

中等专业学校教学参考书

高等数学

工科中专数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1963年7月第一版 1978年3月第11次印刷

北京: 532,001—732,000册

书号: 13012·0151 定价 0.95元

目 录

绪言	1
----------	---

第一篇 平面解析几何学基础

第一章 坐标法	2
§ 1-1 平面上点的直角坐标	2
§ 1-2 两点间的距离	6
§ 1-3 线段的定比分割	11
第一章总习题	16
第二章 直线	18
§ 2-1 直线的方程的概念	18
§ 2-2 平行于坐标轴的直线的方程 坐标轴的方程	21
§ 2-3 直线的斜角与斜率	23
§ 2-4 直线的方程的两种主要形式	27
§ 2-5 直线的一般方程	30
§ 2-6 两直线的夹角	35
§ 2-7 两直线平行和垂直的条件	39
§ 2-8 两直线的交点	42
第二章总习题	46
第三章 二次曲线	50
§ 3-1 曲线与方程	50
§ 3-2 圆	53
§ 3-3 椭圆	59
§ 3-4 椭圆形状的研究	61
§ 3-5 椭圆的离心率 椭圆与圆的关系	66
§ 3-6 双曲线	70
§ 3-7 双曲线形状的研究	73
§ 3-8 双曲线的渐近线	75
§ 3-9 双曲线的离心率	79
§ 3-10 等轴双曲线	80
§ 3-11 抛物线	84

33596

§ 3-12 抛物线形状的研究·····	86
§ 3-13 二次函数 $y = Ax^2 + Bx + C$ 的图象·····	91
§ 3-14 二次曲线是圆锥截线·····	95
第三章总习题·····	98

第二篇 微分学初步

第四章 极限的理论·····	103
§ 4-1 绝对值概念与有关的基本公式·····	103
§ 4-2 无穷小量·····	108
§ 4-3 无穷大量·····	111
§ 4-4 无穷大量与无穷小量的关系·····	113
§ 4-5 无穷小量的基本性质·····	114
§ 4-6 变量的极限·····	117
§ 4-7 关于变量的极限的基本定理·····	121
§ 4-8 无穷小量的比较·····	126
第四章总习题·····	130
第五章 函数与函数的连续性·····	131
§ 5-1 函数及函数的定义域·····	131
§ 5-2 复合函数·····	137
§ 5-3 基本初等函数与初等函数·····	139
§ 5-4 函数的增量·····	145
§ 5-5 函数的连续性及连续函数的极限的求法·····	148
第五章总习题·····	156
第六章 导数·····	158
§ 6-1 函数的变化率——导数的概念·····	158
§ 6-2 求导数的一般法则·····	164
§ 6-3 曲线的切线 曲线的斜率 导数的几何意义·····	168
§ 6-4 导数的存在与函数连续性的关系·····	172
§ 6-5 求导数的基本公式和法则·····	174
§ 6-6 常量的导数·····	176
§ 6-7 自变量(即函数 $y=x$)的导数·····	176
§ 6-8 函数的代数和的导数·····	177
§ 6-9 两个函数乘积的导数·····	178
§ 6-10 指数为正整数时的幂函数的导数·····	179
§ 6-11 两个函数之商的导数·····	185

§ 6-12 复合函数的导数	188
§ 6-13 当 $z \rightarrow 0$ 时, 比 $\frac{\sin z}{z}$ 的极限	193
§ 6-14 三角函数的导数	195
§ 6-15 数 e 自然对数	200
§ 6-16 对数函数的导数	202
§ 6-17 指数为任何实数时的幂函数的导数	205
§ 6-18 指数函数的导数	206
§ 6-19 反三角函数的导数	209
§ 6-20 二阶导数 二阶导数的力学意义	213
第六章总习题	215
第七章 导数的应用	218
§ 7-1 函数的增减性	219
§ 7-2 函数的极大值和极小值	225
§ 7-3 求函数极值的第一法则	227
§ 7-4 极值的应用问题	232
§ 7-5 曲线的凹凸和拐点	239
§ 7-6 求函数极值的第二法则	247
§ 7-7 函数作图	252
第七章总习题	257
第八章 微分及其应用	260
§ 8-1 函数的微分	260
§ 8-2 微分的几何意义	263
§ 8-3 微分的求法	264
§ 8-4 微分在近似计算上的应用	268
§ 8-5 弧的微分	275
§ 8-6 曲线的弯曲程度——曲率	277
§ 8-7 曲率圆和曲率半径	283
第八章总习题	286
第三篇 积分学初步	
第九章 不定积分	288
§ 9-1 原函数的概念	288
§ 9-2 不定积分	291
§ 9-3 由初始条件决定积分常量	294

§ 9-4 积分法的基本公式和法则	297
§ 9-5 直接积分法	301
§ 9-6 代换积分法	306
第九章总习题	320
第十章 定积分	322
§ 10-1 定积分的概念	322
§ 10-2 定积分的计算公式	329
§ 10-3 定积分的性质	333
第十一章 定积分的应用	338
§ 11-1 平面图形的面积	338
§ 11-2 旋成体的体积	344
§ 11-3 变力所作的功	350
§ 11-4 液体的压力	354
第十一章总习题	359
附 录	
第十二章 极坐标 参变量方程	361
I 极坐标	361
§ 12-1 平面上点的极坐标	361
§ 12-2 曲线的极坐标方程	363
§ 12-3 极坐标方程的作图法	365
§ 12-4 极坐标与直角坐标的关系	369
II 参变量方程	372
§ 12-5 参变量方程的概念	372
§ 12-6 参变量方程的作图法	374
§ 12-7 椭圆、摆线和圆的渐伸线的参变量方程	376
第十三章 简易微分方程	382
§ 13-1 基本概念	382
§ 13-2 可分离变量的一阶微分方程	386
简易积分表及其使用法	394
习题答案	412

绪 言

高等数学和其他学科一样,都是导源于生产实践,并为生产实践服务的。在十七世纪,生产的迅速发展,引出了物理、天文、几何和力学上的一系列问题,而这些问题又不能从初等数学中获得解决,于是就产生了高等数学中的一些基本概念和方法,这些概念和方法是由笛卡儿、牛顿、莱布尼兹等数学家,总结了前人的经验而创立的。在高等数学中,解析几何、微分学、积分学所研究的对象,主要是变化的量(变量)和变化的图形。

本书共分三篇:第一篇平面解析几何学基础;第二篇微分学初步;第三篇积分学初步。

解析几何是通过笛卡儿坐标,用代数方法研究几何图形的一门课程,在这里,代数和几何密切地结合在一起了。

微分学和积分学,通常简称为微积分学,它以无穷小量和变量的极限概念为基础,并由此建立微积分学的基本理论和运算法则。

高等数学是学好技术基础课和专业课的重要工具,我们必须很好掌握它。

第一篇 平面解析几何学基础

解析几何是以代数方法研究几何图形的一门数学，它把几何问题化为代数的计算来研究，使数与形密切地结合起来，这种结合的基本方法是坐标法。

第一章 坐标法

用数表示点的位置的方法叫做坐标法。例如：用一个实数来表示直线上一点的位置；用一对实数来表示平面上一点的位置等，这些在代数里都已经讲过。但坐标法是高等数学中最基本的问题，因此，我们有必要再加以阐述。

§ 1-1 平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的一对实数，叫做这个点的坐标。各种坐标中，最常用的是直角坐标。

在平面上取两条有方向而且互相垂直的直线，这两条直线叫做坐标轴；水平直线 Ox 叫做横轴，铅垂直线 Oy 叫做纵轴，它们的交点 O 叫做坐标原点。并取定一个长度单位^①（图 1-1）。在 Ox 轴上规定由原点起向右为正方向，向左为负方

① 一般两轴上取同一个长度单位，但也可以各取不同的长度单位。

向;在 Oy 轴上由原点起向上为正方向, 向下为负方向。 Ox 轴、 Oy 轴、原点 O , 以及所取定的长度单位全体, 称为直角坐标系或笛卡儿坐标系^①。

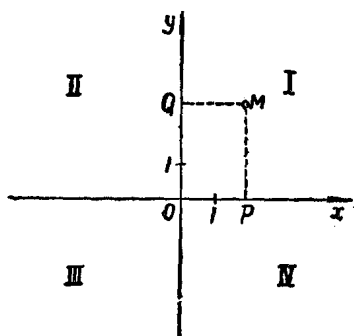


图 1-1

设 M 为坐标平面上任一点, 过 M 点向 Ox 轴及 Oy 轴作垂线, 其垂足分别为 P 和 Q (图 1-1)。用取定长度单位量 OP 所得的数 x , 叫做 M 点的横坐标 (简称横标), 如 P 在 O 点的右边, 横标 x 为正数, 如在左边, 则为负数。

用同样长度单位量 OQ 所得的数 y , 叫做 M 点的纵坐标 (简称纵标), 如 Q 在 O 点的上方, 纵标 y 为正数, 如在下方, 则为负数。

上面所说的一对实数 x 和 y 叫做 M 点的坐标, 记作 $M(x, y)$ 。

因为有了 M 点就确定了 P 点和 Q 点, 随之也就得到唯一的一对实数 x 和 y 。反之, 对于任一对实数 x 和 y , 可以在横轴与纵轴上分别定出 P 点和 Q 点, 从这两点各引垂直于坐标轴的垂线, 就得到它们唯一确定的交点 M 。从这里知道平面上的一点 M 与一对实数 x 和 y 之间有一一对应的关系。

Ox 轴与 Oy 轴将平面分为四部分, 各部分叫做象限。由

^① 笛卡儿是法国的数学家和哲学家, 他总结了前人的经验, 于 1637 年发表过解析几何学的最初著作。

点的两个坐标都为正的那个象限开始，按反时针的方向依次叫做第一，第二，第三与第四象限(图 1-1 中分别用 I, II, III 与 IV 来表示)，那末在各个象限内点的坐标符号如下表所示：

坐 标 \ 象 限	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

坐标法是数与形相结合的基本方法，所以读者应该牢固地掌握下面两个问题的解法：

- 1° 由已知点 M ，求它的坐标；
- 2° 由已知坐标 (x, y) ，求它所确定的点。

例 1. 图 1-2 中的点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ 和 $M_6(x_6, y_6)$ 有坐标：

$$1^\circ \quad x_1 = Q_1 M_1 = OP_1 = +4,$$

$$y_1 = P_1 M_1 = OQ_1 = +3;$$

$$2^\circ \quad x_2 = Q_2 M_2 = OP_2 = -1,$$

$$y_2 = P_2 M_2 = OQ_2 = +2;$$

$$3^\circ \quad x_3 = Q_3 M_3 = OP_3 = -4,$$

$$y_3 = P_3 M_3 = OQ_3 = -3;$$

$$4^\circ \quad x_4 = Q_3 M_4 = OP_1 = +4,$$

$$y_4 = P_1 M_4 = OQ_3 = -3;$$

$$5^\circ \quad x_5 = 0,$$

$$y_5 = OM_5 = +4;$$

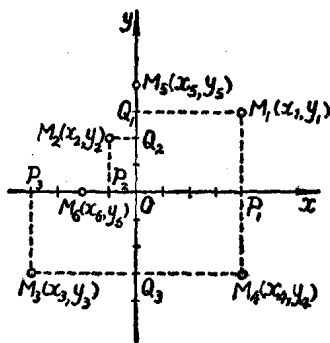


图 1-2

$$6^\circ x_6 = OM_6 = -2,$$

$$y_6 = 0.$$

又从图 1-2 中容易看出来: 如果点在横轴上, 则它的纵标 y 等于零; 如果点在纵轴上, 则它的横标等于零; 如果点与坐标原点重合, 则它的坐标 x 和 y 都等于零。

例 2. 作出下列各点:

$$1^\circ M_1(4, 3);$$

$$2^\circ M_2(-1, 2);$$

$$3^\circ M_3(-4, -3);$$

$$4^\circ M_4(4, -3);$$

$$5^\circ M_5(0, 4).$$

解: 如图 1-3 的作法, 便

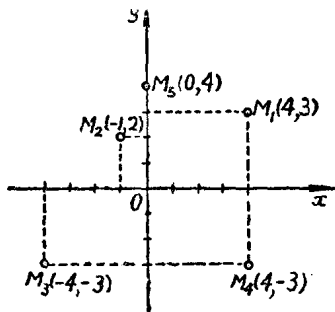


图 1-3

可得出上述各点。

根据平面几何中关于点的轴对称和中心对称的定义, 从图 1-3 中可以看出:

点 M_1 与 M_4 的横标相等, 纵标的绝对值相等而符号相反, 显然它们是关于 Ox 轴对称的;

点 M_4 与 M_3 的纵标相等, 横标的绝对值相等而符号相反, 显然它们是关于 Oy 轴对称的;

点 M_1 与 M_3 的横标及纵标都是绝对值相等, 符号相反, 显然它们是关于原点对称的。

例 3. 如果点 $A(a, 3)$ 是在第二象限内 (图 1-4), 试写出与它关于

1° Ox 轴; 2° Oy 轴; 3° 原点

对称的点的坐标。

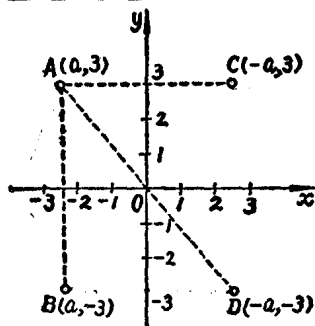


图 1-4

解: 如图 1-4 可知:

1° 与点 $A(a, 3)$ 关于 Ox 轴对称的点 B 的坐标为 $(a, -3)$;

2° 与点 $A(a, 3)$ 关于 Oy 轴对称的点 C 的坐标为 $(-a, 3)$;

3° 与点 $A(a, 3)$ 关于原点对称的点 D 的坐标为 $(-a, -3)$ 。

例 4. 设边长为 4 的正三角形, 它的底边与 Ox 轴重合, 而且这条边的中点是原点。求这个三角形的三个顶点的坐标。

解: 设这个正三角形的第三个顶点 C 落在 Oy 轴的正的一半上(图 1-5)。因为 $\triangle AOC$ 是直角三角形, 且 $\angle CAO = 60^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} OC &= AC \cdot \sin 60^\circ = \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

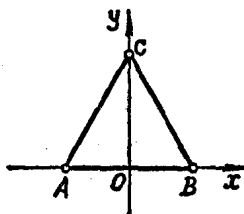


图 1-5

于是三个顶点的坐标分别是: $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 和 $C(0, 2\sqrt{3})$ 。

如果顶点 C 落在 Oy 轴的负的一半上, 那末三个顶点的坐标分别是 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 和 $C(0, -2\sqrt{3})$ 。

§ 1-2 两点间的距离

假设有两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 。试用坐标来表示它们间的距离。

设 A 与 B 的距离为 d , 如图 1-6 由 A 点与 B 点分别作 Ox 轴的垂线 AP 与 BQ , 并经过 A 点引平行 Ox 轴的直线 AC 交 BQ 于 C , 则得直角三角形 ABC 。由勾股定理得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2. \quad (1)$$

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$

$$\begin{aligned} CB &= QB - QC = \\ &= QB - PA = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

将 AC 与 CB 这两个值代入等式(1), 得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

由此, 得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (I)$$

在根式前面永远取正号(+), 因为两点间的距离永远是正的。应当注意, 在推演公式(I)的时候, 我们假设 A 与 B 两点都在第一象限, 因此, 它们的坐标都是正的。同样可以证明 A 与 B 两点在任何其他一个象限或者分别在两个象限时, 上面的公式也都是成立的。这个公式用语言叙述出来, 就是: 两点间的距离等于这两个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

如果两点中有一点是坐标原点, 即 $(0, 0)$, 另一点的坐标是 (x, y) , 那末这一点到原点的距离公式为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (II)$$

例 1. 试求 $A(-3, 5)$ 和 $B(1, 2)$ 两点之间的距离。

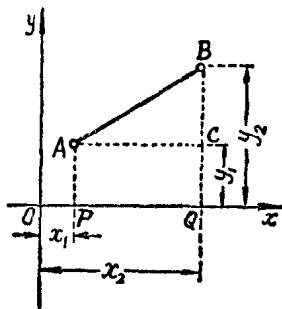


图 1-6

解: 由已知条件可知 $x_1 = -3$, $y_1 = 5$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$ 。

把这些坐标代入公式(I), 得

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{[1 - (-3)]^2 + (2 - 5)^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

例2. 求与已知点 $M_1(1, 2)$; $M_2(-1, -2)$; $M_3(2, -5)$ 等距离的一点。

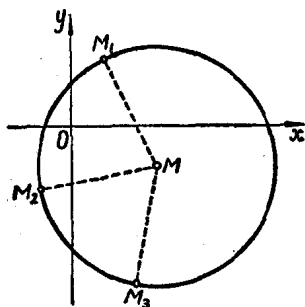


图 1-7

解: 在平面上, 有了一点坐标, 就可以找到这个点。所以在解析几何里求一点就是求它的坐标。

假设 x, y 为所求点 M 的坐标。由已知条件, 得

$$MM_1 = MM_2,$$

$$MM_2 = MM_3.$$

按公式(I), 得

$$MM_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2};$$

$$MM_2 = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2};$$

$$MM_3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}.$$

于是得方程组

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}, \\ \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}. \end{cases}$$

解之, 得 $x = \frac{8}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$ ^①, 因此所求的点是 $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ 。

① 本书凡遇到解无理方程和分式方程所得到的根, 都是经过验算的。

$$-\frac{4}{3})。$$

显然, 求得的点 $M(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$ 就是过三个已知点 M_1, M_2, M_3 的圆的中心 (图 1-7)。

例 3. 设 $A(1, 5)$ 和 $B(x, 2)$ 两点间的距离为 5, 求 B 点的横标 x 。

解: 由已知条件可知 $x_1 = 1, y_1 = 5; x_2 = x, y_2 = 2$ 。

把这些坐标代入公式(I),

得

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2-5)^2} = 5.$$

两边各自平方, 并整理, 使得

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

解这二次方程, 可得

$$x = -3 \text{ 或 } x = 5.$$

于是知所求 B 点的横标为 -3 或 5 (如图 1-8)。

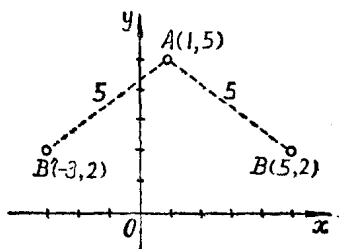


图 1-8

复习问题

1. 什么叫做坐标法、直角坐标系和点的坐标?
2. 试述两点间的距离公式。它是怎样证明的?

习题 1-1

1. 平行于

1° Ox 轴;

2° Oy 轴

的直线上的点, 它们的坐标有什么特点?

2. 在坐标轴夹角的平分线上的点, 它们的坐标有什么关系?

3. 写出图 1-9 中各点的坐标。

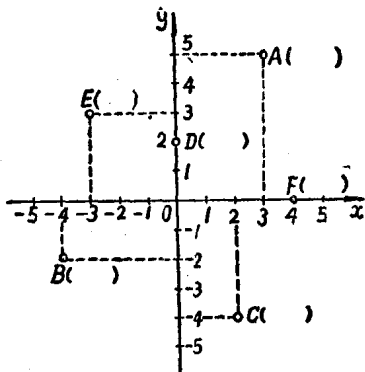


图 1-9

4. 作出下列各点并指出哪些点是关于 Ox 轴、 Oy 轴、原点对称的。

1° $A(1, 1)$; 2° $B(3, 1)$; 3° $C(5, -2)$;

4° $D(-3, 1)$; 5° $E(0, 2\frac{1}{2})$; 6° $F(0, -2\frac{1}{2})$;

7° $G(-1, -1)$; 8° $H(0, 0)$.

5. 如果点 $M(2, b)$ 是在第四象限内, 试写出与它关于

1° Ox 轴; 2° Oy 轴; 3° 原点

对称的点的坐标。

6. 图 1-10 中, $ABCDEF$ 是正六边形, 中心在原点, 边长为 a , 求它的六个顶点的坐标。

7. 试在横轴上求一点 A , 使它
与点 $B(4, 6)$ 的距离为 10 个单位。

8. 已知一个三角形的三个顶点分别为 $(3, 4)$, $(-2, 4)$, $(2, 2)$, 试求它的周长。

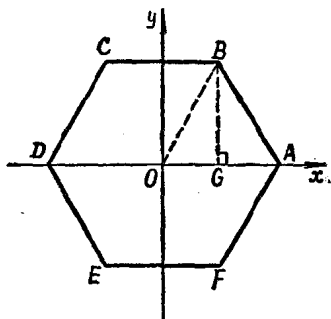


图 1-10

9. 试求经过点 $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(6, 4)$ 的圆的中心。
10. 设点 $A(a, 5)$ 和 $B(0, -10)$ 的距离是17, 求 a 的值。
11. 求一点 P , 使它与 Ox 轴和与另一点 $A(-5, 2)$ 的距离都是10个单位。
12. 试证顶点为 $(-3, -2)$, $(1, 4)$, $(-5, 0)$ 的三角形是一个等腰三角形。
13. 在第一和第三象限角的平分线上找一点 P , 使它与点 $A(-2, -4)$ 和与点 $B(1, -3)$ 的距离相等。
14. 动点从点 $A(3, 2)$ 沿直线方向移动12单位至 B 点, 其运动方向是向右上方与 Ox 轴成 60° 角, 求 B 点的坐标。

§ 1-3 线段的定比分割

已知线段 AB , 起点 A 的坐标为 (x_1, y_1) , 终点 B 的坐标为 (x_2, y_2) (图1-11)。设 C 为线段 AB 上的一点, 它把线段 AB 分为 AC 和 CB 两部分, 并使这两部分的比值 $\frac{AC}{CB}$ 等于已知数 λ 。我们说

C 点按定比 λ 分割线段 AB 。

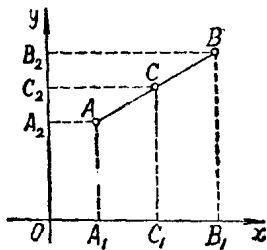


图 1-11

现在来求 C 点的坐标 x 和 y 。

过 A, C, B 三点各引平行于 Oy 轴的直线, 分别交 Ox 轴于 A_1, C_1, B_1 。从平面几何学知道: 线段 AC, CB 和 A_1C_1, C_1B_1 对应成比例, 根据已知条件, 得

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = \lambda. \quad (1)$$

由图1-11知

$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1,$$

$$C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x.$$

将这两式代入(1)式, 得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda. \quad (2)$$

解方程(2), 得

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

再由点 A, C 与 B 各作 Ox 轴的平行线, 同理可得

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

由此可知, 按照定比 λ 分割线段 AB (由 A 到 B) 的点 $C(x, y)$ 的坐标是用下列公式求得的:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (\text{III})$$

如果 C 点平分线段 AB , 则 $AC = CB$, 因此

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = 1.$$

这时公式(III)便取得下列形式:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

也就是线段中点的坐标等于两端点同名坐标之和的一半。

应当注意, 在推演公式(III)的时候, 我们假设 A 与 B 两点