上海
普通高校
“九五”重点教材

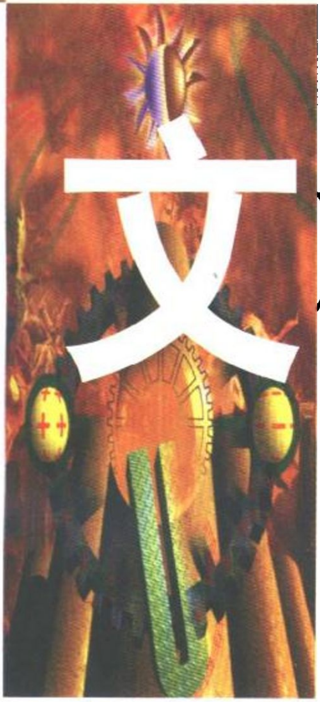
文科数学

——数学思想和方法

蒋鲁敏 赵小平
刘宗海 王继延 编著

华东师范大学出版社
ECNUP

世界银行贷款资助项目
上海市教育委员会 组编



文科数学

——数学思想和方法

蒋鲁敏 赵小平
刘宗海 王继延 编著

ECNUP
华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

文科数学:数学思想和方法/蒋鲁敏等编.—上海:华东师范大学出版社,2000.

ISBN 7-5617-2304-0

Ⅰ.文… Ⅱ.蒋… Ⅲ.数学-思想方法 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 64201 号

文科数学——数学思想和方法

编　　著　蒋鲁敏等
责任编辑　宋维锋
封面设计
版式设计　蒋　克
出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　发行部　电话 021-62571961
　　　　　　　　　传真 021-62860410
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编　200062
印 刷 者　上海复旦大学印刷厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　8.5
插　　页　4
字　　数　220 千字
版　　次　2000 年 8 月第一版
印　　次　2000 年 8 月第一次
印　　数　3500
标准书号　ISBN 7-5617-2304-0/O·080
定　　价　(平)10.00元
出 版 人　朱杰人

序

许多的文科数学教材，都是沿用“经济数学”的路子.通常是三大块：简易微积分、线性代数初步、概率论与数理统计.展开方式也一律是“形式化”的演绎.定义、定理、推论，对文科学生来说，总觉得面孔太板了一些.

摆在面前的是一份数学讲义——“文科数学”.翻开一看，觉得与众不同.除了上面三块基本的数学内容之外，全书涉及的内容相当广泛：有拓扑学、非欧几何、费尔马大定理这样的现代数学内容，还有“密码学”、“公平选举”、“投入产出”、“生态环境”，甚至还和“公司职员的级别”搭界.这样一来，视野开阔了，内容丰富了，更贴进文科学生的文化需要，满足了文化人所需要的基本数学修养.我想，这些变化，应该说是积极的，有益的.

清代学者袁枚说过，做学问要具备才、学、识，“学如箭镞，才如弓弩，识以领之，方能中鹄”.他在这里说了“知识”“能力”“意识”三者的关系.光有知识(箭)不够，还要有运用知识的能力(弓)，但是意识是灵魂，能力如何发挥，解决什么问题，还得靠意识引导.作为文科学生，学习数学，除了形成“理性思维”能力之外，更重要的是理解数学的价值，欣赏数学的美丽，知道数学应用的门径.这，也许就是社会科学工作者应有的数学意识.

数学有三个层面.一是作为理论思维的数学，重在反映人类进行理性思维的能力.二是作为技术应用的数学，数学技术和计算机的结合，使得数学成为能直接创造财富的生产力.三是作为文化修养的数学，数学成为现代人的基本素质的一部分.这三层数学价值，任何数

学教材都应具备.只是侧重点有所不同.文科学生更需要数学文化的熏染.一个文化人也许一辈子不会直接解决一个数学问题,但数学素质会伴他度过咸淡人生,无时不有,无所不在.这正如一个人虽不会成为画家,却应该有艺术素养一样.我想,文科学生如果缺乏数学素养,在科学昌明的21世纪,将成为一种毕业的文化缺陷.

语文和数学,一直是学校的两门基础课.全世界都一样,至今没有改变."数学使人聪明","数学令人精确","数学让人完美",但愿所有的人都喜欢数学,热爱数学,运用数学.

《文科数学——数学思想和方法》即将出版,书的作者都是相熟多年的同事.看到他们工作的重要,改革的困难,写作的艰辛,很想和他们一起为文科数学的改革呐喊.因作者之瞩,遂有此序.

张奠宙

2000年6月于华东师范大学

目录

第一章　数学的文化价值

第二章　现代数学浅说

第三章 微积分大意

第四章　数学规划方法

第五章　统计与概率简介

第六章 数学模型例说

第一章 数学的文化价值

§1 数学的特点

数学作为一门科学,其最鲜明的特点是:高度的抽象性,严密的逻辑性和广泛的应用性.

数学的研究对象是客观世界的数量关系和空间形式.例如数学中研究的数3,不是三个苹果或三个人,而是由这样的实例抽象出来的共同的数量特征3.人们在对各种集合计数时,发现数的特征和被计数事物的特性无关,数也和用什么符号表示无关.从人类认知数的过程可以知道,只有智力发展到较高程度时,数的概念的抽象特征才会变得清晰.对儿童来说,数总是和有形的事物联系在一起,例如和手指或算盘珠联系在一起.同样,数学中研究的点,不是地上工程师用油漆标出的记号,也不是白布上很小的瑕疵,而是由类似的实际事物抽象出来的没有长度、没有宽度的一个位置特征.对数学来说,实际对象的描述并没有多少意义,因为局限于具体的实际对象数学并不能走得太远.如果我们只会计算一只梨加一只梨是两只梨,一只苹果加一只苹果是两只苹果,而不懂得抽象的数的加法的思维,我们就得不到一根香蕉加一根香蕉或其他什么东西相加的结果.数学研究的对象超越了现实的具体事物,致力于研究这些对象之间的相互关系、它们的运算法则,即研究对象的结构和关系.当然,抽象和具体又

是相互依存的.对实际对象作出的抽象是否正确和恰当,不能靠自身来说明,而只能以实践来判断,要看由此得到的数学结构和关系是否与“可验证的事实”相符合.

严密的逻辑性是数学的另一个特点.数学的结论,除了少数几个被称为“公理”和“公设”以外,都要求应用逻辑推理的方法,用公理、公设或已经得到证明的结论加以严格的论证.这个从欧几里德所处的古希腊时代就流传下来的“公理化”的传统,反映了学科内在的严密化的要求,对数学的发展产生了巨大的影响.在数学领域之外,欧几里德公理化体系也为其他一些学科领域的基础理论树立了典范.

一门学科理论逻辑的严密,是这门学科发展到一定阶段的必然要求.这里我们可以看看微积分创立阶段的情况.在牛顿创立微积分之初,先是发现了许多在实践中行之有效的方法,却不能对微积分的基础给出令人信服的“证明”,难怪当时攻击微积分方法的人说微分是一个“逝去的鬼魂”.当时数学家直观的猜想以及用不能说服人的方法所得到的推论,却常常符合实际情况.于是这样的猜想和不能说服人的方法,常常帮助科学技术人员解决了实际问题,也帮助了数学家开辟拥有无穷宝藏的数学新领域.此时对开拓者来说,严密的逻辑推理似乎并不重要.但是随着微积分应用范围的拓展,开拓阶段的喜悦逐渐为严谨的思考所替代.数学应用的进一步扩展和深化,要求理论本身建立在一个扎实可靠的基础上,要求对数学结论应用的条件和范围给予明确的界定.这样,学科内部严密化的要求逐渐突现出来,微积分的发展受到了其基础不明晰的制约.恰在同时,19 世纪法国大革命促进了高等教育的发展,人们要求高等教育的内容在科学性方面更加可靠,其中包括要求检验数学,特别是微积分和极限概念的基础.这个历史的契机,大大地加快了微积分理论公理化的进程,促进了近代数学的发展.

微积分的发展史说明,逻辑推理表现的深思熟虑并不是数学的全部,但是它引导人们更清晰地领会数学概念的重要性,引导人们更深入地理解数学事实以及它们之间的依存关系,从而在实践中更准

确、更可靠地应用这些知识.经过历代数学家们的千锤百炼,数学已经成为一门逻辑严谨、结构紧密的科学.数学结论的真伪不会因人而异,其结论一旦得到证明,就会得到普遍的接受.可以这样来描述这门科学结构的紧密性:如果这栋科学大厦的任何一个地方出了问题,都会导致整个大厦的崩塌.数学大厦是人类智慧的结晶,是人类在认识客观世界的过程中所作的艰苦卓绝努力的结果.

由数学的抽象性和严密性决定了数学应用的广泛性.数学的抽象性和严密性是同一个数学原理可能在不同的领域中得到应用的原因.抽象的数学概念,在一百多年前曾促成电子学的革命,使世界的通讯手段及思想方法大为改观.而近几十年来由于大量数学成果的出现,才使无线电、电视、电话、人造卫星、电脑等现代科技成果的出现和发展成为可能.事实说明,在今天的社会里,数学方法是各种科学技术领域中不可或缺的工具,数学科学已经成为现代科学技术的支柱.特别是近几十年计算机的普及,使得"数量化"成为许多实质性学科发展的一个显著特点.数学方法渗透到各学科领域,涌现出一批使人耳目一新的成果.这中间包括传统的文科领域,出现了诸如计量历史学、数理语言学、数理心理学等文理交叉的新学科.在研究文科领域的具体课题时借助于数学的成果、数学的方法,并且充分利用计算机等现代技术,在未来也必定是一个大有作为的方向.

§2　数学是哲学思考的重要基础

数学在科学、文化中的地位,也使得它成为哲学思考的重要基础.历史上哲学领域内许多重要论争,常常牵涉到有关对数学的一些根本问题的认识.我们思考这些问题,有助于正确认识数学,正确理解哲学中有关的争论.

2.1　数学——根源于实践

数学的外在表现,或多或少和人的智力活动相联系.因此在数学

和实践的关系上,历来有人主张数学是“人的精神的自由创造”,否定数学来源于实践.其实,数学的一切发展都不同程度地归结为实际的需要.从我国殷代的甲骨文中,就可以看到那时我们的祖先已经会使用十进制计数方法.他们为适应农业的需要,将“十干”和“十二支”配成六十甲子,用以记年、月、日,几千年的历史说明这种日历的计算方法是有效的.同样,由于商业和债务的计算,古代的巴比伦人已经有了乘法表、倒数表,并积累了许多属于初等代数范畴的资料.在埃及,由于尼罗河泛滥后重新测量土地的需要,积累了大量计算面积的几何知识.后来随着社会生产的发展,特别是为适应农业耕种与航海需要而产生的天文测量,逐渐形成了初等数学,包括当今我们在中学里学习到的大部分数学知识.再后来由于蒸汽机等机械的发明而引起的工业革命,需要对运动特别是变速运动作更精细的研究,以及大量力学问题出现,促使微积分在长期的酝酿后应运而生.20 世纪以来近代科学技术的飞速发展,使数学进入一个空前繁荣时期.在这个时期数学出现了许多新的分支:计算数学,信息论,控制论,分形几何等等.总之,实践的需要是数学发展的最根本的推动力.

数学的抽象性往往被人所误解.有些人认为数学的公理、公设、定理仅仅是数学家头脑思维的产物.数学家靠一张纸、一支笔工作,和实际没有什么联系.

其实,即使就最早以公理化体系面世的欧几里德几何而言,实际事物的几何直观和实践中人们发现的现象,尽管不合乎数学家公理化体系的程式,却仍然包含着数学理论的核心.当数学家把建立几何的公理体系当作自己的目标时,他的头脑中也一定联系到几何作图和直观现象.一个人,即使是很有天赋的数学家,能在数学的研究中获得具有科学价值的成果,除了他接受过严格的数学思维训练以外,他在数学理论研究的过程中,必定会在问题的提出、方法的选择、结论的提示等诸多方面自觉或不自觉地受到实践的指引.可以这么说,脱离了实践,数学就会变成无源之水,无本之木.

但是,数学理性思维的特点,使它不会满足于仅研究现实的数量

关系和空间形式,它还努力探索一切可能的数量关系和空间形式.在古希腊时期,数学家就超越了在现实有限尺度精度内度量线段的方法,觉察到了无公度量线段的存在,即无理数的存在.这其实是数学中最困难的概念之一——连续性、无限性的问题.直到两千年以后,同样的问题导致极限理论的深入研究,大大地推动了数学的发展.试想今天如果还没有实数的概念,我们将面临怎样的处境.这时人们无法度量正方形对角线的长度,也不会解一元二次方程;至于极限理论与微积分学更不可能建立.即使人们可以像牛顿那样应用微积分,但是在判断结论的真实性时会感到无所适从.在这种状况下,科学技术还能走多远呢? 又如在欧几里德几何产生时,人们就对其中一个公设的独立性产生怀疑.到 19 世纪上半叶,数学家改变这个公设,得到了另一种可能的几何——非欧几里德几何.这种几何的创立者表现了极大的勇气,因为这种几何得出的结论从“常理”来说是非常“荒唐”的.例如“三角形的面积不会超过某一个正数”.现实世界似乎没有这种几何的容身之地.但是过了近一百年,在物理学家爱因斯坦发现的相对论中,非欧几里德几何却是最合适的几何.再如,20 世纪 30 年代哥德尔得到了数学结论不可判别性的结果,其中的某些概念非常抽象,近几十年却在算法语言的分析中找到了应用.实际上,许多数学在一些领域或一些问题中的应用,是这些数学理论当初的创始者做梦也想不到的.所有这一切说明,一旦实践推动了数学,数学本身就会不可避免地获得了一种动力,使之有可能超出直接应用的界限.而数学的这种发展,最终也会回到实践中去.

总之,我们应该大力提倡研究和当前实际应用有直接联系的数学课题,特别是现实经济建设中的数学问题.但是我们也应该在纯粹科学和应用科学之间建立有机的联系,建立抽象的共性和丰富多彩的个性之间的平衡,以此来推动整个科学协调地发展.

2.2 数学——充满了辩证法

由于数学严密性的特点,很少有人怀疑数学结论的正确性.相

反,数学的结论往往成为真理的一种典范.例如人们常常用“像一加一等于二那么确定”来表示结论不容置疑.在我们的中小学的教学中,数学更是只准模仿、演练、背诵.数学真的是万古不变的绝对真理吗?

事实上,数学结论的真理性是相对的.即使像 $1+1=2$ 这样简单的公式,也有它不成立的地方.例如在布尔代数中,$1+1=0$! 而布尔代数在电子线路中有广泛的应用.欧几里德几何在我们的日常生活中总是正确的,但在研究天体某些问题或速度很快的粒子运动时非欧几何却是适宜的.数学其实是非常多样化的,它的研究范围也随着新问题的出现而不断扩大.如同一切科学一样,数学家们如果死守着前辈的思想、方法、结论不放,数学科学就不会进步.把数学的严密性和公理化体系看作一种“教条”是错误的,更不能像封建时代的文人对待孔夫子说的话:“真理”已经包含在圣人说过的话里,后人只能对其作诠释.数学发展的历史可以证明,正是数学家特别是年轻数学家的创新精神,敢于向守旧的思想挑战,数学的面貌才得以不断地更新,数学才成长为今天这样一门蓬勃发展、富有朝气的学科.

数学的公理化体系从来也不是不容怀疑、不容变化的“绝对真理”.欧几里德的几何体系是最早出现的数学公理化体系,但从一开始就有人怀疑其中的第五公设不是独立的,即该公设可以从公理体系的其他部分推出.两千多年来人们一直在寻找答案,终于在 19 世纪由此发现了非欧几何.虽然人们长时期受到欧几里德几何的束缚,但是最终人们还是接受了不同的几何公理体系.如果历史上某些数学家多一点敢于向旧体系挑战的革新精神,非欧几何也许还可能早几百年出现.

数学公理化体系反映了内部逻辑严密性的要求.在一个学科领域内,当有关的知识积累到一定程度后,理论就会要求把一堆看来散乱的结果以某种体系的形式表现出来.这就需要对已有的事实再认识、再审视、再思索,创造新概念、新方法,尽可能地使理论能包括最一般、最新发现的规律.这实在是一个艰苦的理论创新过程.数学公

理化也一样，它表示数学理论已经发展到了一个成熟的阶段，但并不是认识一劳永逸的终结．现有的认识可能被今后更深刻的认识所代替，现有的公理也可能被今后更一般化、包含更多事实的公理体系所代替．数学就在不断地更新过程中得到发展．

有种看法以为，应用数学就是把熟诵的数学结论套到实际问题上去，以为中小学的数学就是教给学生这些万古不变的教条．其实数学的应用极充满挑战性，一方面不但需要深切地认识实际问题本身，另一方面要求掌握相关数学知识的真谛，更重要的是要求能创造性地把两者结合起来．

就数学的内容来说，数学充满了辩证法．在初等数学发展时期，占统治地位的是形而上学．在该时期的数学家或其他科学家看来，世界由僵硬的、不变的东西组成．与此相适应，那时数学研究的对象是常量，即不变的量．笛卡尔的变数是数学中的转折点，他把初等数学中完全不同的两个领域——几何和代数结合起来，建立了解析几何．这个框架具备了表现运动和变化的特性，辩证法因此进入了数学．在此后不久产生的微积分抛弃了把初等数学的结论作为永恒真理的观点，常常作出相反的判断，提出一些在初等数学的代表人物看来完全不可理解的命题．数学走到了这样一个领域，在那里即使很简单的关系，都采取了完全辩证的形式，迫使数学家们不自觉又不自愿地转变为辩证数学家．在数学研究的对象中，充满了矛盾的对立面：曲线和直线，无限和有限，微分和积分，偶然和必然，无穷大和无穷小，多项式和无穷级数，……正因为如此，马克思主义经典作家在有关辩证法的论述中经常提到数学．我们学一点数学，一定会对体会辩证法有所帮助．

§3 数学是公民文化素质的组成部分

3.1 数学——文化中的独特部分

数学作为工具，对各个不同学科领域的专业人士的吸引力是有