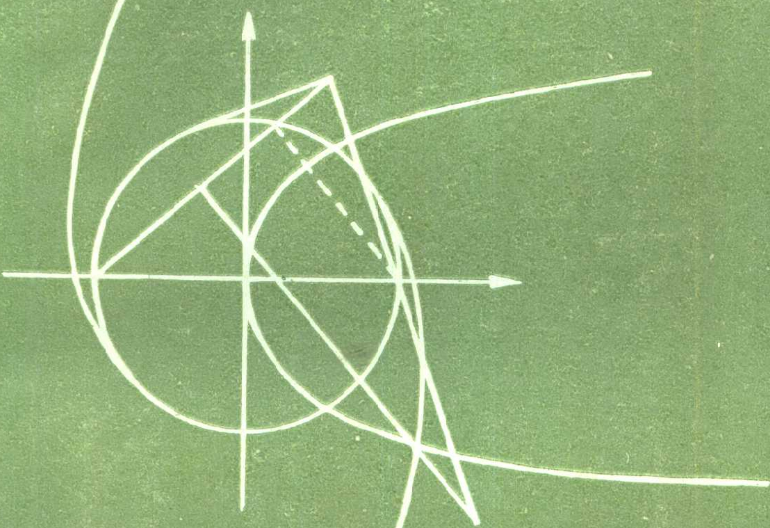
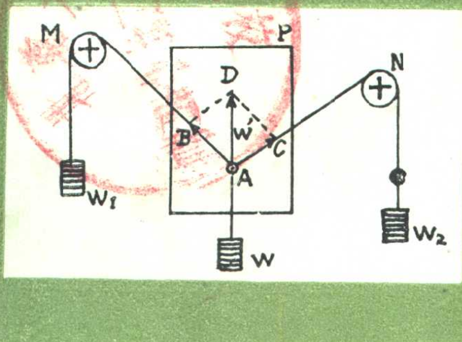
自然丛书（数学）



实用矢量代数



自然丛书(数学)

实用矢量代数

贺霖

内 容 提 要

本书是学习矢量的入门书，详细地介绍了矢量的定义和基本运算，选配了丰富的应用实例。这本小册子着重于应用和计算，同时对数学推理上的逻辑性、连贯性也给予了足够的注意，为读者进一步深入学习创造条件。

本书选材适当，语言简练，通俗易懂，是中学在校学生很好的课外读物，也是职工文化补习的很好用书，还可供中学教师和工程技术人员参考。

自然丛书（数学）

实用矢量代数

贺 霖

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　4.75印张　86千字
1983年6月第1版　1983年6月第1次印刷
印数：1—10,000

书号 13195·93　定价 0.45元

编 者 的 话

矢量在数学基础理论研究方面是一个重要的概念，在科学技术工程中应用非常广泛，是科技人员必备的知识。本书讲的矢量代数，是一般“矢量分析”中的前一部分，因此本书也是学习矢量的入门书。

本书着重于应用和计算，对于数学推理上的逻辑性、连贯性也给予了足够的注意，为读者今后进一步学习创造一些条件。例如，书中强调矢量相等概念的意义和它的具体运用以及与平行移动的关系；指出从几何观点到代数观点的过渡；初步讨论了不变性与坐标系的变换。另外，把一些重要而专门的问题放在附录里予以说明。

书中的例题和习题是很重要的一部分，可以使读者巩固学到的知识。

编　　者

目　　录

一、矢　　量

1．从常见的实例谈起

矢量是一种数学上的抽象概念．这种抽象概念不是人们的凭空想象，而是从一些具体事例中引申出来的．例如，物理学中力的合成问题．据说，关于力的合成所遵循的平行四边形法则是比利时商人斯泰维恩（S. Stevin，1548—1620）首先发现的．有人则说还要早，因为亚里士多德（Aristotle，公元前 384—322）就已经知道这法则了．对这法则，我们可以做如下的实验．如图 1 所示，P 是一块木板，和两个滑轮 M、N 同在一平面上．A 处有一钉，钉上套一小金属环，三根线就接在环上．调节三根线上挂的重量和两滑轮位置的高低，使环与钉不相接触．这时，作用在 A 处但方向不同的三个力 W、W_1、W_2 就平衡了．如果我们在木板上依着线画出方向不同的线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，并使其长度按一定的比例分别代表 W_1 和 W_2 的公斤数，然后作平行四边形及其对角线 $\overrightarrow{AD}$，我们发现线段 $\overrightarrow{AD}$ 的

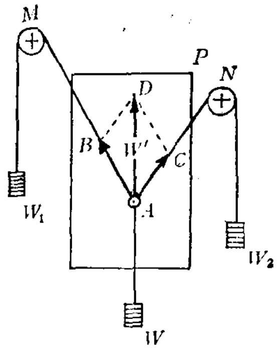


图 1

方向是垂直向上的，其长度正好等于W的公斤数.这就是说，线段$\overrightarrow{AD}$所代表的向上力W'可以看成是W_1和W_2的合力，并与向下的重力W大小相同而方向相反，两者相互抵消。所以原来的三个力W、W_1、W_2在A点就处于平衡状态。

物体位移①的合成问题比上例更直观。如图2所示，P是可以移动的平台，上面A处有一物体。如平台向东移动到新位置P'，而物体在平台上静止不动，那么相对于地面来讲，物体移动的位移就是AA'。这个位移很容易用有方向的线段$\overrightarrow{AA'}$（简称有向线段）来描述。又如平台保持不动，而物体在平台上以向南偏东的方向移动至B，那么相对于地面来讲，这一移动可以用有向线段$\overrightarrow{AB}$来描述。如果再设想当平台由P移动至P'，而物体也同时在平台上由A移动至B，那么相对于地面来讲，物体最终将到达B'，物体的总位移就是以$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AA'}$为邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{AB'}$，于是位移$\overrightarrow{AB'}$就很自然地被定义为两个位移$\overrightarrow{AA'}$与$\overrightarrow{AB}$的合成。显然，如果物体与平台不同时移动，而是先后进行，则该物

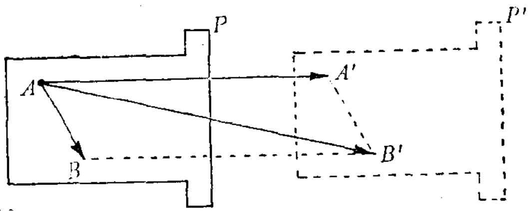


图2

① 物体在空间位置上所移动的有方向的距离称为位移。

体相对于地面的总位移还是一样的。

2. 矢量的定义

从上面两个实例来看，我们可以得到这样三点印象，从而初步形成矢量的概念。

第一，物理学中有些物理量如力、位移、速度等既有数量大小，又有作用方向。也就是说，这些物理量是由大小和方向两个因素同时决定的。对于它们，方向与大小同等重要，缺一不可。

第二，这些量很自然地可用一个有向线段（或称箭头）来具体表示。箭头的长度正比于这个量的大小，箭头的方向指示这个量的方向。例如某有向线段可以代表某方向 100 公斤的力，如果力是 50 公斤，方向不变，那么，表示该力的有向线段就只有原来的一半长。这样的量就称为矢量（或向量）。或者，把用来表示这种量的有向线段叫做矢量。

第三，设有两个矢量作用于一点，我们就可以在该点找出另外一个单独的矢量，使这一个矢量的作用与原来两个矢量合起来的作用相同，我们称这种作法为矢量的合成，并称这单独的矢量为原两矢量的合成矢量。矢量的合成遵循着平行四边形法则，而不是简单的数量上的相加。如把平行四边形的两条邻边代表两个给定矢量的大小和方向，那么通过公共点的那条对角线就代表其合成矢量的大小和方向。

综上所述，我们可以把常见的简单物理量分为两大类。

一类是只用数量的大小来表示的，例如一个盒子的体积是15立方厘米或一天某时的温度是25℃，这些数通常都是用带刻度的工具实际测量出来的，这种量称为标量．另一类的物理量则不能单用一个数来说明，因为它们还有方向．例如，力、位移、速度就是这样的．又如，在气象预报中，不仅要报风速是几级，而且还要说明是什么方向的风．为了完整地刻划这些量，我们必须同时说明它们的大小和方向．除此之外，它们还有一个十分重要的共同特征，那就是，它们的合成遵循着平行四边形法则．

由此，我们就导出下面矢量定义：矢量既有数量大小，又有作用方向，它们的合成遵循平行四边形法则．矢量可用有向线段来具体表示．

3．矢量的图示法　矢量的类型

我们看到，一个矢量很自然地可用一个有一定长度和一定方向的线段（或箭头）来具体表示（图3）．这里A称为起点，B称为终点．AB之长表示这矢量的大小；从A到B表示这矢量的方向．要注意，从A到B不同于从B到A，它们的方向正好相反．

图3

为了书写方便，常用一个小写黑体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$……或用一个上边附加小箭头的小写字母$\vec{a}$、$\vec{b}$……来代表．

如果只考虑矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小(长度)，则是一个数，记为 $|\boldsymbol{a}|$，称为矢量的模。

长度为 1 的矢量称为单位矢量，或幺矢。这是一个重要的概念，今后在运算中经常用到。

长度为 0 的、即起点与终点重合的矢量称为零矢量，记为 $\boldsymbol{0}$。零矢量的方向是不定的。

在这里，我们要引进一个十分重要的概念，即矢量相等的概念。它是在今后矢量作图时必须用到的。在数学意义上所谓两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}'$ 是相等的，就是只要它们的长度和方向相同，而不管它们在空间的位置如何。或者说，不管用来代表它们的箭头是从空间哪一点画起的。因此，一个矢量可以在作图示用的空间里进行任意的平行移动而仍保持不变，图 4 中，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}''$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'$。实际上，这样的定义是很自然，也很合理的。如图 5 所示，车 A 和车 B 朝东北方向以每小时 15 公里的速度前进。这时我们就可在纸上任意选择两点作为起点，画两个平行的、长度相等的箭头来代表它们，

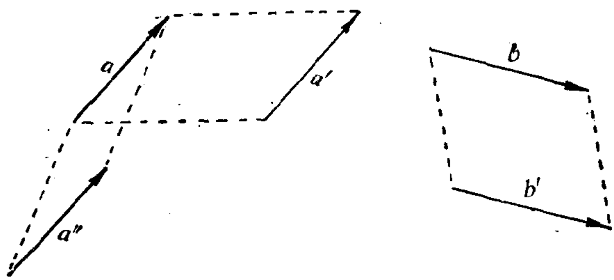


图 4

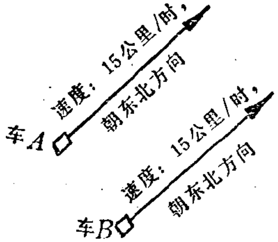


图 5

我们就说这两个速度矢量相等．另外，从常识上讲，站在A车上看B车，或站在B车上看A车，显然都会感觉对方静止不动；这也是对这两个速度矢量相等的直观解释。

最后，还应着重指出，对矢量相等概念作这样的规定，乃是数学上矢量运算的需要．所以，切勿把矢量运算中箭头从图上哪点画起，与具体物理问题中该矢量作用在物体的哪点上这两件事混为一谈，因为数学意义上相等的两个矢量有时却会产生完全不同的物理作用．换言之，数学上两矢量的相等与物理上两矢量的作用相同是截然不同的两种概念。如图 6 中，力a分别作用于P点和Q点，会使棒的转动方向不同．解决具体问题时，我们要分别按数学和物理各自的要求，正确进行处理。

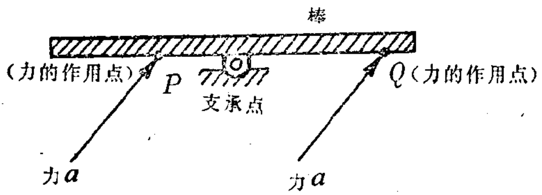


图 6

所谓矢量的类型，主要是按数学和物理这两种不同意义来划分的。

第一类叫自由矢量(图 7)。这种自由矢量是就数学意义

而言，因为这些矢量画在空间的位置是自由的，任意的。它们实质上就是符合上述矢量相等定义的矢量。对于它们，箭头的起点在空间的位置可任意选择（如点P或点Q）；整个箭头在空间可以作平行移动，而仍保持不变。

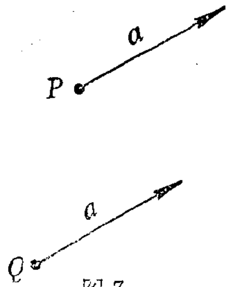


图 7

第二类叫滑动矢量(图 8)。例如作用于一刚体上的诸力是矢量，但这些矢量只能限制在一条直线上，即在各力的作用线上滑动，否则任何平行移动将会改变它们的力学作用。我们称限制在一条规定的作用线上的矢量为滑动矢量，显然这是就物理意义而言的。两个滑动矢量只有当它们的长度和方向相同而又在同一条线上时，才称为相等。

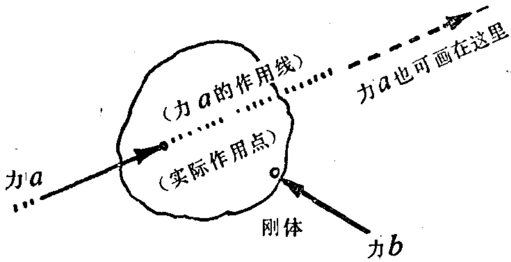


图 8

第三类叫固定矢量(图 9)。这也是就物理意义而言的。这种矢量在空间的位置完全由它们所联系的物体的各点来决定，所以是固定的。它们既不能平移，也不能滑动。例如，作用于一弹性体各点上的力，就是固定于各该点的，因为它

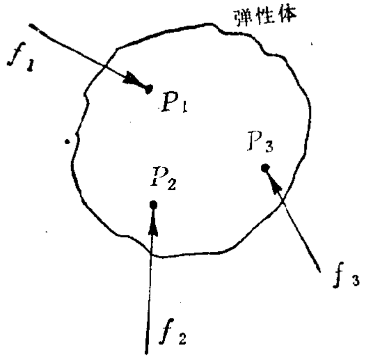


图 9

们的平移或滑动，都会改变该物体的受力状态。两个固定矢量只有当它们的长度、方向和作用点三者完全相同时，才是相等的。

如不作特殊说明，本书后面所讨论的矢量都是自由矢量。

二、矢量的代数运算（一）加法和数乘

矢量的代数运算，基本上说，包括四个方面，即矢量的相加，矢量的数乘，矢量的内积和矢量的外积。这种矢量与矢量、矢量与实数进行代数运算的结果，将会产生新的矢量或新的实数，用以解决各种实际问题。

1. 矢量的相加

根据以前所举矢量合成的实例以及矢量相等的定义，我们自然就引伸出矢量相加的概念：矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 相加，其和是一个新矢量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．它们几何作法是：通过平行移动，先把两矢量的起点放在一起，再以有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$，以 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\boldsymbol{b}$，于是表示这两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的有向线段，就是以 OA、OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线 OC（图 10）。象这样由矢量 $\boldsymbol{a}$ 加矢量 $\boldsymbol{b}$ 作出矢量和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的法则称为矢量加法的平行四边形法则。

此外，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 之和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可用下面这种方法作出来：以表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 作为起点，作出表示 $\boldsymbol{b}$ 的 $\overrightarrow{AC}$，那么，有向线段 $\overrightarrow{OC}$ 所表示的矢量就规

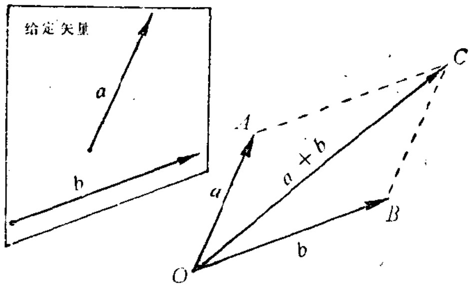


图 10

定为它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 11）。这种法则为矢量加法的三角形法则。显然，它与上述平行四边形法则是完全一致的。

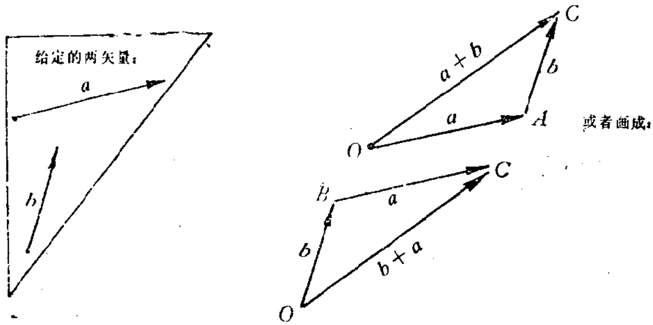


图 11

这样，矢量加法满足

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

就很明显了(图 12)。这就是说，在矢量加法中，相加的先后次序是无关的，即矢量加法满足交换律。

如果求三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的和，就按照平行四边形法则

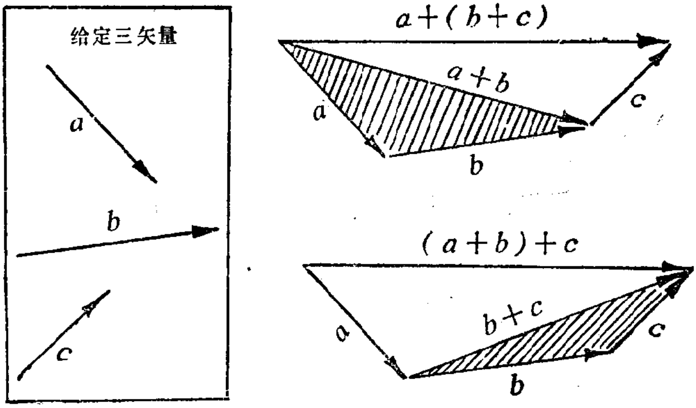


图 12

或三角形法则作出矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，然后对它再按上述法则加上 $\boldsymbol{c}$，即作出 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 就行了．从图 12 很容易看出

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

这就是说，矢量加法满足结合律．关于三个以上矢量之和，可以同样按此方法来进行．

由上述矢量相加的交换律和结合律，我们很容易得知如下事实：任意个矢量之和与它们相加的先后次序，或先把它们组成某些部分矢量和的方式无关．

为了作任意个矢量之和，我们只要作这样一条折线，使它的各有向线段以任意顺序代表各矢量，于是从这折线的起点画至这折线的终点的有向线段就代表所求矢量之和．如 A、B、C、……G、H 是该折线的顶点(图 13)，那么

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\cdots\cdots+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AH}.$$