教学的具体情况适当加以选取.由于编者水平所限,不妥之处在所难免,希望读者指正.

编　者

2001 年 2 月

# 目　　录

# 第一章 绪 论

## 1.1 引 言

数学物理方程(简称数理方程)是指在物理学、力学等自然科学及工程技术中所提出的偏微分方程(有时也包含某些常微分方程、积分方程及微分积分方程).它是数学物理研究的基本内容.

早期建立的数学物理方程有根据牛顿引力理论而推导出的描述引力势的拉普拉斯方程和泊松方程.在连续介质力学中,从质量、动量、能量守恒定律出发,建立了流体力学中的纳维-斯托克斯方程组(有黏性)和欧拉方程组(无黏性)以及弹性力学中的圣维南方程组等.另外,像描述波的传播的波动方程;描述传热和扩散现象的热传导方程都是古典的数学物理方程.

自 19 世纪开始,相继出现了大量新的数学物理方程,其中最基本的有描述电磁场变化的麦克斯韦方程组,描述微观粒子的薛定谔方程,广义相对论中确定引力场的爱因斯坦方程和在基本粒子研究中有重大作用的杨-米尔斯方程等.人们在研究光辐射、中子迁移以及气体分子运动的过程中,推导出了辐射迁移方程,中子迁移方程和玻尔兹曼方程,它们都是微分积分方程.在进一步研究带电粒子在磁场中的运动时,建立了流体力学方程的耦合.而研究具有扩散现象的化学反应导致了反应扩散方程(是偏微分方程组)的建立.

对于建立的数学物理方程,需要作出各种附有具体条件而构成典型问题的解,然后根据实际测量结果来检验和修正相应的物理理论.通过求解数理方程,使人们对自然现象获得更加深刻的认识,并能预见新的现象.

数学物理方程中有许多是线性方程,与其对应的已经给出很多求准确解的方法,如特征线方法、分离变量法、格林函数法、积分变换法及复变函数法等.解有时能用各种初等函数和超越的特殊函数来表示,但这些仅限于少数较特殊的情况.更多的数学物理方程是非线性方程或方程组,其求解方法一般都很复杂,且只有少数问题有精确解.而得到准确解的有效方法之一是利用问题的对称性,例如球对称性、轴对称性与相似性(量纲分析)等来求解,这可以减少自变数(或降低维数),进而化为常微分方程去求特解.对于大量的不能获取准确解的问题,通常设法求出近似解,例如摄动法就是一个重要方法.而伴随电子计算机迅速发展起来的差分法与有限元法等数值解法是求解数学物理方

程的十分有效的方法.近年来,与孤立子、杨-米尔斯方程等近代理论的研究密切相联,正在发展求解非线性方程的新方法.

随着现代科学和技术的进步,将会不断涌现新的数学物理方程,而其产生和应用的范围已经并且更多地超出了传统的物理学、力学、天文学等领域.例如,在化学、生命科学、经济学等自然科学和社会科学各个领域,以及在资源勘探与开发、大型建筑与水利工程、金属冶炼工程、通信工程、新能源开发、大气物理、气象预报、航天工程、遥感技术、控制与识别、医疗诊断与材料无损探伤、遗传工程等极广泛的工程技术各个领域都涉及到数学物理方程的理论问题及其重要应用.

## 1.2　基本概念和定义

当一个微分方程除了含有几个自变量和未知函数外,还含有未知函数的一个或多个偏导数时,称为*偏微分方程*.一般说来,它可以写成包含几个自变量 $x,y,\cdots$ 和这些变量的未知函数 $u$ 及其偏导数 $u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},\cdots$ 的方程的形式

$$f(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},\cdots)=0, \tag{1.2.1}$$

这里,方程(1.2.1)是在自变量 $x,y,\cdots$ 的 $n$ 维空间 $R^n$ 中的一个适当的区域 $D$ 内进行考察的.我们要求能找出在 $D$ 内恒满足方程(1.2.1)的那些函数 $u=u(x,y,\cdots)$.如果这种函数存在,那么称它们为方程(1.2.1)的解.从这些可能的解中,我们要选出一个满足某些合适的附加条件的特解来.

例如,

$$\begin{aligned} &uu_{xy}+u_x=y,\\ &u_{xx}+2yu_{xy}+3xu_{yy}=4\sin x,\\ &(u_x)^2+(u_y)^2=1,\\ &u_{xx}-u_{yy}=0 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

都是偏微分方程.容易验证下列两个函数:

$$u(x,y)=(x+y)^3,$$
$$u(x,y)=\sin(x-y)$$

都是(1.2.2)的最后一个方程的解.

出现在方程中的未知函数的偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶.例如,方程

$$u_{xx}+2xu_{xy}+u_{yy}=e^y$$

是一个二阶偏微分方程,而方程

$$u_{xxy} + xu_{yy} + 8u = 7y$$

是一个三阶偏微分方程.

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的所有偏导数来说都是线性的,且方程中的系数都仅依赖于自变量,那么这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程.如果一个偏微分方程对未知函数的最高阶导数来说是线性的,那么就称为拟线性偏微分方程.例如,方程

$$yu_{xx} + 2xyu_{yy} + u = 1$$

是一个二阶线性偏微分方程,而方程

$$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y$$

是一个二阶拟线性偏微分方程.一个偏微分方程不是线性方程,就称为非线性偏微分方程.

在本书中,我们将主要研究二阶线性偏微分方程,因为它们在数学物理问题中经常出现.最一般的 $n$ 个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G, \tag{1.2.3}$$

其中不失一般性,可假设 $A_{ij} = A_{ji}$,且可假设 $A_{ij}, B_i, F$ 和 $G$ 都是 $n$ 个自变量 $x_i$ 的函数.

如果 $G$ 恒等于零,方程称为齐次方程;否则方程就称为非齐次方程.

$n$ 阶常微分方程的通解是依赖于 $n$ 个任意常数的一族函数.就偏微分方程来说,它的通解将依赖于任意函数而不是任意常数.为了说明这件事,我们考察二阶方程

$$u_{xy} = 0.$$

如果我们把这个方程对 $y$ 积分,而把 $x$ 认为是固定的,就得到

$$u_x(x,y) = f(x).$$

再把 $y$ 认为是固定的,对 $x$ 求第二次积分,得

$$u(x,y) = g(x) + h(y),$$

其中 $g(x)$ 和 $h(y)$ 都是任意函数.

假定 $u$ 是三个变量 $x, y$ 和 $z$ 的函数,那么对于方程

$$u_{yy} = 2,$$

我们可以得到通解

$$u(x,y,z) = y^2 + yf(x,z) + g(x,z),$$

其中 $f$ 和 $g$ 都是两个变量 $x$ 与 $z$ 的任意函数.

我们回想在常微分方程情况下，首先的任务是确定一个通解，然后根据给定的条件求出任意常数的值来确定特解．但是，对偏微分方程来说，从偏微分方程的通解中选出满足附加条件的一个特解，可能和求通解一样困难，甚至比求通解更困难．这是因为在偏微分方程的通解中含有任意函数；我们要从通解中确定满足附加条件的特解，不是仅仅要确定任意常数，而是要确定这些任意函数．

对于 $n$ 阶线性齐次常微分方程来说，$n$ 个线性无关的解的线性组合仍是一个解．不幸的是就偏微分方程来说，这样的结论一般是不成立的．这是由于每一个线性齐次偏微分方程的解空间是无限维的函数空间．例如，偏微分方程

$$u_x - u_y = 0 \tag{1.2.4}$$

经过变量变换

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \end{cases}$$

能化成方程

$$2u_\eta = 0,$$

它的通解是

$$u(x,y) = f(x+y),$$

其中 $f$ 是处处可微的任意函数．由此可见下列函数：

$$\left.\begin{array}{l} (x+y)^n, \\ \sin n(x+y), \\ \cos n(x+y), \\ \exp n(x+y) \end{array}\right. \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

中的每一个函数都是方程(1.2.4)的一个解，而且这些函数显然是线性无关的．像方程(1.2.4)这样一个简单的方程就有无限多个解，它们的线性组合是否为解是要进一步加以讨论的．因此在研究偏微分方程时，必须克服这种困难．于是，我们一般宁愿直接来确定满足给定的附加条件的特解．

## 1.3　线性算子

本节将简单地讨论在偏微分方程的理论中经常遇到的线性算子．

算子是一种数学法则，把它作用在一个函数上时，便产生另外一个函数．例如，在下列表达式中：

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

$$M[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$L=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3}{\partial y^3}$与 $M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$都称为微分算子.也有一些其他类型的算子,例如

$$P[u]=\int_a^b u(x,\tau)F(\tau,y)\mathrm{d}\tau,\quad a,b\text{ 都是常数},$$

$$Q[u]=u(x,c)+u_x(x,c),\quad c\text{ 是常数},$$

其中算子 $P$ 是一个积分算子,而算子 $Q$ 是一个把两个自变量 $x$ 和 $y$ 的函数 $u$ 变为一个自变量 $x$ 的函数 $Q[u]$的算子.

两个微分算子称为是等价的,是指把每一个算子作用在函数 $u$ 上时,会产生同样的结果,记为 $A=B$.此时对函数 $n$ 有

$$A[u]=B[u],\tag{1.3.1}$$

其中 $u$ 必须是充分可微的函数.

两个微分算子的和定义为

$$(A+B)[u]=A[u]+B[u],\tag{1.3.2}$$

其中 $u$ 为函数.

两个算子 $A$ 与$B$ 的积是这样一个算子,它作用于函数 $u$ 的结果与算子$A$ 及 $B$ 依次作用在$u$ 上的结果是相同的,即

$$AB[u]=A(B[u]).\tag{1.3.3}$$

微分算子满足下列定律:

(1)加法交换律:

$$A+B=B+A;\tag{1.3.4}$$

(2)加法结合律:

$$(A+B)+C=A+(B+C);\tag{1.3.5}$$

(3)乘法结合律:

$$(AB)C=A(BC);\tag{1.3.6}$$

(4)乘法对加法的分配律:

$$A(B+C)=AB+AC;\tag{1.3.7}$$

(5)乘法交换律:

$$AB=BA,\tag{1.3.8}$$

但乘法交换律仅对常系数微分算子成立.

【例 1.2.1】 设 $A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y},\quad B=\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y}$,

因而

$$B[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$AB[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}-y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$BA[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}-y\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

于是,当 $x\neq 0$ 时,$AB[u]\neq BA[u]$.

我们定义具有下列性质的算子为线性算子:

(1)常数 $c$ 可以从算子中提取出来:

$$L[cu]=cL[u].$$

(2)算子作用于两个函数之和所得的结果等于算子分别作用于两个函数所得结果之和:

$$L[u+v]=L[u]+L[v].$$

性质(1)与(2)可以组合起来表示为

$$L[au+bv]=aL[u]+bL[v],\tag{1.3.9}$$

其中 $a$ 与 $b$ 都是常数.

现在让我们来考察二阶线性偏微分方程.就两个自变量来说,这种方程的形式为

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x$$
$$+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y),\tag{1.3.10}$$

其中系数 $A,B,C,D,E,F$ 都是变量 $x$ 与 $y$ 的函数,$G(x,y)$是非齐次项.

如果取线性微分算子 $L$ 为

$$L=A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D\frac{\partial}{\partial x}+E\frac{\partial}{\partial y}+F,$$

那么偏微分方程(1.3.10)可以写成下列形式:

$$L[u]=G.\tag{1.3.11}$$

我们经常略去方括号,把上式简写为

$$Lu=G.$$

## 习　　题

1. 对于下列各偏微分方程,试确定它是线性的、拟线性的还是非线性的.如果是线性

的,说明它是齐次的还是非齐次的,并确定它的阶:

(a) $u_{xx}+xu_y=y$;

(b) $uu_x-2xyu_y=0$;

(c) $u_x^2+uu_y=1$;

(d) $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$;

(e) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$;

(f) $u_{xxx}+u_{xyy}+\lg u=0$;

(g) $u_{xx}^2+u_x^2+\sin u=e^y$.

2. 验证下面两个函数:

$$u(x,y)=x^2-y^2,$$
$$u(x,y)=e^x\sin y$$

都是方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

的解.

3. 证明 $u=f(xy)$满足方程

$$xu_x-yu_y=0,$$

其中 $f$ 是任意的可微函数,并由此验证函数 $\sin(xy)$,$\cos(xy)$,$\lg(xy)$,$e^{xy}$和$(xy)^3$ 都是解.

4. 证明 $u=f(x)g(y)$满足方程

$$uu_{xy}-u_xu_y=0,$$

其中 $f$ 和 $g$ 都是任意的二次可微函数.

5. 试确定下列方程的通解:

$$u_{yy}+u=0.$$

6. 令 $u_x=v$,求下列方程的通解:

$$u_{xy}+u_x=0.$$

7. 设解的形式为 $u(x,y)=f(\lambda x+y)$,其中 $\lambda$ 是一个待定的参数,求下列方程的通解:

$$u_{xx}-4u_{xy}+3u_{yy}=0.$$

# 第二章　数学模型与定解问题

## 2.1　典型方程

三类基本的二阶偏微分方程是：

(a) 波动方程

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0;$$

(b) 热传导方程

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0;$$

(c) 拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

许多数学物理问题都可归结为解偏微分方程的问题，特别是可归结为解上面所列举的三个偏微分方程的问题．我们将开始研究这些方程，首先仔细考察表示这些物理问题的数学模型．

## 2.2　弦的振动

在数学物理中最重要的问题之一是拉紧的弦的振动问题．由于它较简单，且经常出现在许多数学物理的分支中，所以在偏微分方程理论中把它作为一个典型的例子．

让我们考察一长为 $l$ 的两端固定的拉紧的弦．我们的问题是要确定弦的运动方程，用它来描述在给定初始扰动后任一时刻 $t$ 的弦的位移 $u(x,t)$．

为了能得出一个较简单的方程，我们作下面的一些假设：

(1) 弦是柔软与有弹性的，即它不能抵抗弯矩，因此在任何时刻弦的张力总是沿着弦的切线方向；

(2) 弦的每一段都不伸长，因此根据胡克(Hooke)定律，张力是常数；

(3) 弦的重量与其张力相比很小；

(4) 弦的偏移与其长度相比很小；

(5) 位移后的弦在任一点上的斜率与 1 相比很小；

(6) 弦只有横振动．

我们考察弦上一微小元素．设 $T$ 是如图 2.1 所示的两端点上的张力．作

用在弦的这一微小元素上的垂直方向的力是

$$T\sin\beta - T\sin\alpha.$$

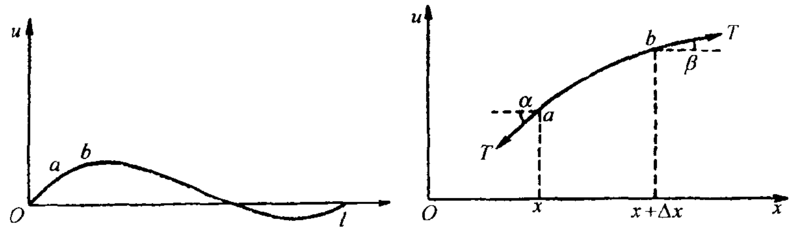


图 2.1

根据牛顿第二运动定律,合力等于质量乘以加速度.因此

$$T\sin\beta - T\sin\alpha = \rho\Delta s u_{tt}, \tag{2.2.1}$$

其中 $\rho$ 是弦的密度,$\Delta s$ 是这一小段位移后的弦的弧长.因为位移后的弦的斜率很小,所以有

$$\Delta s \approx \Delta x.$$

因为角 $\alpha$ 和 $\beta$ 都很小,所以

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha, \quad \sin\beta \approx \tan\beta.$$

于是等式(2.2.1)变成

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}u_{tt}. \tag{2.2.2}$$

但是,由微积分学我们知道,在时刻 $t$ 有

$$\tan\alpha \approx (u_x)|_x$$

及

$$\tan\beta \approx (u_x)|_{x+\Delta x}.$$

于是等式(2.2.2)可以写成

$$\frac{1}{\Delta x}[(u_x)|_{x+\Delta x} - (u_x)|_x] = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

令 $\Delta x$ 趋于零取极限,得

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{2.2.3}$$

其中 $c^2 = T/\rho$.方程(2.2.3)称为一维波动方程.

如果在弦的每单位长度上有外力 $F$ 作用着,方程(2.2.3)具有下列形式:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \tag{2.2.4}$$