萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

純粹幾何與非歐幾何

和爾蓋特　武咨著

鄭太朴譯

商務印書館發行

純粹幾何與非歐幾何

和爾蓋特　武杏著

鄭太朴譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

純粹幾何與非歐幾何

和爾蓋特 武咨 著

鄭太朴 譯

發行兼印刷者　商務印書館　上海寶山路

發行所　商務印書館　上海及各埠

中華民國十九年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

PURE GEOMETRY, by T. F. HOLGATE
NON-EUCLIDEAN GEOMETRY, by F. S. WOODS

Translated by
CHÊNG T'AI P'O

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

目　　次

近代純粹幾何學

Thomas F. Holgate 著

I. 引言

1. 在解析幾何學內，是將代數學上的方法用到幾何屬性及關係上去，以得到許多結論。藉有幾種慣例，將已知的關係用代數式表之，於是照代數規律演算一道，而所得結果則重復列之爲幾何命題。當用代數方法從事時，幾何概念竟可完全不要，而其結論則亦可與出發時的前提無多明白的關係看出。反之，純粹幾何學卽不然，當從事推理時，幾何概念永續不放開，而結論所由以達到的步驟，在在可自所設的條件尋得。

2. 純粹幾何學之來源很古，古昔時已樹立其基礎；有許多極重要關於三角之關係，直線形之關係，圓及球之屬性，面積，比例，幾何形之相等及相似等等的定理，那時已發見。古代幾何學者亦已研

究及圓錐截面及某數種高等曲線，其主要屬性曾為他們所發見，不過其所用方法瑣碎，其結果之大部分不能連貫．古代幾何學，可以歐几里得之書為其最清楚的代表，這書乃是將其時所有幾何學智識整理起來并加以系統的安排而成．於此書內，諸屬性及關係各自為敍述，對於同一類內諸形所有共同關係，殊不甚注意及之．歐氏方法，向稱為初等幾何學之方法，其書之主體乃是初等幾何學範圍內所有事．

3. 古代幾何學者之方法，直至十六世紀之初學問復興時代，始有所更變，那時有幾個新概念用入，并應用舊時所熟知者，例如無限遠相距的元素，一線段之調和分割 (*harmonic division*)，連續性原理，幻交理論 (*theory of imaginary intersections*) 等等，於是斯學大以擴充了．此種幾何學研究之新活動，結果成了笛卡士 (*Descartes*) 之發明解析幾何學，於是幾二百餘年，純粹幾何的方法，於大部分研究上是被擯棄了．但至十八世紀之末，學

者間又有發生純粹幾何學之興趣者，此由於蒙格(*Monge*)之著作所引起者不少，而當十九世紀之前半紀，經由彭雪萊(*Poncelet*)，司坦納(*Steiner*)，司道德(*V. Staudt*)，查斯萊(*Chasles*)等諸學者之手，於是斯學臻於極高發展了.

4. 近代純粹幾何學與古代幾何學所相差者，其在所論主體的方面還不多，而大要則在於其所用方法及所得結果之普通性.材料多有爲舊者，但經用射影(*projection*)原則及橫截線理論後，每有許多事實前此以爲不相關者，可證明其實爲一普通道理之不同的數面.此種普通化之趨向，乃是近代幾何學之主要特徵，而一方面雖或可說大部是受了解析的方法之影響所致，然此方向之進步，有些卻在解析方法發明以前，而近年來純粹幾何學對於解析的興味方面供獻亦很不少.

II. 幾何學中之簡單元素

5. 點，直線，平面，這些都是純粹幾何學上之簡

單的，未給以定義的元素．每個均可設想之爲有其存在性，與其他不相關者；一平面可不問及在其內的線與點而設想之；亦可想一線，不問及在其上的點或經此的平面，以及想一點，不問及經過此的線或平面．事實上，每個簡單元素可爲一基礎，於此上築有無限數的其他種之元素．

III. 二元性原理

6. 空間中之二元性 二點可設定一直線之同性，普通三點卽可決定一平面．然一方面亦二平面相交於一直線，而普通三平面祇有一點相共．設如三點處在一特殊相關的地位，卽在一直線上，則可有許多平面經過之．同此，設三平面在一特殊相關的地位，卽有一線相共，則卽有許多點在其上了．除了這些特例外，尙須一述以下數條：

$a1$. 三點決定一平面．

$a2$. 三平面決定一點．

$b1$. 二線有一點相共者決定一平面．

$b2$. 二線有一平面相共者決定一點.

$c1$. 一線與一點決定一平面.

$c2$. 一線與一平面決定一點.

這裏每取其二條，即可見有一種可以交換的關係在點與平面以及線與線之間. 此即是所謂二元的關係,照此,任何一種幾何形可生出一其他幾何形來,祇須將其一中之點易以其他中之平面,其一中之連二點的線易以其他中之由二平面相交所成的線.設如原形內三平面相遇於一點,則在二元的或倒的形內,三點在一平面內;或設如原形內四線在一平面內,則倒形內四線遇於一點.

7. 二元性舉例　一立方體有八頂點,六平面,十二邊,每邊均爲二面之相交及連二頂點.故其倒形有八平面，六點(頂點)，十二邊，每邊均連二頂點幷爲二面之交.原形內每三面相遇於一頂點,亦每三邊相遇於頂點,而每面上有四邊.倒形內每三頂點在一面內,亦每三邊在一面內,而每四邊遇於一點.這倒形即是一八面體.如是,立方體與八面體

可說是相倒的形.仿此,可知一四面體之倒形仍是一四面體,而十二面體之倒形則是二十面體.

8. 這一種原理,由之可自其他關於平面,線,點的定理上,推得一關於點,線,平面之定理,祇須互易便得,即名爲二元性原理.彭雪萊曾多方使用此原理,但其成爲一獨立的原理,則自葛谷內(*Gergonne*)始.於近代幾何學上實占重要地位.其應用純粹於圖形的屬性方面,普通於含有度量的屬性方面不用之.

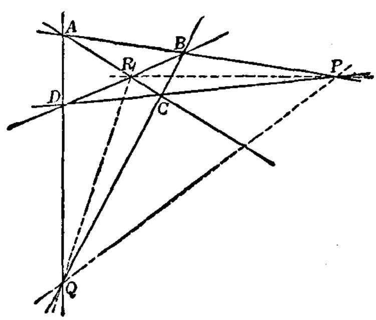
9. 平面內之二元性 如所論之形爲限於一單獨平面內者,即所從事者爲平面幾何學,則二元性祇在點與線間,因平面幾何學上二點決定一線,二線決定一點.對於二倒的平面形中之一形內一線上之任何多少點,其他形中必有同多少的線經過一點,而設如三或多線相遇於一點,其他中即有如許點同在一線上.

10. 下面的例,或足以說明平面內之相倒的形:

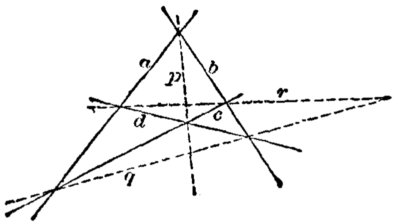
四個點(頂點) A, B, C, D, 其中沒有三個是同

線的，決定六條線(邊)，即，連每二頂點的線。AB 與 CD 二線可稱爲形中之相對的邊，AC 與 BD 及 AD 與 BC 均然。各對相對的邊，決定三點 P,Q,R (對角點)，即所謂對角三角之頂點。如此構成的形稱爲一完全四角形。

反之，四條線(邊) a,b,c,d，其中沒有三條相交於一點，決定六點(頂點)，即，每二邊之相交。ab 與 cd 點可稱爲形中相對的頂點，ac,bd 以及 ad，bc 均然。各對相對的點決定三線 p,q,r (對角線)，即所謂對角三角之邊。此形名爲一完全的四邊形。



如是，一完全四角形(上圖)有四頂點，六邊，及三對角點；一完全四邊形(下圖)有四邊，六頂點，



及三對角線.仿此,一完全五角形有五頂點,十邊,每四邊交於一頂點,蓋設如二邊相交,則可有十五點了. 一完全五邊形則有五邊,十頂點,每四點在一邊上,設如祇有二點在一線上,則可有十五線了.

11. 下面的例,可由之以說明如何用二元性原理,可自一定理上推得他定理.左旁的定理是向已知道的,第四世紀時柏蒲士(*Pappus*)曾述之.右旁的定理,不甚知名,但如將點與線互易便得,或亦可獨立的敍述之.

設於一直線 p 上隨便亂取三點 A,C,E,又於一其他直線 q 上隨便亂	設如經過一點 P 隨便亂作三直線 a,c,e,又經過一點 Q 隨便亂作三直

取三點 B,D,F,而用直線 $1,2,3,4,5,6$將AB, BC, CD, DE, EF, FA連起來,則 1與4,2與5,3與6各對線之交點在一直線 r 上.

線 b,d,f,其相交點 ab, bc,cd,de,ef,fa,以$1,2,3,4,5,6$ 表之,則 14, 25,36三線經過一點R.

其他此項二元性的例,以後還將遇見.

IV. 連續性原理

12. 連續性原理首爲開柏萊 (*Kepler*) 所假定,其後德亞九 (*Desargues*) 亦曾用之,照此,則一特殊的形所能有的屬性,於此形任何改樣後,祇須改樣時所處條件與初作此形時同,仍能保持之.用此原理,則有許多幾何學上之用語必須擴充其意義,俾能將所謂幻的元素亦包括進去,而藉其助以敍述普通的事實或定理,爲前此所必須有例外或限止者.幾何學者并不想將幻元素作出來,但承認其存在,以及承認此種原理,卽,雖然因繼續的變樣,

一形之屬性曾證明者，或致由於失卻眞元素而成爲無意義，不過如將幻元素列入論之，仍能保持不失，

13. 幻交 爲說明起見，這裏可一敍，一經過 P 點的直線與一圓相交於二點.設如 P 點在圓內，則不問此線於 P 點如何旋轉，其二交點總是實有的.但設如 P 點在圓外，則此直線開初時固可實有二點與圓相交，然若將此線於 P 旋轉，則不起先二點合併爲一，終至不見而成爲幻了.就尋常慣例而言，這時候仍說此直線與圓相交，似無意義；然假定上仍視爲眞實，而幻交點於任何普遍定理上與眞交點同其重要.如是，一圓之弦或割線之段之積，當割線於一點旋轉時，總是常的，此定理於割線在一切位置時均有一釋解.

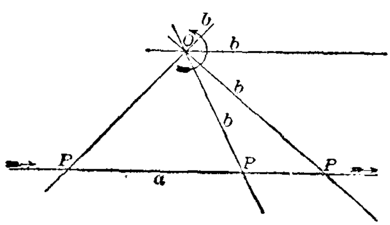
V. 無限遠點

14. 相距無限的元素 幾何學上用入無限相距的元素之觀念，實於普遍化之歷程方面大有幫助，

而近代的方法則主要在此歷程上．有許多例外的例，於前昔條件下須當特別論之者，用入此概念後卽可與一普遍的說法相適了．

15. 自下面的硏究內，極易見到無限相距的元素．

設如一直線 b（下圖）經過一固定的點O，與 a 線相交於一點 P；幷設此線 b 照圖中之箭所示的那樣於 O 點旋轉，則可見 P 點在 a 上向右移動直至不見，於是又復忽然現出於極遠的左方，仍照以前之方向移動．



其假設是，這二線沒有一刻不相交着，P點則繼續的一向在 a 線上移動，到極遠的右方而不見，經過一單獨的地位時復現於極左的方面，此地位蓋在平面內可達到的境地以外．換言之，假定在 a

線上有一點,并且祇有一點爲無限遠者,平面內之任何其他直線上,或,於此事實,有限區域內之任何直線上均然. 并如是假定,此點使線連續,俾可以由一線之任何一點連續向右或左移動而至任何一他點.(附註:本篇所說,祇是關於所謂歐几里得幾何學者. 至非歐几里得幾何學之假設,可閱篇 *III*.)

16. 如是,二個點將一直線分爲二段,一段上祇有有限的點,而在他段上則爲一無限遠的點;前者有時名爲內段,後者爲外段. 由此可知在一直線上,祇用一點不能將一個點與他個點分隔開,必須要有二點纔行,此則恰如在環或圍繞曲線上了.

17. 如此假定一單獨的無限遠點在一線 a 上,等於假定經過一點 O 能作一直線,并且祇能作一直線,與--已知的線在有限區城內不相遇,但在一無限遠點則可相交.有此假定,乃能說任何一平面內之二直線可在某處相交,倘不在有限區域內,則即在無限遠點上.