科學圖書大庫

向量、張量與群

譯者　葉哲志　　陳弘毅

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鑑

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日三版

向量、張量與群

基本定價 1.60

葉哲志　國立臺灣師範大學理學士
陳弘毅　國立臺灣師範大學理學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686、7815250號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

原　序

本書（共三册）是從V' 'eregaende Matematik 改訂增補的，其第一版發行於 1960 年，本書著作原是爲化學家，生物化學家和醫師的基本研究而寫的。

原先本書特別的目的是爲將在物理化學及生物物理學方面，作更深一層的研究與探討者，提供必要的數學知識。事實上，因本書也可以用於其他方面，因此現在增加一些資料後，相信其用途將更爲廣泛。

爲科學家在數學方面編寫一本書，一方面要在嚴密與基本知識之間找出一相當的均衡，另一方面要立即闡述其可用性。爲達此目的，我們計劃採取下列的步驟：全書中將十分正確地以公式表示已獲得的結果——即使其證明省略。然而，此方法有些改變：即在本書開始時，吾人使用較嚴密的數學公式，在後半部裡，若在許多物理和化學的教科書中已十分普遍的公式，則以較不嚴謹的公式表示之。

第一册包含向量、張量和群，若沒有微積分的知識亦可讀之。由我們的經驗知：若每週授課兩小時，則第一册能在一學期內授畢，第二册爲多（實）變量函數論，在此册中時常用到向量的概念，而且在第四章的後半部用到矩陣及張量的概念。若每週上四小時，則一學期即可上完第一册及第三册的一部分，這樣即可奠定微積分的基本知識。第三册包含高等微積分方面的教材：級數、微分方程、複數函數和數值計算法，本册與其他兩册所述的特殊公式無多大關係，但需要有關矩陣的特徵值及多變量函數的知識。若每週講授四小時，則一學年可研讀第 1.3.4.5 章及第 6.8 章的一部分。

對於附有星號（*）之習題則給予解答。本書也包含許多實例，這些例子構成本書一重要部分，記號□表示例題做完而主要課文又開始，在每一册後面，列舉一些參考書，讀者在研讀該部分時可同時讀那些書或讀完該册後再讀之，將有莫大的助益。

感謝 Brian Phillips 和 Peeter Kruus 兩位博士翻譯此書的一大部分，及 H. Rosenberg 教授對原稿的許多指正與勸告，本書若有錯誤或贊

解處，不應該責難他們，又 Barbara Zeiders 對原稿有價值的建議及無限的辛勞，Lise Seifert 女士打首稿，及 Emmy Christiansen 小姐打最後的抄本，在此一一誌謝！

Thor A. Bak
Jonas Lichtenberg
於丹麥哥本哈根

目　錄

原序

1. 向量與張量 …… 1

1－1　平面 …… 1

二維向量 …… 1

乘以實數，加和減 …… 2

內積 …… 3

坐標系 …… 5

解析幾何 …… 7

坐標系的變換 …… 9

1－2　三維空間 …… 14

三維向量 …… 14

外積 …… 14

坐標系 …… 15

解析幾何 …… 17

幾個向量恒等式 …… 19

坐標系的變換 …… 20

1－3　向量與純量 …… 24

平面幾何爲立體幾何的特例 …… 24

向量表示法 …… 24

純量　內積 …… 25

向量　外積 …… 26

1－4　N維向量 …… 27

向量的定義 …… 27

向量的運算 …… 28

線性獨立 …… 29

一向量組的基底 …… 30

Ⅱ

線性向量空間……31
1－5 **行列式**……33
行列式的定義……33
餘因子與餘子式……35
行列式之性質……37
1－6 **線性方程式**……40
問題的解法……40
特殊情形下的解法……41
齊次方程式……42
1－7 **矩陣**……44
向量的矩陣表示法……44
線性向量函數……45
方陣的運算……47
一般矩陣的運算……50
特殊矩陣……51
反矩陣……52
正交矩陣……54
2階和3階的正交矩陣……55
1－8 **向量與張量**……60
在二維和三維的坐標變換……60
在N維的坐標變換……61
向量……62
張量……63
方陣的兩種用法……66
幾個一般評論……67
1－9 **對角化**……69
問題的形式……69
特徵值問題……70
問題的解……70
相似矩陣……71
矩陣函數……72
在二維中二次形式的簡化……73
在三維中二次形式的簡化……76

1－10 複數……81
複數的運算……81
多項方程式的複數根……82
複數矩陣……84
複係數的線性方程式……84
2.群及群表示法……88
2－1 引言……88
群的概念……88
有限群……89
無限群……91
子群……92
同構，抽象群……92
2－2 有限抽象群……96
一元素的階……96
有限子群……96
母數集與定義關係……97
兩群之直積……98
共軛元素的類……99
2－3 群表示法……101
等價表示法……103
既約表示法……104
單式表示法……105
特徵標……110
2－4 一些重要的有限群……115
循環群與二面體群……115
排列群……116
1～8 階群的勘察……117
群論的應用……119
索 引……121
英漢名辭對照表……124
參考書目……128

1. 向量與張量

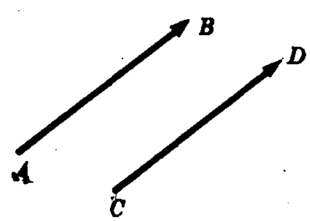
1－1 平面

二維向量

本節我們將討論一些幾何概念與平面的關係，然後推廣到空間。

吾人定義**正常二維向量**(proper two-dimensional vector)爲在一平面上之一有向線段，一向量由其**始點**(initial point)與**終點**(termial point)而決定之，若其分別以A和B表示，則此向量以**AB**表之，在決定單位長後，其長度以|**AB**|或AB表之。一向量通常以一小寫英文字母如**p**表之，此時其長度記爲|**p**|或p。圖示時，一向量的**方向**(direction)須於其終點處畫一箭頭以表示之。

若兩向量中之一向量能平移與另一向量吻合時，則稱此兩向量**等値**(equivalent)，即此兩向量有相同的方向與相同的長度。在這種情形下，平面上所有的向量所成之集合可分爲好幾類彼此等値的向量，吾人視等値向量爲相等——如同表示相同的**自由向量**(free vector)，已知一向量**a**及一點P，則恰有一以P爲始點的向量**PQ**，使**PQ**＝**a**，則向量**PQ**稱爲從點P畫向量**a**所得的結果(圖1-1)。



AB = **CD**

圖 1-1

任意一點 A 可視為一**退化向量**(degenerate vector) **AA**。A 是此向量的始點和終點，其長度為 0 且沒有方向。所有退化向量可視為等值——如同所謂的**零向量**(zero vector, null vector)，以 **0** 表之，一向量其長度為 1 者稱為**單位向量**(unit vector)，因此有無數多個不同的單位向量。

乘以實數、加和減

今定義（自由）向量之三個數學運算：向量乘以實數，兩向量之加法及兩向量之減法。

設 k 為任一實數，**a** 為任一向量，若 $k=0$ 或 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 則積 $k\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{a}k$ 定義等於零向量；在所有其他情形中 $k\mathbf{a}$ 或 $\mathbf{a}k$ 為一**正常向量**(proper vector)，其長為 $|k||\mathbf{a}|$，若 $k>0$，則其方向與 **a** 之方向相同，否則相反。向量 $(-1)\mathbf{a}$ 簡記為 $-\mathbf{a}$，且稱其為 **a** 的**相反向量**(opposite vector)（圖 1-2）

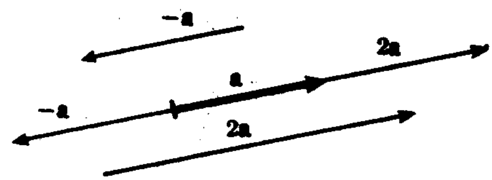


圖 1-2

若 **a** 和 **b** 為任意兩向量，則**向量和**(vector sum) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 之定義如下：從任一點 P 作向量 **PQ**，使 $\mathbf{PQ}=\mathbf{a}$，再從點 Q 作向量 **QR**，使 $\mathbf{QR}=\mathbf{b}$，則向量和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 即為 **PR**（圖 1-3）。

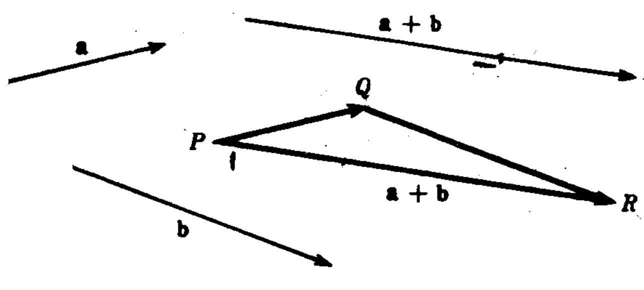


圖 1-3

由以上所定義的數學運算，甚易了解在實數的運算中有許多相同的規則亦同樣成立。

交換律：$k\mathbf{a}=\mathbf{a}k$；$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

結合律：$(kl)\mathbf{a}=k(l\mathbf{a})$；$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

分配律：$(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$；$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+l\mathbf{b}$.

設 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 爲兩已知向量，從任一點 P 作兩向量使 $\mathbf{PQ}=\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{PS}=\mathbf{b}$，則平行四邊形稱爲由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所產生的。對角向量 $\mathbf{PR}$ 爲兩已知向量之和，而對角向量 $\mathbf{QS}$ 爲向量方程式 $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的唯一解。此解以 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$（$=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$）表之，並稱其爲向量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}$ 之差(difference)（圖 1-4）。

由上述性質可知，正如同實數系中的運算，吾人可化簡較複雜的向量式。然而與實數系中的運算有一顯著的差異爲在乘法運算中必恰有一因子爲向量，另一因子爲實數，則其積亦爲一向量。

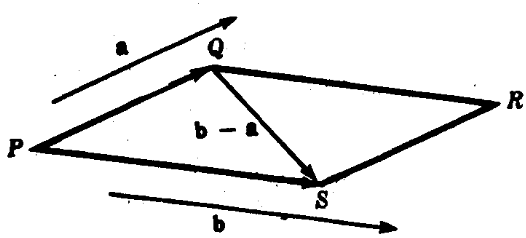


圖 1-4

內積

設平面上任意兩向量爲 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，其**內積**(inner product，**數積** scalar product 或**點積**dot product），$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 定義爲一數。若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 中有一爲零向量，則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$；否則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|a||b|\cos v$，其中 v 爲 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之夾角。數積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ 簡記爲 $\mathbf{a}^2$；$\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2=a^2$。若 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，則稱兩向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 爲**正交**(orthogonal)。若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均爲正常向量，則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ 表示 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互相垂直。

若兩正常向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夾角爲銳角，則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$；否則 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$。總之，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 之絕對値等於 $|\mathbf{a}|$ 與 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上正射影之長的乘積，或是 $|\mathbf{b}|$ 與 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上正射影之長的乘積（圖 1-5）。

下列應用到內積的幾個基本規則甚易了解：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$，$(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=$

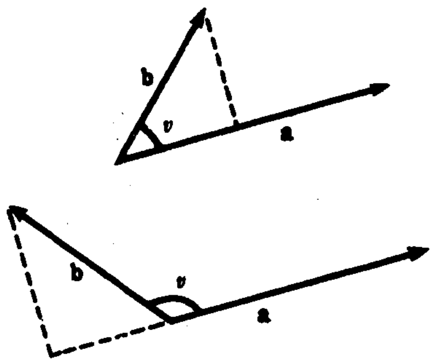


圖 1-5

$k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$。結合律的純內積形式是沒有意義的，如$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$，即一數$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$和一向量$\mathbf{c}$的內積，而$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$和$\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$則有意義，因爲它們分別平行向量$\mathbf{c}$和$\mathbf{a}$，故一般而言它們彼此是不同的。然而，分配律是成立的：$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, 因若$\mathbf{a}=\mathbf{0}$，則等號兩邊均爲$\mathbf{0}$。若$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$，則向量$\mathbf{b}+\mathbf{c}$在$\mathbf{a}$上的正射影等於向量$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$在$\mathbf{a}$上正射影的和（圖1-6）。

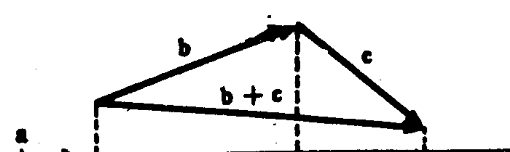


圖 1-6

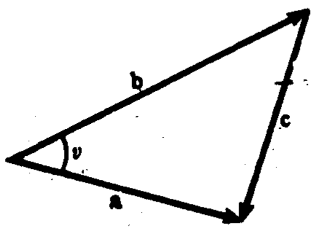


圖 1-7

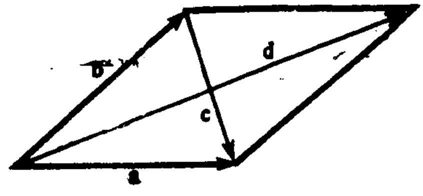


圖 1-8

例1-1.　$\mathbf{c}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，即爲餘弦定律：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos v$（圖1-7）。　□

例1-2.　$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$，當 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ 時，則此平行四邊形爲一菱形，故 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=0$，即一菱形的對角線是相互垂直（圖1-8）　□

坐標系

今介紹平面上的坐標系，首先討論**一般平行坐標示**（general parallel coordinate system)，取不在同一線上的任意兩正常向量爲 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$，此兩向量稱爲**基本向量**（base vector）；次取一點 O，從點 O 畫兩向量分別爲 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$，則 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 決定此坐標系的方向軸，此兩軸分別稱爲 X 軸和 Y 軸，點 O 稱爲此坐標系的原點。平面上之正向旋軸爲從 X 軸向 Y 軸方向之旋軸（逆時針方向）（圖1-9）。

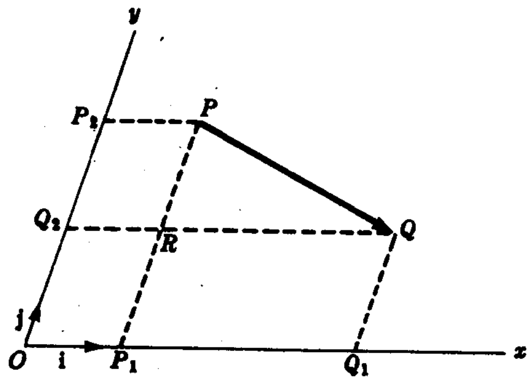


圖 1-9

任一（自由）向量 $\mathbf{PQ}$ 是唯一由一有序實數對 (x, y) 所決定的，(x, y) 爲向量的坐標：當 $\mathbf{P_1Q_1}$ 是 $\mathbf{PQ}$ 平行 Y 軸在 X 軸上的射影時，則已知向量的 X 坐標（橫坐標）可由方程式 $\mathbf{P_1Q_1}=x\mathbf{i}$ 求得。同理，當 $\mathbf{P_2Q_2}$ 是 $\mathbf{PQ}$ 平行 X 軸在 Y 軸上的射影時，已知向量的 Y 坐標（縱坐標）可由方程式 $\mathbf{P_2Q_2}=y\,\mathbf{j}$ 求得；因此，吾人可得 $\mathbf{PQ}=\mathbf{PR}+\mathbf{RQ}=\mathbf{RQ}+\mathbf{PR}=\mathbf{P_1Q_1}+\mathbf{P_2Q_2}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$。因此，向量 $\mathbf{PQ}=(x, y)$ 爲基本向量的**線性組合**（linear combination)，其係數之大小由坐標而決定。$\mathbf{PQ}$ 稱爲沿 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的方向可

被分解成兩分量。

本書除了少數例外之外，均採用 **通常直角坐標系**(usual right-angled coordinate system)，此即以兩垂直的單位向量爲基本向量：$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=1$ 及 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$。

今吾人甚易以坐標形式表示前面所介紹的向量運算。設 $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ 則

$$
\begin{aligned}
k\mathbf{a} &= k(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})=(ka_1)\mathbf{i}+(ka_2)\mathbf{j}=(ka_1,ka_2),\\
\mathbf{a}\pm\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})\pm(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j})=(a_1\pm b_1)\mathbf{i}+(a_2\pm b_2)\mathbf{j}\\
&= (a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2),\\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j})\\
&= a_1b_1\mathbf{i}^2+a_2b_2\mathbf{j}^2+(a_1b_2+a_2b_1)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=a_1b_1+a_2b_2
\end{aligned}
$$

一向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ 之長爲 $a=\sqrt{a^2}=\sqrt{\mathbf{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ，兩向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之夾角 v 可由下式求得

$$\cos v=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

最後由方程式 $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ 分別與 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的內積可得 $\mathbf{a}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}$，這裡有關坐標系形式的特別假設僅用於與內積有關係者。

今平面上點 P 的坐標可定義爲從原點 O 到點 P 之 **位置向量**(position uector) $\mathbf{OP}$ 的坐標，設兩點 P 和 Q 之坐標爲 $P=(x_1,y_1)$ 和 $Q=(x_2,y_2)$，則向量 $\mathbf{PQ}$ 的坐標即爲此向量終點與始點之坐標差：$\mathbf{PQ}=\mathbf{OQ}-\mathbf{OP}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$。兩點 P 和 Q 的距離 $PQ=|\mathbf{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$（圖 1-10）。

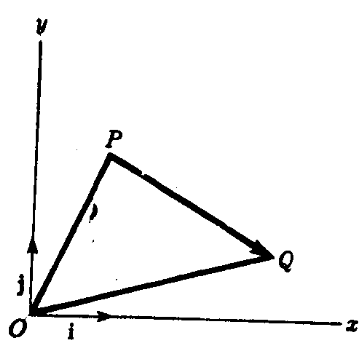


圖 1-10

解析幾何

設直線 l 上一已知點爲 $P_0=(x_0,y_0)$，l 之一**法線向量**(normal vector)爲 $\mathbf{v}=(a,b)$，l 上之任一點 $P=(x,y)$ 恒可使向量 $\mathbf{P_0P}$ 和 $\mathbf{v}$ 的內積爲0；$\mathbf{P_0P}\cdot\mathbf{v}=(x-x_0,y-y_0)\cdot(a,b)=a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$，即 $ax+by+c=0$，其中 $c=-ax_0-by_0$（圖1-11）。l 上的所有點均滿足此方程式，線 l 外之點均不能滿足之。因此它是直線之一方程式，而 l 是此方程式之圖形。一般而言，x 和 y 之任一方程式 $F(x,y)=0$ 之圖形爲由能滿足 $F(x,y)=0$ 之數對所對應的所有點所形成的。若 $b\neq 0$，則此直線與 Y 軸不平行，故此方程式可表爲 $y=\alpha x+q$，其中 α 爲此直線的斜率。$(1,\alpha)$ 爲平行此直線之一向量。

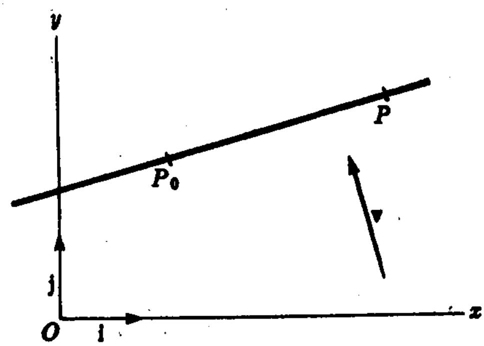


圖 1-11

若一單位向量 $\mathbf{n}=(\alpha,\beta)$，$\alpha^2+\beta^2=1$，用以決定直線 l 之方程式，且所有的項均移至等號的左邊，則稱此方程式爲**正規化**(normalized)：$\alpha x+\beta y+\gamma=0$。此時，平面上任一點 $P_1=(x_1,y_1)$ 至此直線之距離 p 等於將點 P_1 的坐標代入此方程式的左邊：$p=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P_0P_1}=\alpha(x_1-x_0)+\beta(y_1-y_0)=\alpha x_1+\beta y_1+\gamma$。（因 (x_0,y_0) 滿足 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$）。此距離所帶的符號對應於 $\mathbf{n}$ 的方向。

當直線 l 包含一點 $P_0=(x_0,y_0)$ 和向量 $\mathbf{u}=(h,k)$ 時，則此直線能以下列之**參數形式**(parametric form)表示：$\mathbf{OP}=\mathbf{OP_0}+t\mathbf{u}$，即

$$x=x_0+ht$$
$$y=y_0+kt.$$

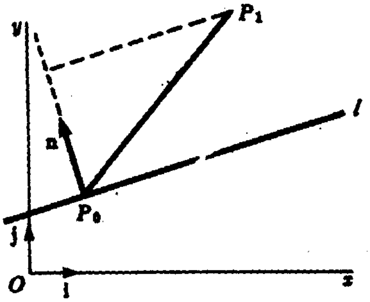


圖 1-12

其中參數 t 為任一實數。若 $\mathbf{u}$ 為一單位向量，此時稱 $\mathbf{u}$ 為**斜率向量**，則 t 表示直線上點 P_0 至點 P 的距離。消去參數即可得此直線之一方程式（圖 1-13）。

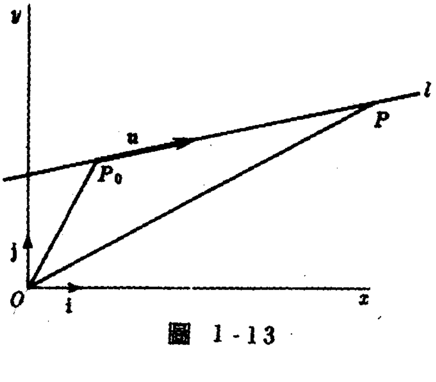


圖 1-13

設 $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ 為平面上任一向量，在此平面上若將 $\mathbf{a}$ 旋轉 $+90°$，則得一向量 $\hat{\mathbf{a}}$，稱向量 $\hat{\mathbf{a}}$ 為 $\mathbf{a}$ 的**叉向量**（cross vector），以坐標表示則 $\hat{\mathbf{a}}=(-a_2,a_1)$。由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所決定之平行四邊形的面積 T 等於 $\hat{\mathbf{a}}$ 與 $\mathbf{b}$ 的內積：

$$T=\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}=-a_2b_1+a_1b_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

此面積的正負視着在此平行四邊形第一個向量 **a** 旋轉至 **b** 的正負而定。

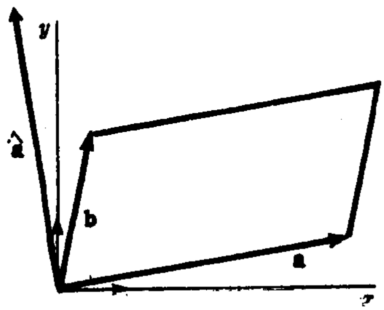


圖 1-14

坐標系的變換

在解決一問題時，若能同時應用一個以上的坐標系，常能使問題易獲得解決。首先求從“舊”坐標系變換到“新”坐標系的公式，此兩坐標系均分別由所予點與向量唯一決定。

吾人先討論兩個一般平行坐標系 XY 和 $X'Y'$，其中在舊（無撇號）坐標系之原點和基本向量為 O，$\mathbf{i}$，和 $\mathbf{j}$，在新（有撇號）坐標系為 O'，$\mathbf{i}'$，和 $\mathbf{j}'$。設一向量 $\mathbf{v}$ 的舊坐標為 (v_1, v_2)，$\mathbf{v}$ 的新坐標為 (v_1', v_2')，則 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} = v_1'\mathbf{i}' + v_2'\mathbf{j}'$。

今令新原點與新基本向量之坐標在舊坐標系分別為 $O' = (x_0, y_0)$，$\mathbf{i}' = (a_1, a_2)$，$\mathbf{j}' = (b_1, b_2)$。若向量方程式以舊坐標表示，則 $v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1'(a_1, a_2) + v_2'(b_1, b_2)$，即

$$v_1 = a_1 v_1' + b_1 v_2'$$
$$v_2 = a_2 v_1' + b_2 v_2'$$

以上諸式是向量從新坐標變換到舊坐標所需的方程式。若由上式兩方程式求 v_1' 和 v_2'，則可得向量從舊坐標變換到新坐標所需的方程式。

若點 P 之舊坐標與新坐標分別為 (x, y) 與 (x', y')，則變換坐標的方程式可由下列向量方程式求得（圖 1-15）：

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}$$