中等专业学校教学参考书

高　等　数　学

工科中专数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1963年7月第一版　1978年3月第11次印刷

北京：532,001—732,000册

书号：13012·0151　　定价 0.95 元

目　录

第二篇　微分学初步

第三篇　积分学初步

附 录

绪　言

高等数学和其他学科一样，都是导源于生产实践，并为生产实践服务的。在十七世纪，生产的迅速发展，引出了物理、天文、几何和力学上的一系列问题，而这些问题又不能从初等数学中获得解决，于是就产生了高等数学中的一些基本概念和方法，这些概念和方法是由笛卡儿、牛顿、莱布尼兹等数学家，总结了前人的经验而创立的。在高等数学中，解析几何、微分学、积分学所研究的对象，主要是变化的量（变量）和变化的图形。

本书共分三篇：第一篇平面解析几何学基础；第二篇微分学初步；第三篇积分学初步。

解析几何是通过笛卡儿坐标，用代数方法研究几何图形的一门课程，在这里，代数和几何密切地结合在一起了。

微分学和积分学，通常简称为微积分学，它以无穷小量和变量的极限概念为基础，并由此建立微积分学的基本理论和运算法则。

高等数学是学好技术基础课和专业课的重要工具，我们必须很好掌握它。

第一篇　平面解析几何学基础

解析几何是以代数方法研究几何图形的一门数学，它把几何问题化为代数的计算来研究，使数与形密切地结合起来，这种结合的基本方法是**坐标法**。

第一章　坐标法

用数表示点的位置的方法叫做坐标法。例如：用一个实数来表示直线上一点的位置；用一对实数来表示平面上一点的位置等，这些在代数里都已经讲过。但坐标法是高等数学中最基本的问题，因此，我们有必要再加以阐述。

§1-1　平面上点的直角坐标

确定平面上点的位置的一对实数，叫做这个点的**坐标**。各种坐标中，最常用的是直角坐标。

在平面上取两条有方向而且互相垂直的直线，这两条直线叫做**坐标轴**；水平直线 Ox 叫做**横轴**，铅垂直线 Oy 叫做**纵轴**，它们的交点 O 叫做**坐标原点**。并取定一个长度单位①（图1-1）。在 Ox 轴上规定由原点起向右为正方向，向左为负方

① 一般两轴上取同一个长度单位，但也可以各取不同的长度单位。

向；在 Oy 轴上由原点起向上为正方向，向下为负方向。Ox 轴、Oy 轴、原点 O，以及所取定的长度单位全体，称为**直角坐标系**或**笛卡儿坐标系**①。

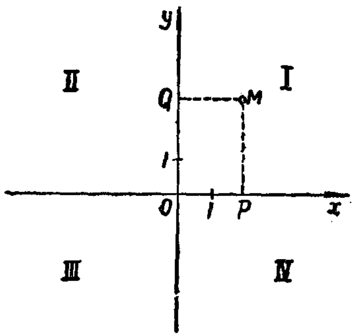

图 1-1

设 M 为坐标平面上任一点，过 M 点向 Ox 轴及 Oy 轴作垂线，其垂足分别为 P 和 Q（图 1-1）。用取定长度单位量 OP 所得的数 x，叫做 M 点的**横坐标**（简称横标），如 P 在 O 点的右边，横标 x 为正数，如在左边，则为负数。

用同样长度单位量 OQ 所得的数 y，叫做 M 点的**纵坐标**（简称纵标），如 Q 在 O 点的上方，纵标 y 为正数，如在下方，则为负数。

上面所说的一对实数 x 和 y 叫做 M 点的坐标，记作 $M(x, y)$。

因为有了 M 点就确定了 P 点和 Q 点，随之也就得到唯一的一对实数 x 和 y。反之，对于任一对实数 x 和 y，可以在横轴与纵轴上分别定出 P 点和 Q 点，从这两点各引垂直于坐标轴的垂线，就得到它们唯一确定的交点 M。从这里知道平面上的一点 M 与一对实数 x 和 y 之间有一一对应的关系。

Ox 轴与 Oy 轴将平面分为四部分，各部分叫做**象限**。由

① 笛卡儿是法国的数学家和哲学家，他总結了前人的經驗，于 1637 年发表过解析几何学的最初著作。

点的两个坐标都为正的那个象限开始，按反时针的方向依次叫做第一，第二，第三与第四象限(图 1-1 中分别用 I, II, III 与 IV 来表示)，那末在各个象限内点的坐标符号如下表所示:

坐标 \ 符号 \ 象限	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

坐标法是数与形相结合的基本方法，所以读者应该牢固地掌握下面两个问题的解法:

1° 由已知点 M，求它的坐标；

2° 由已知坐标(x, y)，求它所确定的点。

例 1. 图 1-2 中的点$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$和$M_6(x_6, y_6)$有坐标:

1° $x_1=Q_1M_1=OP_1=+4,$

$y_1=P_1M_1=OQ_1=+3;$

2° $x_2=Q_2M_2=OP_2=-1,$

$y_2=P_2M_2=OQ_2=+2;$

3° $x_3=Q_3M_3=OP_3=-4,$

$y_3=P_3M_3=OQ_3=-3;$

4° $x_4=Q_3M_4=OP_1=+4,$

$y_4=P_1M_4=OQ_3=-3;$

5° $x_5=0,$

$y_5=OM_5=+4;$

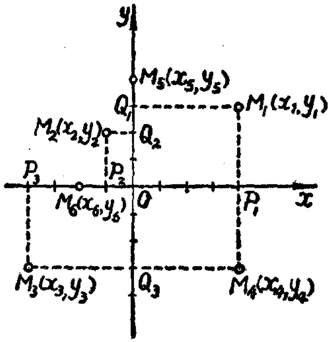

图 1-2

6° $x_6 = OM_6 = -2$,

$y_6 = 0$。

又从图 1-2 中容易看出来:如果点在横轴上,则它的纵标 y 等于零;如果点在纵轴上,则它的横标等于零;如果点与坐标原点重合,则它的坐标 x 和 y 都等于零。

例 2. 作出下列各点:

1° $M_1(4,3)$;

2° $M_2(-1,2)$;

3° $M_3(-4,-3)$;

4° $M_4(4,-3)$;

5° $M_5(0,4)$。

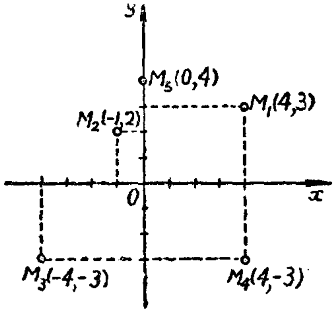

图 1-3

解: 如图 1-3 的作法,便可得出上述各点。

根据平面几何中关于点的轴对称和中心对称的定义,从图 1-3 中可以看出:

点 M_1 与 M_4 的横标相等,纵标的绝对值相等而符号相反,显然它们是关于 Ox 轴对称的;

点 M_4 与 M_3 的纵标相等,横标的绝对值相等而符号相反,显然它们是关于 Oy 轴对称的;

点 M_1 与 M_3 的横标及纵标都是绝对值相等,符号相反,显然它们是关于原点对称的。

例 3. 如果点 $A(a,3)$是在第二象限内(图 1-4),试写出与它关于

1° Ox 轴; 2° Oy 轴; 3° 原点

对称的点的坐标。

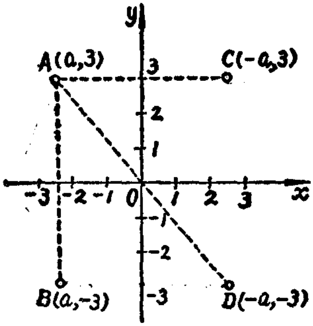

图 1-4

解：如图 1-4 可知：

1° 与点 $A(a, 3)$关于 Ox 轴对称的点 B 的坐标为$(a, -3)$；

2° 与点 $A(a, 3)$关于 Oy 轴对称的点 C 的坐标为$(-a, 3)$；

3° 与点 $A(a, 3)$关于原点对称的点 D 的坐标为$(-a, -3)$。

例 4. 设边长为 4 的正三角形，它的底边与 Ox 轴重合，而且这条边的中点是原点。求这个三角形的三个顶点的坐标。

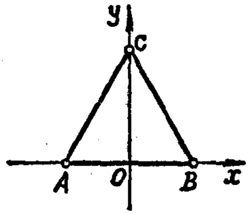

图 1-5

解：设这个正三角形的第三个顶点 C 落在 Oy 轴的正的一半上(图 1-5)。因为 $\triangle AOC$ 是直角三角形，且 $\angle CAO = 60°$，所以

$$OC = AC \cdot \sin 60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

于是三个顶点的坐标分别是：$A(-2, 0)$，$B(2, 0)$和 $C(0, 2\sqrt{3})$。

如果顶点 C 落在 Oy 轴的负的一半上，那末三个顶点的坐标分别是 $A(-2, 0)$，$B(2, 0)$和 $C(0, -2\sqrt{3})$。

§1-2 两点间的距离

假设有两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$。试用坐标来表示它们间的距离。

设 A 与 B 的距离为 d，如图1-6由 A 点与 B 点分别作 Ox 轴的垂线 AP 与 BQ，并经过 A 点引平行 Ox 轴的直线 AC 交 BQ 于 C，则得直角三角形 ABC。由勾股定理得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2. \quad (1)$$

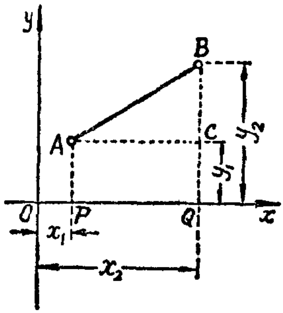

图 1-6

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$

$$CB = QB - QC =$$

$$= QB - PA = y_2 - y_1.$$

将 AC 与 CB 这两个值代入等式(1)，得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

由此，得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad \text{(I)}$$

在根式前面永远取正号(+)，因为两点间的距离永远是正的。应当注意，在推演公式(I)的时候，我们假设 A 与 B 两点都在第一象限，因此，它们的坐标都是正的。同样可以证明 A 与 B 两点在任何其他一个象限或者分别在两个象限时，上面的公式也都是成立的。这个公式用语言叙述出来，就是：两点间的距离等于这两个点的同名坐标之差的平方和的平方根。

如果两点中有一点是坐标原点，即(0, 0)，另一点的坐标是(x, y)，那末这一点到原点的距离公式为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \text{(II)}$$

例 1. 试求 $A(-3, 5)$ 和 $B(1, 2)$ 两点之间的距离。

解： 由已知条件可知 $x_1=-3$，$y_1=5$；$x_2=1$，$y_2=2$。把这些坐标代入公式(I)，得

$$AB=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=$$
$$=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

例 2. 求与已知点 $M_1(1,2)$；$M_2(-1,-2)$；$M_3(2,-5)$ 等距离的一点。

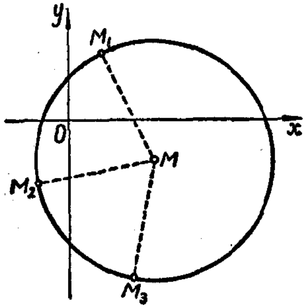

图 1-7

解： 在平面上，有了一点的坐标，就可以找到这个点。所以在解析几何里求一点就是求它的坐标。

假设 x, y 为所求点 M 的坐标。由已知条件，得

$$MM_1=MM_2,$$
$$MM_2=MM_3.$$

按公式(I)，得

$$MM_1=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2};$$
$$MM_2=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2};$$
$$MM_3=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.$$

于是得方程组

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},\\ \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.\end{cases}$$

解之，得 $x=\frac{8}{3}$，$y=-\frac{4}{3}$ ①，因此所求的点是 $M\left(\frac{8}{3},\right.$

① 本书凡遇到解无理方程和分式方程所得到的根，都是經过驗算的。

$-\frac{4}{3}\Big)$。

显然，求得的点 $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$就是过三个已知点 M_1, M_2, M_3的圆的中心(图 1-7)。

例 3. 设 $A(1,5)$和 $B(x, 2)$两点间的距离为 5，求 B 点的横标 x。

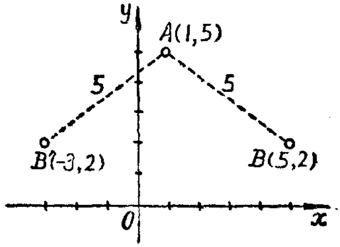

图 1-8

解: 由已知条件可知 $x_1=1$, $y_1=5$; $x_2=x$, $y_2=2$。

把这些坐标代入公式(I)，得

$$\sqrt{(x-1)^2+(2-5)^2}=5.$$

两边各自平方，并整理，使得

$$x^2-2x-15=0.$$

解这二次方程，可得

$$x=-3 \text{ 或 } x=5.$$

于是知所求 B 点的横标为 -3 或 5(如图 1-8)。

复习問題

1. 什么叫做坐标法、直角坐标系和点的坐标?
2. 试述两点间的距离公式。它是怎样证明的?

习题 1-1

1. 平行于

$1°\ Ox$ 轴;　　$2°\ Oy$ 轴

的直线上的点，它们的坐标有什么特点？

2. 在坐标轴夹角的平分线上的点，它们的坐标有什么关系？

3. 写出图 1-9 中各点的坐标。

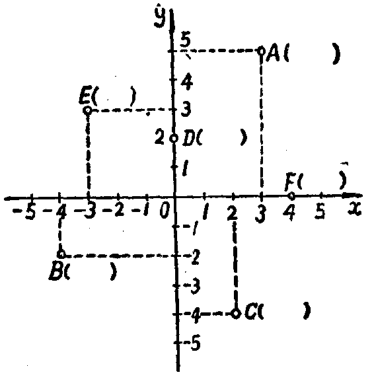

图 1-9

4. 作出下列各点并指出哪些点是关于 Ox 轴、Oy 轴、原点对称的。

1° $A(1,1)$; 2° $B(3,1)$; 3° $C(5,-2)$;

4° $D(-3,1)$; 5° $E\left(0,2\frac{1}{2}\right)$; 6° $F\left(0,-2\frac{1}{2}\right)$;

7° $G(-1,-1)$; 8° $H(0,0)$.

5. 如果点 $M(2,b)$ 是在第四象限内，试写出与它关于 1° Ox 轴；2° Oy 轴；3° 原点对称的点的坐标。

6. 图 1-10 中，$ABCDEF$ 是正六边形，中心在原点，边长为 a，求它的六个顶点的坐标。

7. 试在横轴上求一点 A，使它与点 $B(4,6)$ 的距离为 10 个单位。

8. 已知一个三角形的三个顶点分别为 $(3,4)$, $(-2,4)$, $(2,2)$，试求它的周长。

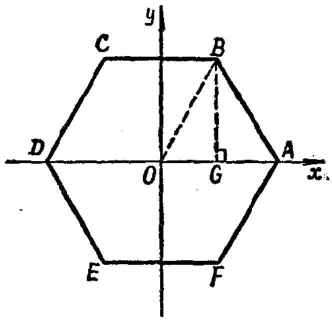

图 1-10

9. 试求经过点$(0,0)$，$(4,2)$，$(6,4)$的圆的中心。

10. 设点$A(a,5)$和$B(0,-10)$的距离是17，求a的值。

11. 求一点P，使它与Ox轴和与另一点$A(-5,2)$的距离都是10个单位。

12. 试证顶点为$(-3,-2)$，$(1,4)$，$(-5,0)$的三角形是一个等腰三角形。

13. 在第一和第三象限角的平分线上找一点P，使它与点$A(-2,-4)$和与点$B(1,-3)$的距离相等。

14. 动点从点$A(3,2)$沿直线方向移动12单位至B点，其运动方向是向右上方与Ox轴成$60°$角，求B点的坐标。

§ 1-3 线段的定比分割

已知线段AB，起点A的坐标为(x_1, y_1)，终点B的坐标为(x_2, y_2)(图1-11)。设C为线段AB上的一点，它把线段AB分为AC和CB两部分，并使这两部分的比值$\frac{AC}{CB}$等于已知数λ。我们说C点按定比λ分割线段AB。

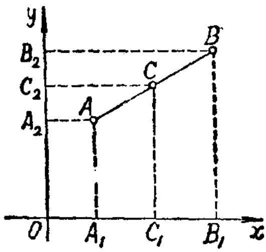

图 1-11

现在来求C点的坐标x和y。

过A、C、B三点各引平行于Oy轴的直线，分别交Ox轴于A_1、C_1、B_1。从平面几何学知道：线段AC、CB和A_1C_1，C_1B_1对应成比例，根据已知条件，得

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\lambda. \tag{1}$$

由图1-11知

$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$

$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x.$$

将这两式代入(1)式，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda. \tag{2}$$

解方程(2)，得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

再由点 A、C 与 B 各作 Ox 轴的平行线，同理可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

由此可知，按照定比 λ 分割线段 AB（由 A 到 B）的点 $C(x, y)$ 的坐标是用下列公式求得的：

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.\end{aligned}\right. \tag{Ⅲ}$$

如果 C 点平分线段 AB，则 $AC=CB$，因此

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=1.$$

这时公式(Ⅲ)便取得下列形式：

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y&=\frac{y_1+y_2}{2}.\end{aligned}\right. \tag{Ⅳ}$$

也就是线段中点的坐标等于两端点同名坐标之和的一半。

应当注意，在推演公式(Ⅲ)的时候，我们假设 A 与 B 两点