



系統科學叢書

Series of System Science

N

陳森發

# 網絡模型 及其優化

NETWORK MODELS  
AND THEIR  
OPTIMIZATION

# 网络模型及其优化

陈森发 编著

东南大学出版社

## 内 容 提 要

本书较系统地介绍了网络和图的基本概念、基本优化方法以及有实际背景的定理；同时，从理论上较深入地研究了许多领域中所共有的选址问题、网络拓扑结构问题、网络的统筹方法、网络流的调度等问题的建模技术、技巧和优化算法。它包括了作者近年来的科研成果以及国内外网络图论研究者的最新资料，理论联系实际，深浅适度，并附有较多的实际应用案例和算例。

本书既可作为高等院校理工科高年级学生和硕士研究生的教学用书或参考书，也可供从事系统工程、管理工程、管理信息系统、运输工程和城市规划的研究人员和工程技术人员参考。

责任编辑：朱经邦

责任校对：王小宁

## 网络模型及其优化

陈森发 编著

---

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行 武进县第三印刷厂印刷

开本 850×1168毫米 1/32 印张 12.375 字数 322千字

1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷

印数：1—1500册

---

ISBN 7-81023-447-1

---

TP·34

定价：3.70元

## 《系统科学丛书》出版说明

当今人类社会已经由“机器时代”跨入“系统时代”。系统科学是新时代占主导地位的科学，它是范围广、渗透性强的综合性学科。现实世界错综复杂、千变万化，但是，只要站在系统科学的高度就能透过其复杂的表象，抓住其主要特征，研究其相互关系，找出其共同规律，探求事物的本质。

为了适应科学发展的形势，加强出书的计划性和系统性，在有关专家的大力支持下，我社决定出版《系统科学丛书》。本丛书的选题围绕系统科学的基础理论、方法及其工程应用，主要收录有关学术专著、研究生教材或参考书，是侧重理论性和方法论的高层次系列书。相信本丛书的出版不仅会对从事系统科学、控制论、信息论、运筹学、系统工程等学科的专业人员、研究生、高年级大学生有所帮助，而且也便于其它领域的科技工作者拓宽思路、有所借鉴，从而促进边缘学科、交叉学科的发展。东南大学出版社愿为繁荣系统科学尽绵薄之力，努力扶植学术著作的出版，欢迎国内外专家学者踊跃投稿。

本丛书将陆续出版，各册相互独立，自成体系，编号以出版先后为序。

东南大学出版社

1988.12.20

## 序 言

网络图论是系统科学中有广泛实际应用的一个分支。心理学、化学、电工学、交通运输规划、城市规划、管理学、销售学以及教育学等各个不同领域内的许多问题都可以借助网络图论来解决。网络图论的意义不仅在于其本身，而且可以广泛地应用于其它领域，促使各领域获得新成果，并将成果扩展推开。

1736年，瑞士数学家列昂纳德·欧拉发表了第一篇网络图论的文章，即所谓“七桥问题”。这一时期网络图论处于萌芽阶段。从19世纪中叶到20世纪中叶，网络图论的问题大量出现，如哈密尔顿问题、四色问题，以及图的可平面性问题。在这个阶段，网络图论在其它领域也获得了应用成果，如Cayley把树应用于化学领域，Kirchhoff用树去研究电网络的分析问题。20世纪中叶以后，由于生产管理、军事、交通运输、计算机网络等方面的需要，特别是许多离散性问题的出现，以及具备了大型的电子计算机，使网络图论得到了飞速的发展。需要指出的是，线性规划、非线性规划、整数规划等优化理论和方法也逐步渗透到网络图论之中，这不仅促进了它的迅猛发展，而且使其具有更加广阔的应用前景。

作者曾将自己数年来从事网络结构、选址问题、网络简化、网络系统优化调度等科研工作的有关成果，以及网络图论方面的研究者所发表的最新资料整理成研究生课程的讲义。经过86至89级四届研究生使用，反映较好。为适应四个现代化需要，将讲义进一步修改和补充，编写出《网络模型及其优化》这本书。该书在介绍基本理论的同时，特别注意和实际应用相结合。书中有较多的理论联系实际的案例。系统工程、管理工程、运输工程、城市

规划等专业的研究生和本科生通过本书的学习，可以掌握网络系统建模的方法和网络优化的技巧。尤其是，其中处理问题的方法，对于他们进行科学研究，会获得相当的收益。

本书第一章介绍网络图论的基本概念和基本优化方法；第二章至第六章介绍各种网络的建模方法及其优化方法和技巧。

本书在编写过程中，得到东南大学管理学院系统工程教研室很多老师和研究生的帮助；徐南荣教授认真审阅了本书的初稿，谨在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，成稿时间仓促，有不当处，敬请读者批评指正。

陈森发

1990.10于南京

## 《系统科学丛书》编审委员会

主任委员：钱钟韩

副主任委员：冯纯伯 徐南荣

常务编委：陈天授

编委：（以姓氏笔划为序）

史 维 邢汉承 宋文忠

盛昭瀚 黄可鸣

# 目 录

## 第一章 网络和图的基本概念和基本方法

|                           |        |
|---------------------------|--------|
| § 1-1 概述 .....            | ( 1 )  |
| § 1-2 基本定义 .....          | ( 1 )  |
| § 1-3 基本定理 .....          | ( 11 ) |
| § 1-4 同构的概念 .....         | ( 13 ) |
| § 1-5 网络图的矩阵表示 .....      | ( 16 ) |
| § 1-6 有向图 .....           | ( 23 ) |
| § 1-7 网络图在电子计算机中的存储 ..... | ( 25 ) |
| § 1-8 基本的优化方法 .....       | ( 30 ) |

## 第二章 选址问题

|                         |        |
|-------------------------|--------|
| § 2-1 基本概念 .....        | ( 38 ) |
| § 2-2 中心问题 .....        | ( 44 ) |
| § 2-3 中位点问题 .....       | ( 54 ) |
| § 2-4 平面内的选址问题 .....    | ( 84 ) |
| § 2-5 多中心(多中位点)问题 ..... | ( 91 ) |

## 第三章 网络的拓扑结构问题

|                            |         |
|----------------------------|---------|
| § 3-1 概述 .....             | ( 113 ) |
| § 3-2 普通的最短树问题 .....       | ( 113 ) |
| § 3-3 Steiner问题 .....      | ( 118 ) |
| § 3-4 Steiner最短树 .....     | ( 125 ) |
| § 3-5 图论问题中的NP—完全问题 .....  | ( 140 ) |
| § 3-6 污水管网系统布局的优化 .....    | ( 145 ) |
| § 3-7 供水管网系统布局的模型及优化 ..... | ( 166 ) |
| § 3-8 城市公共交通线路的优化 .....    | ( 176 ) |

## 第四章 网络的统筹方法

|                          |         |
|--------------------------|---------|
| § 4-1 概述 .....           | ( 186 ) |
| § 4-2 关键路线法(CPM) .....   | ( 196 ) |
| § 4-3 计划评审技术(PERT) ..... | ( 223 ) |



|                            |         |
|----------------------------|---------|
| § 4-4 组合网络法(CNT) .....     | ( 225 ) |
| § 4-5 随机网络 .....           | ( 236 ) |
| § 4-6 网络统筹方法和线性规划的关系 ..... | ( 248 ) |
| <b>第五章 网络流的调度问题</b>        |         |
| § 5-1 网络最大流问题 .....        | ( 251 ) |
| § 5-2 最小费用流问题 .....        | ( 268 ) |
| § 5-3 城市交通流的分配算法 .....     | ( 279 ) |
| § 5-4 城市供水系统的优化调度 .....    | ( 289 ) |
| <b>第六章 网络的几个常见模型及优化算法</b>  |         |
| § 6-1 最短路问题 .....          | ( 301 ) |
| § 6-2 匹配与覆盖 .....          | ( 317 ) |
| § 6-3 邮递员问题 .....          | ( 359 ) |
| § 6-4 旅行推销员问题 .....        | ( 368 ) |
| ●参考文献 .....                | ( 385 ) |

# 第一章 网络和图的基本概念 和基本方法

## § 1-1 概 述

网络图论创始于1736年，随后经历了一段半停滞时期；到19世纪中叶，英国数学家（A.Cayley）利用树的概念研究有机化合物的同分异构问题；克希霍夫用网络拓扑分析方法解决电网络中的问题。此后，特别是近20年来，其应用更为广泛。本书是以网络图论的基本成果为基础并作进一步研究的著作，因而，属于纯图论的许多基本概念和理论，不可能作全面的深入的叙述和论证，否则，篇幅过长；对这方面感兴趣的读者，可进一步阅读有关文献。然而，为了方便阅读，兼顾全书的系统性，本章简单介绍网络图论的一些基本定义、定理和方法。

## § 1-2 基本定义

众所周知，网络图论所研究的对象是事物间最一般的关系的相互联系。事物和事物间的关系抽象为点、线集合的图，因此，可以用多种方法对图进行定义。定义的叙述虽然不同，其实质是一致的，无非是说明什么是顶点和边，以及两者的关系。现在给出一般的定义。

**定义1-1** 边、顶点和图 (Edge, Vertex and Graph)

一个图是由一个非空集合  $V(G) = \{v_i\}$  和  $V(G)$  中元素的无序对的一个集合  $E(G) = \{e_k\}$  所构成的二元组  $(V(G), E(G))$ 。  
 $V(G)$  中的元素  $v_i$  叫做顶点； $E(G)$  中的元素  $e_k$  叫做边（或叫做

弧“Arc”)。若  $V(G)$  和  $E(G)$  是有限集合, 则  $G$  称为有限图(Finite Graph)。否则, 称为无限图。本书将只讨论有限图。

综上所述, 对于图  $G$  来说, 两个端点之间连接的线段就是边, 边的端点就是顶点。除在顶点外, 两条边都不相交。边的两端连在一起。共一个顶点, 叫做自环(Self-Loop)。两条边以端点相并连接, 叫作并行边(Parallel Edge)。若不含并行边和自环的图, 称为简单图(Simple Graph)。若边  $e_k = (v_i, v_j)$ , 就说边  $e_k$  连接顶点  $v_i$  和  $v_j$ , 而  $v_i$  邻接(adjacent)  $v_j$ , 或说边  $e_k$  和顶点  $v_i, v_j$  相关联, 而  $v_j$  是  $v_i$  的邻居。两条边关联相同的顶点, 叫做邻接边(Adjacent Edge)。

图用符号  $G$  表示,  $e_1, e_2, \dots$  表示边;  $v_1, v_2, v_3, \dots$  表示顶点。有时为了同时表示几个图, 则用  $G_1, G_2, \dots$  区别之。

**定义1-2** 子图、真子图和子图的补图(Subgraphs, Proper Subgraphs and Complement of a Subgraph)

若图  $G_i$  的边集和顶点集各为图  $G$  的边集和顶点集的子集合, 它就是  $G$  的一个子图。如果图  $G_i$  不包含  $G$  的所有边, 它就是  $G$  的真子图。如果  $G_i$  包含了  $G$  的所有顶点, 则这个子图, 叫做生成子图(Spanning Subgraph)。  $G_i$  的补图  $G_i'$  是包含所有在  $G$  中而不在  $G_i$  中边的集合。

子图、真子图和集合论里的子集合和真子集合(Proper Subset)有着相同的意义。若  $G$  的子图  $G_i$  不是  $G$  的一个真子图, 则  $G_i$  必定是  $G$  本身, 因此,  $G_i'$  将是个空图(Null Graph), 这和集合论里的空集( $\emptyset$ ) (Empty Set) 是对应的。

**定义1-3** 顶点的度(Degree of a Vertex)

图的某顶点的度, 是该顶点所关联边的数目。度数为 0 的顶点称为孤立顶点。

由图中顶点的度, 可以看到有两种特殊的图: 完备图(Complete Graph)和  $m$  阶全图(Full Graph of Order  $m$ )。完备图是图中任一对相异顶点之间均有一边相连的图。具有  $n$  个顶点的完

备图中，每个顶点的度为  $v-1$ 。如图 1-1 中图  $G$  就是一个完备图，图中含有 4 个顶点，其每个顶点的度是  $4-1=3$ 。

$m$  阶全图，是图中任一对相异顶点之间均有  $m$  条边相连，它的每个顶点的度是  $m(v-1)$ 。如图 1-2 中图  $G$ ，是具有四个顶点、二阶全图。可见图中每个顶点的度是  $2(4-1)=6$ 。若  $m=1$ ，则上图便是一完备图，即完备图是  $m$  阶全图当  $m=1$  的特殊情况。

**定义 1-4** 边序列、边列和路径 (Edge Sequence, Edge Train and Path)

若图  $G$  中  $k$  条边依次排列为

$$e_1(v_1, v_2), e_2(v_2, v_3), \dots, e_k(v_k, v_{k+1})$$

$$(k \geq 2)$$

形成一串边的有限序列，叫做边序列 (Edge Sequence)。边序列也叫做链 (Chain)，有时还定义为“通道” (Walk)。边序列的起点和终点不同，则叫做开的边序列；否则，叫做闭的边序列。

没有重复边 (即边只出现一次) 的边序列，叫做边列 (又叫做单纯链)。同样，起点和终点重合的边列，叫做闭边列；否则，叫做开边列。

一个开边列，若其中顶点也不重复 (即每个顶点只出现一

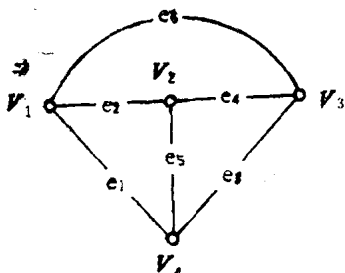


图 1-1 图  $G$  四个顶点完备图

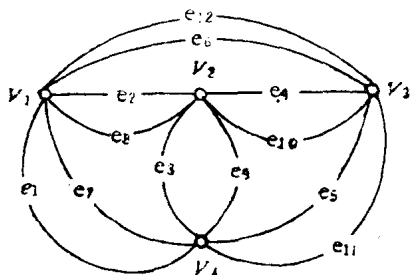


图 1-2

次), 则叫做路径(又叫做初等链)。

可见, 在边序列中, 一条边可重复出现。在边列中, 一个顶点可以经过几次。但无论是边序或边列, 都将是从小一点起始, 沿着边序列或边列连续走到终点。而在路径中, 边和顶点均不能重复出现。显然路径中内部顶点(Interior Vertices)的度数只能是2, 而起点和终点的度数为1。

现以图1-3为例, 若我们对边作如下排列:

$e_1(v_1, v_6), e_3(v_6, v_2), e_2(v_2, v_1), e_2(v_1, v_2), e_4(v_2, v_3), e_5(v_3, v_6), e_6(v_6, v_6), e_6(v_6, v_6), e_3(v_6, v_4), e_7(v_4, v_3), e_7(v_3, v_6), e_9(v_4, v_1)$ 。这是一个以  $v_1$  为起点, 又以  $v_1$  为终点, 长度等于 12 的闭合边序列。

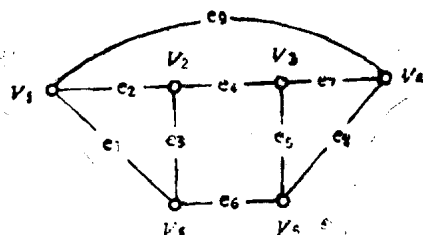


图 1-3 图 G

若对边作如下排列:

$e_1(v_1, v_6), e_3(v_6, v_2), e_2(v_2, v_1), e_9(v_1, v_4), e_7(v_4, v_3), e_7(v_3, v_4)$ 。显然, 这里以  $v_1$  为起点, 终点为  $v_4$ , 故是长度为 6 的开的边序列。

若对边作如下排列。

$e_1(v_6, v_1), e_9(v_1, v_4), e_7(v_4, v_3), e_5(v_3, v_5), e_6(v_5, v_6), e_3(v_6, v_2)$ 。这里各边相异, 是一个边列。

若对边作如下排列:

$e_1(v_6, v_1), e_2(v_1, v_2), e_4(v_2, v_3), e_5(v_3, v_6), e_8(v_6, v_4)$ , 这是一条路径  $P_1$ 。

若对边作如下排列:

$e_6(v_6, v_5), e_5(v_5, v_3), e_7(v_3, v_4)$ , 这是又一条路径  $P_2$ 。

**定义1-5** 回路(Circuit 或 Loop)

闭合的路径，叫做回路。即路径的两个端点重合，回路中的每个顶点的度都是2，也可以称它是一个圈(Cycle)。

**定义1-6** 连通图和非连通图(Connected and Unconnected Graph)

若在图1-3的顶点中，每一对顶点之间至少有一条路径，则称图 $G$ 为连通图。反之，就是非连通图。例如，图1-4是一个连通图。

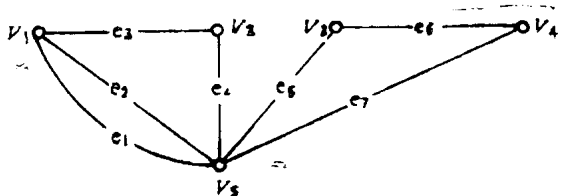


图 1-4 连通图

**定义1-7** 连通片(Connected Component)

一个非连通图 $G$ 至少含有两个或多个连通子图，这些连通子图就叫做图 $G$ 的连通片。一个图是连通图当且仅当它含有一个连通片。一个孤立顶点也算一个连通片。我们往往把连通片简称为片(Component)。

我们有时还要用到“最大连通子图”(Maximally Connected Subgraph) $G_m$ 。如果图 $G$ 是一个连通图。这个最大连通子图是 $G$ 的本身。如果 $G$ 是一个非连通图(或称不相接子图的集合)，于是每个连通片就是 $G$ 的最大连通子图。

例如，图1-5(a)所示，图 $G$ 由 $e_1, e_2, \dots, e_7$ 七条边， $v_1, v_2, \dots, v_5$ 五个顶点构成。顶点 $v_1$ 和 $e_1, e_2$ 边相关联，度数为2。 $v_2, v_3, v_4$ 和 $v_5$ 四个顶点分别和三条边相关联，度数为3。 $e_2, e_1$ 和 $e_4$ 三条边在 $v_3$ 和 $v_4$ 两个端点(顶点)间形成一条路径，如图1-5(b)的 $G_1$ ， $v_1, v_2$ 是内部顶点。

就路径的本身来说，两个内部顶点 $v_1$ 和 $v_2$ 的度分别为2，而从 $G$ 的本身看，则 $v_1$ 的度为2， $v_2$ 的度为3。图 $G$ 是有限个

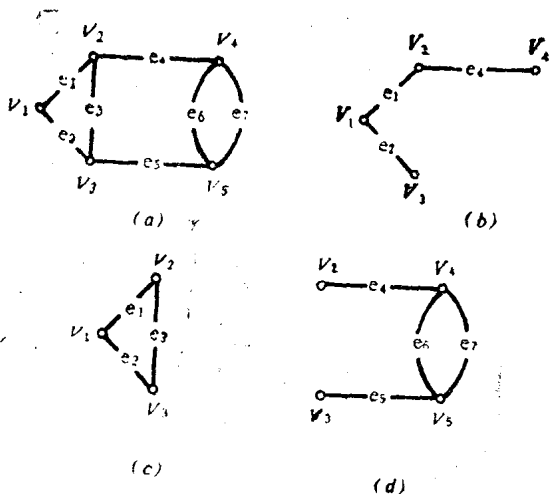


图 1-5 (a) 图  $G$ , (b) 子图  $G_1$ , (c) 子图  $G_2$ , (d) 子图  $G_2'$

边和点的集合，它是有限图。图  $G$  也是连通图，因为任两个顶点之间至少存在一条路径。

图 1-5(c) 子图  $G_2$ ，由  $e_1, e_2, e_3$  构成一个闭合路径，这就是回路。在  $G$  中， $e_1$  和  $e_2$  相串接，在这两个边构成的路径里，内部顶点  $v_1$  的度为 2。同时， $G$  中的  $e_6$  和  $e_7$  边是并联的，它们在一起构成回路。

图 1-5(d) 的  $G_2'$  是图  $G$  的另一子图，它是  $G_2$  的补图 (Complement Graph)，这个补图  $G_2'$  是边  $e_4, e_5, e_6$  和  $e_7$  的集合。 $G_1, G_2$  和  $G_2'$  都没有包含  $G$  的所有的边，故它们是  $G$  的真子图。但若将  $G_2$  和  $G_2'$  合在一起，仍构成一个子图 (即  $G$  本身)。由此，由任一子图与其补图所构成的图就等于图  $G$ 。

**定义 1-8** 可分图和不可分图 (Separable and Nonseparable Graphs)

若连通图  $G$  存在这样一个顶点，当将它移去以后，剩下的图成为不连通，这样的顶点，叫做割点 (Cut-Vertex)。又叫做分离点 (Seperation Vertex)。如图 1-4 顶点  $v_5$  是割点。含有割

点的连通图是可分图。

类似的情况，若连通图  $G$  中存在这样一条边，当移去这条边以后，图将不连通，则这条边叫做桥 (Bridge)，如图 1-6 所示。

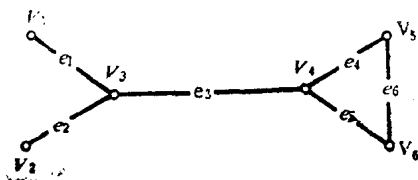


图 1-6 含有桥的图  $G$

图中  $v_3, v_4$  是割点； $e_1, e_2, e_3$  是桥。图中没有割点的最大连通子图叫做块 (Block)。如  $e_4, e_5, e_6$  就是块。

若连通图  $G$  不存在割点，则图  $G$  必不可分离，这就是不可分图。不可分图  $G$ ，其本身就是一个块。如图 1-7 图  $G$  就是不可分图。若移去  $e_4$ ，则图 1-7 所示的图  $G$ ，将变成一个新图，仅存在一个割点  $V_6$ ，于是这个新图，便成为可分图了。

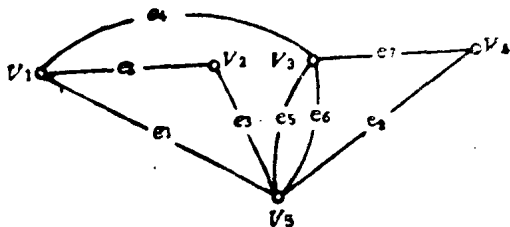


图 1-7 不可分的连通图  $G$

### 定义1-9 不相接图 (Disjoint Graphs)

若两个图彼此分离，没有公共顶点，则称为不相接图。

我们常常用“顶点—不相接”(Vertex—Disjoint)去定义不相接图。这本身有着“边—不相接”(Edge—Disjoint)的含义。因为，顶点既然是彼此分离的，自然就没有公共边了。同理，若两个图之间，存在公共边，这个公共边的端点，实际上就是图的顶点，故它们不是边—不相接，也就不是顶点—不相接。从而，若两图不相接，则两图的顶点和边均是彼此分离的。而边—不相接的图，并不一定是点—不相接的图。在本书中经常讨论一些图  $G$



中边不相接的子图，如：边不相接的回路，边不相接的割集，等等。

### 定义 1-10 二分图(Bipartite Graph)

设图  $G$  是具有  $v$  个顶点和  $e$  条边的无向图。若把  $v$  个顶点分成两个集合，使得  $e$  中的每条边的两个端点各属于一个集合，如图 1-8 所示图  $G$ ，叫做二分图，也叫做二部图或偶图。

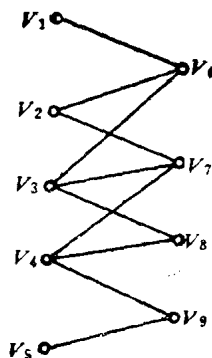


图 1-8 二分图

一个二分图的非零子图，也是二分图。同时，从一个部分某顶点出发，经过一条路，又回到这一部分中另一顶点，其长度是偶数。若从一部分某顶点出发，经过一条路，走到另一部分中某一顶点，其长度是奇数。例如，从  $v_1$  到  $v_6$ ，长度为 6 (偶数)。从  $v_1$  到  $v_8$ ，长度为 3 (奇数)。

### 定义 1-11 有向图和无向图(Oriented and Nonoriented Graph)

假如图的每一个边都是有向的，叫做有向图。反之，如果边没有取向，则叫做无向图。

例如 图 1-9，它是连通的无割点的有限图，也是一个无向图。

现将图 1-9 中的图  $G$  的所有边，指定取向，则得图  $G_1$ ，示于图 1-10，它是一个有向图。

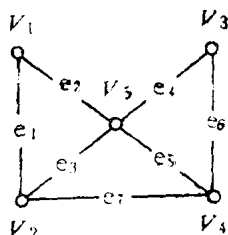


图 1-9 无向图

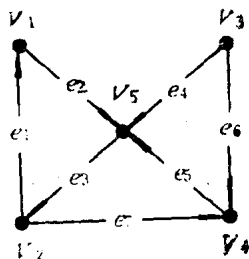


图 1-10 有向图  $G_1$