高等学校教学用書

# 近似計算講义

A. H. 克雷洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

# 近 似 計 算 講 义

A. H. 克雷洛夫著
吕茂烈　季文美譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的阿·尼·克雷洛夫(А. Н. Крылов)著"近似計算講义"(Лекции о приближенных вычислениях) 1950年第五版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

# 近 似 計 算 講 义

A. H. 克雷洛夫著

呂茂烈 季文美譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

商务印書館上海厂印刷 新华書店發行

統一書号 13010·445 开本 787×1092 1/16 印張 23 1/8 插頁 1 字数 536,000 印数 1—2,500

1958年6月第1版 1958年6月上海第1次印刷 定价(8)¥2.20

# 第一版序言

这本近似計算教程所包含的，是作者在1906年对会聚在 К. Май 旧制中学的一个小組講課用过的講义，小組里的人，在 Н. М. 韓特尔教授領导下，組成了一个自由听講的数学系。当时，这本教程用石印印出，份数不多，很快就卖完。

本版收納了石印版里的全部內容，此外，在第六章添入了一些关于內插法与机械求积的材料，又重写了关于微分方程近似积分的第七章。

本教程的內容看目录便知，至于在叙述方面，則假定讀者已熟悉高等代数学与微积分学基础，并且还具备一定的数值計算能力。

促使作者編写这本教程的动机如下：在現今一般数学分析書里所注意的，主要是在于絕对严格地建立基本概念，并严格証明从这些概念导出的全部結論。因此，往往对証明某一問題存在解答的事，以及对理論上来确定按任意准确度求此解答的可能性，討論得十分詳尽，但只以極少力量用于事情的实践部分，即很少注意如何求得准确度通常不大的近似解答；而实践中則恰恰仅需要这样准确度通常不大的、但必須以最少时間与劳动得到的解答。作者所編写的这本近似計算教程，其目的就在于說明一些实际可用的方法，如計算数值方程的根、計算定积分、采用三角級数，以及求微分方程近似解等的方法。同时，这里所注意的，主要是在于如何并何时采用这种或那种方法，而不在于方法本身的原理在理論上的严密性。

作者沒有論及將函数展为自变量的冪級数，以及如何采用它們进行計算的問題，原因是，这些問題一般地在初等数学分析書里有十分詳尽的討論，至于求不定式的眞值这一部分，只須令自变量取近于使表达式出現不定性时的諸值，并按这些值計算表达式的值，即可得到大量練習。

本教程荣幸地承交通工程学院院务委員会載入学院文集，在序言的結尾，作者認为应向委員会致深切的謝意。

阿·克雷洛夫 1911年3月。

# 第二版序言

本教程的第一版早就卖完，可是，对这本書的需要，却經常从許多高等学校，特别是高等工業学校，以及設計室等各方面提出，因此，科学院編輯委員会特將本書列入于科学院出版的工程参考書彙編。

原稿已經过重新校閱，除一些必要的改正外，还作了一系列重要补充，即：在第五章叙述了加快三角級数的收斂及其求和的一般方法，又叙述了計算这类級数的周期与系数的方法，在第七章增加了关于微分方程数值积分的阿当姆斯-舒斗梅方法的叙述，最后还增加了第八章，叙述最小二乘法，但只限于这方法中为工程师与技术員所需要的部分。

阿·克雷洛夫 1932年9月。

# 目　录

# 第一章　引言　近似計算的一般規則

§1. 現今数学不仅被用来解答实用科学,如天文学、测地学与物理学上所遇到的問題,而且也被用来解答工程技术的各个部門中所遇到的問題。在这些应用中,往往不仅要求建立問題中所含各量間的关系,即不仅要写出适当的公式,而且还得將这些公式应用于特定情形,并按照所給的数据求出各未知量的数值。

在天文学与测地学里,通常先要叙述一些方法,說明如何完成这兩門科学里所要遇到的数值計算。我們不来討論这些專門方法,而仅借用这些方法中能同样适用于任何种計算的共同原理;这里,我們主要將注意那些在工程技术問題里应用数学时所要遇到的計算。

§2. 無論哪个未知量,其数值計算所需要的数据,普通是借观测与量度而得到的。

大家知道,任何量度不可能进行得絕对准确;恰恰相反,量度的結果总会包含某些誤差,当重复量度时,由于得到与前一次不同的結果,就能够看出这种誤差。量度結果中的誤差界限正是根据它們彼此間的偏差来判断的。

当然,数据里的誤差也会使这些数据所决定的未知量产生誤差,甚至在按照完全准确的公式,并且完全准确地进行計算时,也会这样。

在工程技术問題里,求出未知量,普通是为了要在实际工作中用到它或按它的数值制出具体物件来。这又不可避免地發生施工和制造上的誤差;对于每件制品,都有所謂"公差",即制品被認为合格的誤差界限。

由此可以明了,对于实用問題,沒有必要去按照絕对准确的公式并完全准确地进行計算;恰恰相反,可以采用明知是不准确的公式或方法来算,只要有把握使这样計算时所發生的誤差,不致超出本問題里所容許的界限。

可以应用不准确的或近似的計算公式和方法的理由是这样:实用中我們所注重的,普通不是計算过程本身,而是它的結果,因此力求以最少的劳动和最少的时間,获得足够准确的結果。

这种工程技术观点,正是本"講义"所持的观点,書中叙述下面这些实用近似計算的一般方法:(1)解数值方程,(2)求單积分与重积分的定积分数值,(3)求級数的和,以及(4)求常微分方程的数值积分。此外,我們还將介紹一些自动完成上述某几种运算时用到的机械装置。

§3. 首先我們得講一講关于某一結果的准确度这个概念。

某个量的眞值与它近似值之間的差額,称做这数值的絕对誤差。

仅指出絕对誤差,普通还不足以表明这个結果的价值。例如,如果只說出某一長度的誤差是1毫米,这还不能說明量度进行得是好还是坏,必須同时知道被量度那个量的本身值。

比如說，如果这1毫米的誤差是在量度10公里長的基綫时产生的，可以說，所得到的这个結果的准确度是空前未有的，可是，如果在量度金屬絲的直徑或金屬鈑的厚度时，將3毫米量成2毫米，那末，恐怕每个人都要說，这样的量度在任何地方也不会合用。

量度結果的价值，用相对誤差来表明就好得多。所謂某个量的相对誤差，是它絕对誤差对它本身值的比率。

显然，相对誤差总是用無名数表示；比如，前面第一个例子里的相对誤差是 $\frac{1}{10000000}$，第二个例子里的是 $\frac{1}{2}$。

某个量的相对誤差愈小，它也就被知道得愈准确；因此，我們用相对誤差来判断量度結果的准确程度。

任何計算与量度的結果都用数表示；可以約定这样来記数，使我們能够按照它本身的形式来判断它的准确度；为此只須这样規定：每个近似数里写出的全体有效数字，除末位以外都是可靠，只有末位数字可值有疑問，而且誤差还不大于1單位。

最准确的量度結果是称重量的結果；这里，对于約重1千克的物塊，可以准到 $\frac{1}{100}$ 毫克，这样，相对誤差只有 $\frac{1}{100000000}$；所以，称出数字的头八位能够可靠，到第九位才开始有疑問，或者說，所得到的結果准确到第九位。但是，要这样准确地来称重量，須非常細心而化費很多时間，比如在国际度量衡局[①]进行这一工作，就差不多需要24小时之久。

長度的最准确測量只能够到达第七位。在大部分工程問題中，准确到 $\frac{1}{1000}$ 就已足够，这是說，所有的計算都因而可按四位进行。

还須注意大数的写法。例如，設在数12732000之中，第四位已有疑問，这时我們把这数写成 $1.273\times10^7$；假如是从第五位数字才开始有疑問，則这数可写成 $1.2732\times10^7$。

同样，設某个量用整数表示，例如37，要指明这数中的誤差是从第五位开始，应該把它写成37.000。

**§4.** 现在讓我們来考察下面的問題：当用近似数进行各种算术演算时，它們对演算結果的准确度有什么影响？

**加法演算** 設給有下列諸数

$$N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_k;$$

其相对誤差分别为

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_k;$$

容易看出，这些数之和的相对誤差 $\varepsilon$，將在相加諸数的最大相对誤差与最小相对誤差之間。

事实上，設用

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_k$$

代表相加諸数的絕对誤差，可得

① Bureau International des Poids et Mesures.

$$\varepsilon=\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k}{N_1+N_2+\cdots+N_k}。$$

在另一方面，有等式

$$\varepsilon_1=\frac{\delta_1}{N_1},\quad \varepsilon_2=\frac{\delta_2}{N_2},\ \cdots,\ \varepsilon_k=\frac{\delta_k}{N_k}, \qquad (*)$$

因为所有这些分数(*)都只按它們的数值大小而論，所以，表示这些分数的分子的和与分母的和之比率的分数

$$\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k}{N_1+N_2+\cdots+N_k}$$

是介于这些分数中最大的一个与最小的一个之間。

因此，当全部相加数的大小彼此接近时(其中最大的一个与最小的一个的比率不超过10)，須將这些数字写成同样位数，这样，和数中將会有同样多的可靠位数。

可是，常須將这样一些数相加，虽然已知它們具有同样准确度，但按大小来說，却彼此間相差很远；这时，可將演算手續簡化而不損害最后結果的准确度。

例如，設需將下列諸数相加：

52.374, 2.8232, 0.52181, 0.014253,

这些数都是五位的。这时，不应这样相加：

$$\begin{array}{r}52.374\\2.8232\\0.52181\\0.014253\\\hline55.733263\end{array}$$

因为很明显，和数中末尾三位数字不可能会靠得住，这三位数字以及加成它們的那些数字都沒有必要写出来。所以，应該这样来进行演算：

$$\begin{array}{r}52.374\\2.823\\0.522\\0.014\\\hline55.733\end{array}$$

即：先將相加諸数中最大的一个写下，其余各数在小数点后只須保留前面的几位，使其与最大的一个数在小数点后有同样多的位数(本例中是三位)，而后面的几位小数則全部舍弃，这时，如果被舍弃的第一位数字等于或大于5，就在留下的最后一位数字上加1。

由于近似数相加，出現这样一个問題：誤差通常可能是正，也可能是負，因此，当相加的时候，可能会發生各个誤差相互抵消的情形，特別是在相加数很多的場合。这問題在概率論里研究并得到解决，而且我們就要在第五章回到这个問題。

**乘法演算** 这里可以証明，当相乘时，乘积的相对誤差等于相乘諸数的相对誤差之和。事实上，設相乘的兩数是 $N_1$ 和 $N_2$，它們的相对誤差分別是 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$，因此，这兩个乘数的真值是

$$N_1'=N_1(1+\varepsilon_1),\quad N_2'=N_2(1+\varepsilon_2)。$$

这說明，乘积的眞值是

$$N_1'N_2'=N_1N_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)=N_1N_2[1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_1\varepsilon_2]。$$

分数 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 普通很小，比如为 $\frac{1}{1000}$，在这情形下，乘积 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 远較和数 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 为小，因而可以忽略不計，于是有

$$N_1'N_2'=N_1N_2[1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]=N_1N_2+N_1N_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

这样，对兩数相乘的情形証明了上述性質。

显然，这个証明也可以推广到随便多少个数相乘的情形。

除法演算　因为除以一个数 $N$，等于說乘以一个数 $\frac{1}{N}$，所以，当进行除法演算时，商的相对誤差等于被除数的相对誤差与除数的相对誤差之和。这里应当指出，仅在被除数与除数的絕对誤差兩者符号不相同的时候，商的相对誤差才达到这一大小。

乘冪的演算　从关于乘法所述，可以直接得知，一数平方的相对誤差，兩倍于这数的相对誤差；該数立方的相对誤差则为該数相对誤差的三倍，等等。这一性質对分数冪也是同样成立的。事实上，設 $N_1$ 为被取乘冪之数的近似値，又 $\varepsilon_1$ 为这数的相对誤差。在这情形下，眞值的大小是 $N=N_1(1+\varepsilon_1)$；由此取 $p$ 次乘冪，有

$$N^p=N_1^p(1+\varepsilon_1)^p=N_1^p\left(1+p\varepsilon_1+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}\varepsilon_1^2+\cdots\right)。$$

分数 $\varepsilon_1$ 普通是足够的小，因而包含这分数高于一次的所有各項都可忽略不計，这样一来

$$N^p=N_1^p(1+p\varepsilon_1)=N_1^p+p\varepsilon_1N_1^p,$$

由此可知，$N_1^p$ 的相对誤差为 $p\varepsilon_1$，这就証明了上述性質。

在許多計算里，常須用到数的平方与立方。对于自 1 至 10000 的整数，有編好的平方表与立方表，在这些表里的平方数与立方数都是完全准确給出的。

应用这些表时，要避免写出多余的位数。例如，設給有数

$$N_1=11.66。$$

这就是說，不能保証末位数字可靠，而这数的眞值，举例說，也可能是 11.67，但

$$11.66^2=135.9556,\quad 11.66^3=1585.242296,$$

又

$$11.67^2=136.1889,\quad 11.67^3=1589.324463。$$

由此十分明显，写出第四位以后的数字，或者甚至第三位以后的数字，全都無益，因为所有这些数字，对于所給的近似数来說并不可靠，写出它們也只白費功夫。

§5. 以近似数进行計算时，减法演算最为不利，特别是在差数与被减数及减数相較之下小得很多的場合。事实上，設給有数 52.287 与 51.939。我們看到，每个数里能保証前四位数字可靠，而且因为末位数字的誤差不会超过 1，所以这兩个已給数的相对誤差都不超过 $\frac{1}{50000}$。可是，在这兩数的差数 0.348 里，末位数字可能会有 2 單位的誤差，因而相对誤

差可能有$\frac{2}{348}$,即比較所給兩数的相对誤差要大到300倍。

因此,当計算时,应尽量設法变换公式,使兩个量的微小差数可直倍算出,而不用計算这兩个量本身的值。如果做不到这点,就必須注意:若相减兩数各为其差数的$n$倍,則差数里的相对誤差將为各該数里的相对誤差的$2n$倍。

由此可以明了,当某个量的一系列值彼此間相差不大时,按如下办法进行計算是有好处的,卽:只將其中的一个値直倍算出,而为了得到其余各値,則只計算它們的那些补値(卽修正用的値),这些补値是用来加到直倍算出的那个値上,以得到其余各値。可以按較低的准确度計算这些补値,而且补値比較該量的本値愈小,計算的准确度可以愈低。

天文学上,大部分計算就是按上述这一类方式进行的:总是尽量設法計算补値或偏差。

§6. 对数 在大部分計算里,对数是輔助工具,因此必須研究,当采用不同位数的对数进行計算时,將产生怎样的相对誤差。

最常用的对数表是4、5和7位对数表,这些表总是这样編造,要找出一个在表里沒有列出之数的对数,只須利用第一阶差分亦卽比例部分。这是由于如下的理由:兩个相鄰宗量之間的差数,与它們本身的値相較是足够微小的。事实上,設$N$和$N+h$是順次排列的兩个宗量;这时,它們的对数(常用对数)之差为

$$\Delta=\lg(N+h)-\lg N=\lg\frac{N+h}{N}=\lg\left(1+\frac{h}{N}\right)。$$

但按已知公式,有

$$\lg\left(1+\frac{h}{N}\right)=M\left[\frac{h}{N}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{N}\right)^3-\cdots\right], \qquad (*)$$

式中$M$是常用对数的模数,等于$0.43429\cdots$,为了在找对数时可以只用比例部分,应使公式(*)里的項

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2,$$

比起第一項来,小到不影响表里所列对数的末位数字;例如,对于四位对数,如果(实际上正是这样做)取

$$\frac{h}{N}<\frac{1}{100},$$

則

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2<\frac{1}{20000},$$

卽小于第五位的5單位;因此,在四位对数表里,宗量是由100至1000每隔1而排列的。

同样,在五位对数表里,取

$$\frac{h}{N}<\frac{1}{1000},$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2<\frac{1}{2000000}。$$

最后,在七位对数表里,宗量用自10000至100000的整数,由此

$$\frac{h}{N}<\frac{1}{10000},\quad 而\quad \frac{1}{2}\left(\frac{h}{N}\right)^2<\frac{1}{200000000},$$

卽小于 0.000000005，这样就不会影响第七位。

因此，对于任何对数表，表差 $\Delta$，卽对应于 $N$ 与 $N+1$ 的两个依次排列的对数之間的差数，可以足够准确地用如下公式表示

$$\Delta=M\cdot\frac{1}{N}=0.434\,\frac{1}{N}。\tag{1}$$

由此很明显，設需求对数的某数 $N_1$ 是在 $N$ 与 $N+1$ 之間，卽

$$N<N_1<N+1,$$

这时，令

$$N_1=N+h,$$

卽得

$$\lg N_1=\lg N+0.434\,\frac{h}{N}=\lg N+h\cdot\Delta。\tag{2}$$

用比例部分求所給数的对数，或者倒过来求，就是根据这个公式的。

表里所列出的全部对数都含有誤差，这些誤差可能有末位的 $\frac{1}{2}$ 單位。

由此可知，甚至当一个数完全准确地給出时，它的对数仍然只給近似地求到并具有上述誤差。

可是，如果这数也只近似地知道，比如說，它有相对誤差 $\frac{h}{N}=\varepsilon$，則由公式(2)可知，对数里將因該数本身的誤差而产生 $0.43\varepsilon$ 的誤差。因此，要这誤差給予对数末位数字的影响不超过 $\frac{1}{2}$ 單位，应使数里的相对誤差仅及对数末位的 1 單位，卽：对于四位对数，仅有 $\frac{1}{10000}$；对于五位对数，仅有 $\frac{1}{100000}$；等等，換句話說，对数尾数里共有多少位数字，就应当換数里有多少个可靠数字。

由此十分明显，对于一个近似数，比如說只有四位可靠数字的数，去找七位对数，是多么白費力气。

当根据已知对数倒过来求原数时，如果对数的誤差是它末位的 1 單位，則我們在所求出的数里所引进的相对誤差 $\varepsilon$ 將等于这一位数字的 $\frac{1}{0.43}=2.30$ 个單位，对于五位对数，也就是說等于 $\frac{2.30}{100000}=\frac{1}{43400}$，这一誤差与数本身的大小無关。

由此可知，当已知对数求原数时，原数的第一位数字如果只有 4 或更小，它的可靠数字的个数恰与对数尾数里的相等，如果这数的第一位数字是 5 或者更大，則它的可靠数字的个数要比对数尾数里的少一。

这里假定了对数的誤差是它末位的 1 單位。必須指出，求某数用的对数普通是至少由另外两个对数相加而成，正因为这样，这对数里的誤差等于它末位的 1 單位是完全可能的。

只有在求平方根时，特别是求高次根时，对数末位数字里大概不会有誤差。

由此得出如下的实用規則：計算用的数里有多少位，就用多少位的对数，因此，对于大部分工程技术問題，四位对数表已完全够用，甚至三位对数表也往往足够；可是三位对数表是

不值得采用的，用对数尺（普通称为計算尺——譯注）要方便得多，对数尺長 25 厘米，就能达到同样准确度。長 50 厘米的对数尺所能达到的准确度，就差不多和用四位对数表时一样。

§7. 当按对数进行計算时，应熟悉采用和及差的高斯对数。

設对于数 $A$ 与 $B$，仅知它們的对数，需求这兩数之和的对数，即需求 $\lg(A+B)$。

設 $A>B$。显然有

$$\lg(A+B)=\lg A\left(1+\frac{B}{A}\right)=\lg A+\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)。$$

因为数 $A$ 与 $B$ 的对数是已知的，所以取差数 $\lg A-\lg B=\lg\frac{A}{B}$，就能够算出 $\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$ 的值。这在表里已做好；在这些表里，根据宗量 $\lg A-\lg B$，可以直接找到 $\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$；加上 $\lg A$ 后，就得到 $\lg(A+B)$。例如，設

$$\lg A=0.47712,$$
$$\lg B=0.30103;$$

这时
$$\lg A-\lg B=0.17609;$$

根据这一宗量，在和的对数表里找到

| $\lg\frac{A}{B}$ | $\lg\left(1+\frac{B}{A}\right)$ | |
|---|---|---|
| ……… | …………… | |
| 0.176 | 0.22189 | 40 |
| 0.177 | 0.22149 | |
| ……… | …………… | |

可見，与宗量 0.17609 相对应的是 $0.22189-\ldots_{3.6}=0.22185$，这表明

$$\lg(A+B)=0.47712+0.22185=0.69897。$$

求差的对数表編造如下。我們有

$$\lg(A-B)=\lg A\left(1-\frac{B}{A}\right)=\lg A-\lg\frac{1}{1-\frac{B}{A}}。$$

令 $\frac{A}{B}=\alpha$，則 $\lg\alpha=\lg A-\lg B$，且对于宗量 $\alpha$，可以算出

$$\lg\frac{1}{1-\frac{B}{A}}=\lg\frac{\alpha}{\alpha-1}=\lg\beta。$$

这些值在表里按如下形式排列

| $\lg\alpha$ | $\lg\beta$ |
|---|---|
| …… | …… |

这样地列表是为了減縮它的篇幅。事实上，当 $\alpha$ 自 1 变至 $\infty$ 时，$\beta$ 自 $\infty$ 变至 1，并且当 $\alpha=2$ 时，同样有 $\beta=2$。

由等式 $\frac{\alpha}{\alpha-1}=\beta$，得 $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$；所以，如果以 $\lg\beta$ 代替宗量 $\lg\frac{A}{B}$，則它的对应值

$\lg \dfrac{1}{1-\dfrac{B}{A}}$ 可从 $\lg\alpha$ 的这一列里找到，这样，所采用的造表方法將表的篇幅减縮到一半。

例如，設

$$\lg A = 0.69897,$$
$$\lg B = 0.30103。$$

这时
$$\lg\alpha = \lg\frac{A}{B} = 0.39794。$$

在表里找到

| I | II |
|---|---|
| $\lg\alpha$ | $\lg\beta$ |
| ......... | ........... |
| 0.3979 | 0.22188 |
| | 7 |
| 0.3980 | 0.22181 |
| ......... | ........... |

故
$$\lg\beta = 0.22188 - \dots_{2.8} = 0.22185。$$

此后得

$$\lg(A-B) = \lg A - \lg\beta = 0.69897 - 0.22185 = 0.47712。$$

同样地，如給有

$$\lg A = 0.69897,$$
$$\lg B = 0.47712,$$

則
$$\lg\alpha = 0.22185。$$

我們在列 II 里找出与这相接近的数，并按列 I 找出与这数相对应的数，即

$$0.39790 + \dots_{10} \times \frac{3}{7} = 0.39794 = \lg\beta,$$

故得
$$\lg(A-B) = \lg A - \lg\beta = 0.69897 - 0.39794 = 0.30103。$$

某些对数表，例如 С. П. 葛拉席納普的“五位对数表”（苏联科学院出版）与澤赫的“七位和差对数表”①里，分别載有五位与七位高斯对数表。

§8. 现在將以上討論中所得到的一般規則加以总結：

1. 量度結果的准确度按其相对誤差判断。

2. 計算的准确度应与所給数据的准确度相当，而数据的准确度則应与需要計算結果的实踐要求相当。

3. 計算时必須避免写出多余的位数，总是这样地限制每个数，使其中的各位数字，除末位外都是可靠的，而只有末位数字可能有疑問。

4. 当若干个彼此間大小相差很远、但准确度相同的数相加时，应先写出相加諸数中最大的一个，其余各数在小数点后只須保留前面几位，使其与最大的一个数里小数点后所有的

① Zech'a: "Tafeln der Additions und Subtractions Logarithmen für Sieben Stellen".

位数相等。

5．数里有多少位，就用多少位对数。

6．小的差数应尽量設法直接計算，而不是去計算相減的各数。

7．如需得到某个量的一系列彼此間相差不大的値，只須直接算出其中一个値，而为了得到其余各値，則計算它們的“补値”，將这些补値加到直接算出的那个値上就得到其余各値。計算补値时，补値与該量本身的値相較愈小，則計算的准确度可以愈低。

8．对任何計算都应当預先編造一个方案，將每个数写入它的应有位置。造方案时必須注意：勿使加于一系列数的各种演算手續混杂进行，相反地，应使一种性質相同的演算手續完結后，才开始另一种也同样加于这系列数全体的同性質演算手續。