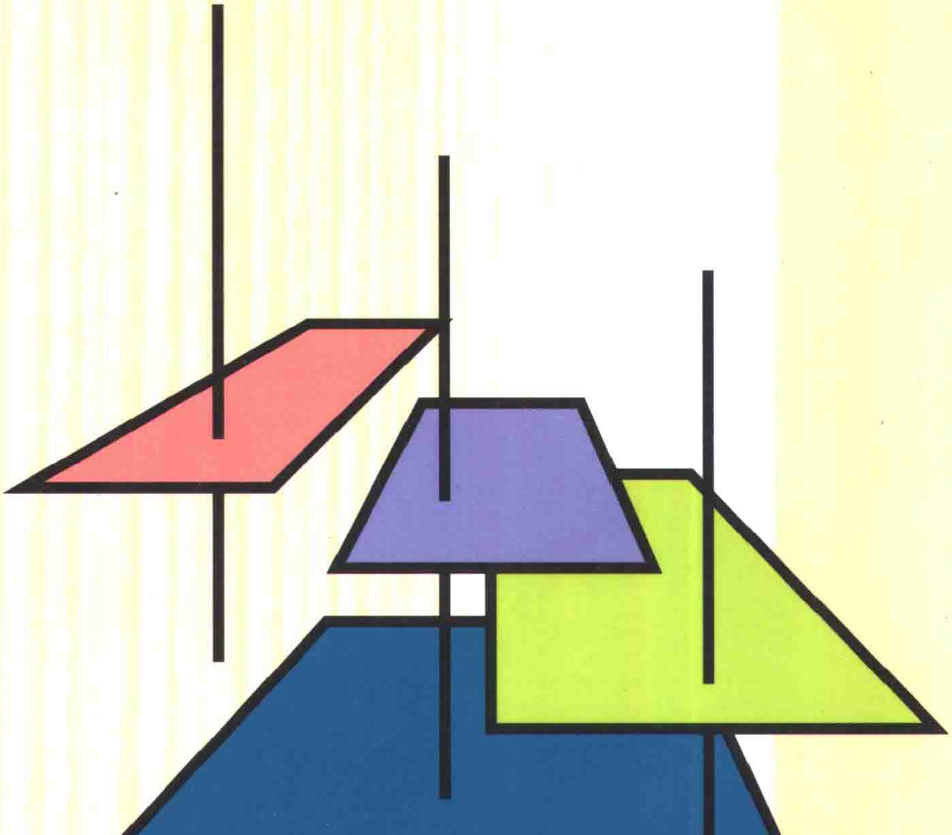
高等院校信息管理与信息系统专业系列教材

运筹学模型与方法教程

例题分析与题解

刘满凤 傅 波 聂高辉 编著



清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

高等院校信息管理与信息系统专业系列教材

运筹学模型与方法教程
例题分析与题解

刘满凤　傅　波　聂高辉　编著

清 华 大 学 出 版 社

（京）新登字 158 号

内 容 简 介

本书是根据《运筹学模型与方法教程》（程理民，吴江，张玉林编著）而编写的配套教学辅助用书 全书共分 10 章，内容包括：线性规划模型，整数规划模型，动态规划，对策论模型，网络模型，存储模型，决策分析模型，随机服务系统模型，多目标决策模型. 每章内容均按重点难点提要、主要解题方法与典型例题分析 习题及习题解答四部分进行编写 全书最后的附录中有 5 个具有现实指导意义的运筹学案例

本书可作为高等院校财经类和信息管理类专业本科生和工商管理硕士（MBA）研究生学习运筹学的参考用书，也可供教师教学参考

图书在版编目（CIP）数据

运筹学模型与方法教程例题分析与题解/刘满凤，傅波，聂高辉 编著. - 北京：清华大学出版社，2000

ISBN 7-302-04088-5

Ⅰ. 运… Ⅱ. ①刘… ②傅… ③聂… Ⅲ. 运筹学 - 数学模型 - 高等学校 - 解题 Ⅳ. O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 75656 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：世界知识印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　**印张**：18.75　**字数**：455 千字
版　次：2001 年 2 月第 1 版　2001 年 2 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-04088-5/TP・2410
印　数：0001～5000
定　价：22.00 元

出版说明

20世纪三四十年代，长期摸索前进的古老的计算技术与刚走向成熟的电子技术结合．这一结合，不仅孕育了新一代计算工具——电子计算机，还产生了当时谁也没有料到的巨大效应．电子计算机——这种当初为计算而开发出来的工具，很快就超出计算的范畴，成为"信息处理机"的代名词；人类开始能够高效率地开发并利用信息；信息对人类社会的作用得以有效地发挥，并逐步超过材料和能源成为人类社会的重要支柱；信息产业急剧增长，信息经济高速发展，社会生产力达到了新的高度；人们的信息化意识不断加强，人类在信息资源方面开始更加激烈的竞争，社会发展走上信息化轨道．

科学技术是第一生产力，教育是基础．为了加速社会信息化的过程，以培养信息资源开发人才为目标的信息管理与信息系统专业应运而生．

从与信息有关的学科纵向来看，信息管理与信息系统处于信息学、信息技术、信息管理、信息经济、信息社会学这个层次的中间，它下以信息学和信息技术为基础，上与信息经济和信息社会学相关联．从其涉及的学科横向来看，它处在管理学、信息科学与技术、系统科学等有关学科领域的交叉点上．它对技术有极高的要求，又要求对组织的深刻理解和对行为的合理组织，反映了科学与人本融合的特点．这种交叉和融合正是信息管理与信息系统的最重要的特征，是别的学科或专业难以取代和涵盖的．

我国的信息管理与信息系统专业创建于20世纪70年代末．在不到20年的时间里，已发展到150多个点，成为培养信息化人才的主要摇篮．其发展速度之快、影响之深远，已令世人和学术界刮目相看．

然而，作为一个新的学科，这个专业的课程体系、教学内容以及教学方法都需要经历一个逐步完善、逐步成熟的过程．特别是教材的建设更需要经过长期的实践和探索．没有这样一个过程，具有专业特点、符合中国实际的教材是不可能产生的．近20年来，大家一直在课程体系的完善和建设并具有自己专业特点的教材方面不断进行探讨．1991年全国10所财经类院校的经济信息管理专业负责人汇聚在太原召开第一次教学研讨会．以后，1993年在大连、1995年在武汉、1997年在烟台，又有更多的院校参加了这一研讨．在讨论中，各校的同仁一致认为，教材建设是当务之急，它不仅直接体现和落实培养目标，同时也是学科建设的根本所在，目前一些课程缺乏专业特点，简单搬用其他专业教材的状况亟待改变．在武汉会议上，这一共识得到了与会的国家教委有关部门负责同志的赞许，清华大学出版社也对此给予了热情的支持．会议确定了首批计划编写八九本教材，由张基温教授主持实施，由清华大学出版社出版．在实施过程中，还聘请了魏晴宇、陈禹两位教授作为顾问．

经过两年多的工作，在全国许多高等院校的同仁共同努力下，其中7本已完成初稿．我们希望这批教材的问世，能够起到抛砖引玉的作用，对各校信息管理与信息系统专业的建设和发展有所裨益．

近20年来的实践使我们对信息管理与信息系统专业的重要性和困难有了切身的体会．一方面，席卷全球的信息化大潮把信息管理推到了时代发展的前沿，信息、信息管理、信息系

统已经成为全社会注视的热点.这为信息管理与信息系统专业的建设创造了良好的外部条件,提供了难得的机遇.另一方面,信息技术的迅速发展与普及,多种社会经济因素的互相渗透和影响,前所未有的许多新问题、新情况的出现,又给这个专业的发展带来了很大的困难.我们深感责任之重大和任务之艰巨.在这套教材问世之时,我们再次表示这样一个心愿 希望与全国的同行共勉,为祖国信息化建设的宏伟事业多添一块砖,多加一块瓦,多出一份力,培养出更多的优秀人才.

由于上述种种原因,这套教材当然不会是完整的,也不会是完美的.它必然要不断补充、不断修改、不断完善.因此,对于它的任何修改意见,都是我们非常盼望的.希望能够在这套教材出版后,收到更多的意见和建议,使之逐步走向成熟.

全国高等院校计算机基础教育研究会
财经信息管理专业委员会
信息管理与信息系统专业教材编委会
1997年9月

前　言

《运筹学模型与方法教程》一书出版后，应广大教师和学生的需要，为完善《高等院校信息管理与信息系统专业系列教材》，我们组织编写了这本与原教材配套使用的例题分析与题解.

本书汇集了参加编写的同志和编写原教材的同志，在多年的教学中积累起来的经验，包括运筹学解题思想、典型解题方法、典型例题及习题资料，并从国内外有关文献中选择了部分例题，从江西财经大学MBA研究生中选择了5个学生的优秀案例，经进一步整理加工而成.全书共10章，例题与习题共计400余题.考虑到各种不同层次和不同专业的需要，本着突出重点，解决难点的宗旨，在编写时，每章均按重点难点提要、主要解题方法及典型例题介绍、习题及习题解答四个部分进行编写，着重讲述基本概念，阐明基本理论和基本方法，突出解题技巧，注重建模思想的介绍，强调如何运用运筹学知识建立实际问题的模型，并进一步解决实际问题.本书论述力求简洁透彻，深入浅出，文字通俗易懂，以期达到事半功倍之效.

本书可作为高等院校财经类和信息管理类专业本科生和工商管理硕士(MBA)研究生学习运筹学的参考用书，也可供教师教学参考.

参加本书编写的有江西财经大学副教授刘满凤(第1、2、3章)、江西财经大学讲师傅波(第4、5、6章)和江西财经大学副教授聂高辉(第7、8、9章).全书由刘满凤统稿，并由程理民教授和吴江教授审稿.在编写过程中，得到江西财经大学信息学院各位同仁的大力支持，谨在此表示感谢.

由于编者水平有限，时间仓促，书中可能存在不少缺点和错误，热忱欢迎广大读者批评指正.

编　者

2000.7.5

目　录

第1章　运筹模型概论(略)

第2章　线性规划模型

2.1　重点、难点提要

1. 线性规划模型的特征

(1) 由决策变量构成,反映决策的目标是线性函数;

(2) 一组由决策变量的线性等式或不等式构成约束条件;

(3) 对决策变量取值范围加以限制的非负约束.

建立一个问题的线性规划模型一般步骤为:

(1) 确定决策变量;

(2) 确定目标函数;

(3) 确定约束条件;

(4) 确定变量是否有非负约束.

线性目标规划模型除与一般线性规划模型具有上述共同特征外,还有以下不同之处:

(1) 线性目标规划一般依序有多个目标;

(2) 约束条件一般包括目标约束和资源约束;

(3) 决策变量包括偏差变量和一般决策变量;

(4) 目标函数均为关于偏差变量的线性函数.

典型问题的建模有:生产计划问题,运输问题,合理配料问题,投资计划问题,提级加薪问题.

2. 用单纯形法解线性规划模型的步骤

第一步:找出初始可行基,建立初始单纯形表;

第二步:判断最优,检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j-C_j$.

(1) 若所有的 $\sigma_j\geqslant 0$,则基 $\boldsymbol{B}$ 为最优基,相应的基可行解即为基本最优解,停止计算.

(2) 若有某个 $\sigma_s<0$,它所对应的列向量的全部分量 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s=(a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{ms})^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{0}$,则该线性规划问题的目标函数值无上界,即无界解,停止计算.

(3) 若有某个负检验数 $\sigma_j<0$ 所对应的列向量有正分量,则基 $\boldsymbol{B}$ 不是最优基,转第三步.

第三步:换基迭代

(1) 确定换入变量 x_s,单纯形表中从左至右选择检验数为负的进基.

(2) 确定换出变量 x_r,单纯形表中按最小比值原则从上至下选择变量出基.

再返回第二步.

详情参见《运筹学模型与方法教程》第 21 页流程框图.

3. 修正单纯形法主要在计算机上实现

计算步骤为：

第一步：首先构造初始可行基 $\boldsymbol{B}$，求出初始基解.

第二步：计算单纯形乘子 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C_B B}^{-1}$，并计算非基变量的检验数 σ_j. 如果所有 $\sigma_j \geqslant 0$，则得到最优解，停止计算；否则转第三步.

第三步：选取计算出的第一个负检验数 $\sigma_s<0$ 所对应的变量 x_s 进基，并计算 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s$ 向量，如果 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s \leqslant \boldsymbol{0}$，那么问题为无界解，停止计算；否则转第四步.

第四步：计算最小比值 $\theta=\min\left\{\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s)_i}\,\middle|\,(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s)_i>0\right\}=\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_r}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s)_r}$

确定相应的基变量 x_r 为出基变量，于是得到一组新的基变量及新的基矩阵 $\boldsymbol{B}_1$.

第五步：计算新的基阵的逆阵 $\boldsymbol{B}_1^{-1}$，求出 $\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}$，返回第二步.

修正单纯形法的难点在于计算新的基阵的逆阵 $\boldsymbol{B}_1^{-1}$，下面介绍其求法：

方法一：可根据新的基变量，写出基阵 $\boldsymbol{B}_1$，再用矩阵求逆法求 $\boldsymbol{B}_1^{-1}$（详情可参考线性代数中矩阵求逆）.

方法二：由于上一轮迭代基 $\boldsymbol{B}$ 和下一轮迭代基 $\boldsymbol{B}_1$ 之间只相差一列，因而事实上可设

$$\boldsymbol{B}=(P_{j1},\cdots,P_{jr-1},P_{jr},P_{jr+1},\cdots,P_{jm}),$$
$$\boldsymbol{B}_1=(P_{j1},\cdots,P_{jr-1},P_s,P_{jr+1},\cdots,P_{jm}).$$

即新的一轮迭代是变量 x_{jr} 出基，变量 x_s 进基.

因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}^{-1}(P_{j1},\cdots,P_{jr-1},P_{jr},P_{jr+1},\cdots,P_{jm})\\&=(\boldsymbol{B}^{-1}P_{j1},\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}P_{jr-1},\boldsymbol{B}^{-1}P_{jr},\boldsymbol{B}^{-1}P_{jr+1},\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}P_{jm})\\&=\boldsymbol{I},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.

而
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}_1&=\boldsymbol{B}^{-1}(P_{j1},\cdots,P_{jr-1},P_s,P_{jr+1},\cdots,P_{jm})\\&=(\boldsymbol{B}^{-1}P_{j1},\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}P_{jr-1},\boldsymbol{B}^{-1}P_s,\boldsymbol{B}^{-1}P_{jr-1},\cdots,\boldsymbol{B}^{-1}P_m).\end{aligned}$$

所以，通过对比两个结果，且注意到

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s=\begin{bmatrix}\bar{a}_{1s}\\\bar{a}_{2s}\\\vdots\\\bar{a}_{ms}\end{bmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&&&\bar{a}_{1s}&&&\\&\ddots&&\vdots&&&\\&&1&a_{r-1s}&&&\\&&&\bar{a}_{rs}&&&\\&&&\bar{a}_{r+1s}&1&&\\&&&\vdots&&\ddots&\\&&&\bar{a}_{ms}&&&1\end{bmatrix}.$$

由此得

$$E=(B^{-1}B_1)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & -\frac{\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & & & \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & 1-\frac{\bar{a}_{r-1s}}{\bar{a}_{rs}} & & & \\ & & \frac{1}{\bar{a}_{rs}} & & & \\ & & -\frac{\bar{a}_{r+1s}}{\bar{a}_{rs}} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\frac{\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

所以 $B_1^{-1}=EB^{-1}$.

例如,用修正单纯形法求解如下模型:

$$\max Z=3x_1+2x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 4\\ 3x_1+2x_2\leqslant 14\\ x_1-x_2\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

引入松弛变量 x_3,x_4,x_5,化为标准型后,确定初始基 $B=(P_3,P_4,P_5)=I$,然后进行第一轮迭代,确定的进基变量为 x_1,出基变量为 x_5,即新基变量为 x_3、x_4、x_1,新基

$$B_1=(P_3,P_4,P_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

则

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\bar{a}_{11}/\bar{a}_{31}\\ 0 & 1 & -\bar{a}_{21}/\bar{a}_{31}\\ 0 & 0 & 1/\bar{a}_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_1^{-1}=EB^{-1}=E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

有了 B_1^{-1} 后就可进行第二轮迭代.

但是,对于基阵为二阶方阵,则有更简单的求解逆矩阵方法如下:

若 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,则 $B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

如用修正单纯形法求解如下模型:

$$\max Z = -x_1 + 2x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

引进松弛变量 x_3, x_4 化为标准形后，确定初始基为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\boldsymbol{I}$. 进行第一轮迭代，确定的进基变量为 x_2，出基变量为 x_3，即新基变量为 x_2, x_4，新基 $\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_4)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{B}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

有了 $\boldsymbol{B}_1^{-1}$ 后就可进行第二轮迭代了.

4. 原问题与对偶问题的关系

(1) 模型之间的对应关系，如表(2.1)所示. (2) 解之间的关系，由弱对偶定理，对偶定理，互补松弛性定理阐述. 由此可知，任何一个线性规划问题都有一个对偶问题与之相匹配. 当我们求解一个线性规划问题时，其对偶问题的解也相应求出.

表 2.1

y_i \ x_j	x_1	x_2	…	x_n	原关系	$\min W$
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leqslant$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\leqslant$	b_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leqslant$	b_m
对偶关系	$\geqslant$	$\geqslant$	…	$\geqslant$		
$\max Z$	c_1	c_2	…	c_n		

5. 对偶单纯形法适用于当初始基解不可行，而相应的检验数全部非负的情况

解题步骤为：

第一步：建立初始单纯形表. 设表中检验数行的值 $Z_j - c_j$ 全部 $\geqslant 0$，即是其对偶问题的一个可行解.

第二步：判断最优，检查 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 列的数字，若均非负，则已得最优解，停止计算. 若 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 列有负分量，则转第三步.

第三步：换基迭代

(1) 确定换出变量. 在单纯形表基解列中从上到下选负分量所对应的基变量 x_r 出基.

(2) 确定换入变量

在单纯形表中若 x_r 所在行的各系数 $\bar{a}_{rj}(j=1,2,\cdots,n)$ 均非负，即所有 $\bar{a}_{rj}\geqslant 0$，则无可行解，停止计算；否则在单纯形表中按最小比值原则从左至右选变量进基.

返回第二步.

注意单纯形法和对偶单纯形法都是求解原问题，它们具有如下不同：

(1) 适用范围不同. 单纯形法适用于初始基解对原问题可行(即 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$)，而对偶单纯形法适用于初始基对对偶问题可行(即 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\geqslant 0$).

(2) 判断最优的准则不同. 单纯形法是当所有非基变量检验数 $\sigma_j\geqslant 0$ 时解最优，而对偶

单纯形法是当基解可行 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$ 时最优.

（3）换基迭代步骤不同.单纯形法是先进后出，即先选择进基变量，后选择出基变量，选择进基是检验数为负的变量进基，选择出基变量是由最小比值原则确定.而对偶单纯形法是先出后进，即先选择出基变量，后选择进基变量，选择出基是基解列 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 负分量对应的变量出基，选择进基是按最小比值原则确定.

（4）换基迭代时最小比值的计算方式不同.单纯形法是用基解列 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 的各分量与进基变量 x_s 所在系数列 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_s$ 各正分量对应相比，求出比值最小的确定主元，而对偶单纯形法是用检验数行 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$ 各元素与出基变量 x_r 所在行各负元素对应相比，求出比值绝对值最小的确定主元素.

6. 对偶解的经济含义和影子价格在市场决策中的作用

对偶解 y_i 的经济意义是第 i 种资源在最优决策下的边际价值，也就是第 i 种资源的影子价格.

影子价格是在最优生产方案下对单位第 i 种资源的一种估价，这种估价不是该种资源的市场价格.在市场决策时，当第 i 种资源的市场价格低于影子价格 y_i 时，可适量买进这种资源，组织和增加生产；相反，当市场价格高于影子价格时，可以卖出资源而不安排生产或提高产品的价格.有效利用资源的影子价格指导经济活动是有积极意义的.

7. 线性规划问题的优化后分析的任务

（1）面对市场价值系数 c_j 发生变化，或资源限量 b_i 发生变化，或增加新产品，或增加新约束条件，或技术消耗系数 a_{ij} 发生变化时，目前的最优基是否仍最优（即目前的最优解是否变化）？

（2）为保持目前最优基仍为最优基，参数 c_j,b_i,a_{ij} 的允许变化范围是什么？

优化后分析的方法是在目前最优基相应的单纯形表 $T(\boldsymbol{B})$ 的基础上进行的.即当参数 c_j,b_i,a_{ij} 中的某个发生变化时，通过改变 $T(\boldsymbol{B})$ 中的局部数据，考察是否影响以下两组数据的成立：

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\geqslant 0.\end{cases}$$

8. 运输问题是一类特殊的线性规划模型

产销平衡运输问题的一般模型为

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,j=1,2,\cdots,n\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

平衡运输问题的基变量为 $m+n-1$ 个，其解可用表上作业法求得.

表上作业法的求解步骤为：

第一步：用最小元素法（或伏格尔法）确定初始调运方案. 数格的个数为 $m+n-1$ 个.

第二步：用闭回路法或用位势法求检验数.

（1）用闭回路法求检验数. 空格 x_{ij} 的检验数 σ_{ij} 等于对应于 x_{ij} 的闭回路中奇顶点运价之和减去偶顶点运价之和. 即

$$\sigma_{ij} = \text{奇顶点运价之和} - \text{偶顶点运价之和}.$$

（2）用位势法求检验数. 首先建立由数格构成的一组方程组 $u_i+v_j=c_{ij}(i,j\in J_B)$，该方程组中含一个自由变量，令其中某个为任一确定的值，可得到方程组的解 u_i 和 $v_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，再用公式 $\sigma_{ij}=(u_i+v_j)-c_{ij}$ 计算空格 x_{ij} 相应的检验数.

第三步：最优调运方案的判别. 若所有 $\sigma_{ij}\leqslant 0$，则对应的方案为最优方案，停止计算；否则转第四步.

第四步：用闭回路法调整方案. 最大调整量 $\theta=\min\{$闭回路中奇数拐角点的运量$\}$. 调整方法是：在闭回路上的各顶点按奇数拐角顶点 $-\theta$，偶数拐角顶点 $+\theta$. 此时若有几个顶点运量同时为 0，则只能让一个运量为 0 的变量为空格，其余仍为数格，此时数格的运量为 0. 这样才能保持基变量为 $m+n-1$ 个. 转第二步.

产销不平衡运输问题的处理方法是：当总产量大于总销量时，虚设一个销点，其对应的运费为 0，其销量＝总产量－总销量，从而化为平衡运输问题求解. 而当总销量大于总产量时，虚设一个产点，其对应的运费为 0，相应产量＝总销量－总产量，同样化为平衡运输问题来求解. 注意此时虚设点所对应的运费 0 不作为初始方案中的最小元素处理.

9. 目标规划模型的一般形式

$$\min Z = \sum_{r=1}^{L} P_r\Big(\sum_{k=1}^{K}(w_{rk}^{-}d_k^{-} + w_{rk}^{+}d_k^{+})\Big)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k, k = 1,2,\cdots,K \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n; d_k^{-}, d_k^{+} \geqslant 0\end{cases}$$

线性目标规划模型的求解采用单纯形法求解. 此时对应的单纯形表中，检验数不再为一行，而是一个矩阵. 判断最优的准则是：检验数矩阵中每一列若有非零元，且从上至下第一个非零元为负数，则所对应的解为满意解.

10. 评价相对有效性的 DEA 模型

首先建立每一个决策单元的 DEA 模型，再通过单纯形法求每一个相应 DEA 模型的解，根据最优解的情况（$\theta<1,\theta=1$），判断该决策单元是否 DEA 有效.

2.2 主要解题方法和典型例题分析

1. 线性规划模型的建立

例 1 生产计划问题.

某车间在每个生产期5天所需要的某种刀具的统计资料如下：

日期	1	2	3	4	5
刀具数	120	85	160	145	300

每一把刀具成本为0.6元.用过的刀具送到机修车间研磨，每把刀具需要花费0.20元(考虑内部核算).刀具每天用过后，如果立即送去磨，两天后可以磨好送回，供当天的需用.第5天后，刀具应全部换新，每期开始时，该车间没有任何刀具.问这个车间需要多少刀具才能应付需要，而成本又最低？试建立其线性规划模型.

解 问题分析：

(1) 问题要确定的是每期5天需要新刀具的总数.它等价于要确定每天所需用的新刀具数，同时考虑到刀具用过后.可送去研磨，两天后送回供第3天使用.为此，设决策变量$x_i(i=1,2,3,4,5)$为第i天使用的新刀具，$y_j(j=1,2,3)$为第j天送去研磨的刀具数.

(2) 确定目标函数

由于刀具所花费的成本是由两部分组成的，即新刀具总数的成本$0.6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$和送去研磨的刀具总数所需费用$0.2(y_1+y_2+y_3)$.因此，目标所要求的成本最低就是：

$$\min Z = 0.6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+0.2(y_1+y_2+y_3)$$

(3) 确定约束条件

由于送去研磨的刀具第3天才能使用，所以第1、2天所使用的只能是新刀具，即

$$x_1=120, x_2=85.$$

从第3天起，每天使用的刀具可以是新的，也可以是磨好后送回的，所以有：

$$x_3+y_1=160, x_4+y_2=145, x_5+y_3=300.$$

同时，在每期的头3天送去研磨的刀具数应分别满足：

$$y_1\leqslant 120,$$
$$y_2\leqslant 85+(120-y_1),$$
$$y_3\leqslant 160+(120-y_1)+(85-y_2).$$

显然，每天使用新刀具数x_i和送去研磨的刀具数y_j都是非负的整数，即：

$$x_i\geqslant 0, y_j\geqslant 0, \text{且均为整数}.$$

综上所述，该生产计划问题的数学模型为：

$$\min Z = 0.6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+0.2(y_1+y_2+y_3),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 & =120 \\ x_2 & =85 \\ x_3+y_1 & =160 \\ x_4+y_2 & =145 \\ x_5+y_3 & =300 \\ y_1 & \leqslant 120 \\ y_2 & \leqslant 85+(120-y_1) \\ y_3 & \leqslant 160+(120-y_1)+(85-y_2) \\ x_i\geqslant 0 & (i=1,2,3,4,5)\text{ 且皆为整数} \\ y_j\geqslant 0 & (j=1,2,3)\text{ 且皆为整数}. \end{cases}$$

例 2 合理下料问题.

某工厂生产某一种型号的机床，每台机床上需要 2.9m、2.1m、1.5m 的轴，分别为 1 根、2 根、1 根. 这些轴需用同一种圆钢制作，圆钢的长度为 7.4m. 如果要生产 100 台机床，问应如何安排下料，才能用料最省？试建立其线性规划模型.

解 问题分析：

对于每一根 7.4m 长的钢材，可有若干种下料方式把它截取成我们所需要的轴，比如可在 7.4m 长的钢材上截取 2 根 2.9m 的轴和 1 根 1.5m 的轴，合计用料 $2.9\times2+1.5=7.3$m，残料则为 0.1m. 现把所有可能的下料方式列于表 2.2 中.

表 2.2

各方式下的轴的根数 \ 下料方式 \ 轴	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	轴的需要量
2.9m	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1m	0	0	2	1	2	1	3	0	200
1.5m	1	3	0	1	2	3	0	4	100
残料	0.1	0	0.3	0.9	0.2	0.8	1.1	1.4	

(1) 确定决策变量

问题所要确定的是每种下料方式应各用多少根 7.4m 的圆钢. 于是设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8 分别为按 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6、B_7、B_8 方式下料的圆钢根数.

(2) 确定目标函数

目标是使总的下料根数最少，即

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8.$$

(3) 确定约束条件

由于每台机床所需不同长度的轴的根数是确定的，因此生产 100 台机床所需 2.9m 的轴 100 根，2.1m 的轴 200 根，1.5m 的轴 100 根. 如果按 B_1 的方式下料，每根圆钢可截取 2.9m 长的轴 2 根，则 x_1 根圆钢可截取 2.9m 长的轴 $2x_1$ 根. 同样地，分别按 B_2,B_3,B_4 方式下料，可在 x_2、x_3、x_4 根圆钢上分别截取 2.9m 长的轴 x_2、x_3、x_4 根. 因此所截下的 2.9m 长的轴的总数应不少于 100 根，即满足约束条件

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100.$$

类似地，所截下的 2.1m 长的轴的总数应满足约束条件 $2x_3+x_4+2x_5+x_6+3x_7\geqslant200$. 所截下的 1.5m 长的轴的总数应满足约束条件 $x_1+3x_2+x_4+2x_5+3x_6+4x_8\geqslant100$.

显然，按每种下料方式的圆钢根数应满足非负要求，且为整数. 即 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\geqslant0$ 且为整数.

综上所述，该问题的数学模型为

$$\min Z = \sum_{j=1}^{8} x_j,$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\
2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 3x_7 \geqslant 200 \\
x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_8 \geqslant 100 \\
x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,8)\text{ 且为整数.}
\end{cases}
$$

例 3 连续投资问题.

某公司有 20 万元资金全部用于投资.投资方案有以下五种,每种方案的投资额不限:

方案 A:五年内每年都可投资,在年初投资 1 元,两年后可收回 1.2 元.

方案 B:五年内每年都可投资,在年初投资 1 元,3 年后可收回 1.3 元.

方案 C:只在第一年初有一次投资机会,每投资 1 元,4 年后可收回 1.4 元.

方案 D:只在第二年初有一次投资机会,每投资 1 元,4 年后可收回 1.7 元.

方案 E:只在第四年初有一次投资机会,每投资 1 元,1 年后可收回 1.4 元.

另外,每年年初若将 1 元资金存入银行,年末可收回 1.07 元.

投资所得收益及银行利息也可以用于投资.

问 公司如何投资才能使到第五年末收回的资金最多?试建立其线性规划模型.

解 问题分析:

(1) 确定决策变量

设 $A_j(j=1,2,3,4,5)$表示第 j 年初按 A 种方案的投资金额;同理,$B_j,C_j,D_j,E_j(j=1,2,3,4,5)$分别表示第 j 年初按方案 B、方案 C、方案 D、方案 E 的投资金额.F_j 表示第 j 年初存入银行的金额.

(2) 确定目标函数

第 1 年初应将 20 万元资金全部用于投资,以后各年,每年初应将前一年末所得投资收益及银行利益全部用于投资,且各项投资在第五年末应全部收回.根据各方案投资规则,可将各年的投资及收益情况归纳如表 2.3.

表中第 6 栏表示第 5 年末(即第 6 年初)所得的各项投资收益,因此目标函数为

$$\max Z = 1.7D_2 + 1.3B_3 + 1.2A_4 + 1.07F_5$$

表 2.3

年份	1	2	3	4	5	6
	A_1— — — B_1— — — C_1— — — F_1— — —	— — — — — — — — — $\to 1.07F_1$	— $\to 1.2A_1$ — — — — — —	 — $\to 1.3B_1$ — — —	 — $\to 1.4C_1$	
		A_2— — B_2— — D_2— — F_2— —	— — — — — — — — — — $\to 1.07F_2$	— $\to 1.2A_2$ — — — — — —	 — $\to 1.3B_2$ — — —	 — $\to 1.7D_2$
			A_3— — — B_3— — — F_3— — —	— — — — — — — $\to 1.07F_3$	— $\to 1.2A_3$ — — —	 — $\to 1.3B_3$
				A_4— — — E_4— — — (F_4— — —	— — — — $\to 1.4E_4$ — $\to 1.07F_4$)	— $\to 1.2A_4$
					F_5— — —	- $\to 1.07F_5$