高等学校教学用书

高　等　数　学

（下　册）

李天林　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

高　等　数　学

（上册　下册）

李天林 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　　印张：32　　字数：789 千

1988年11月第1版　　1990年3月第2次印刷

印数：3 001—6 000

ISBN 7-303-00199-9/O·50

定　价（全二册）：7.60 元

目　　录

第六章　空间解析几何与向量

我们要把一元函数微积分学的一些基本概念加以推广，让微积分学理论能解决更多、更广的问题．为此，首先把已经建立起来的直线上点的坐标和平面上点的坐标的规定方法，扩充为空间内点的坐标的规定方法，然后讨论空间内点、线、面及其相互关系等基本问题．

§1　空间直角坐标系

在空间内选定三条交于一点、互相垂直又规定了正方向的直线，即轴，其正向依照习惯，一条是前后轴，它的正向是由后到前，叫 x 轴；一条是左右轴，它的正向是由左到右，叫 y 轴；一条是上下轴，它的正向是由下到上，叫 z 轴．与各轴相反方向叫轴的负向．x 轴、y 轴、z 轴也分别叫**横轴**、**纵轴**、**立轴**，**总称为坐标轴**，坐标轴的交点 O 叫坐标原点，简称为**原点**（如图 6.1）．

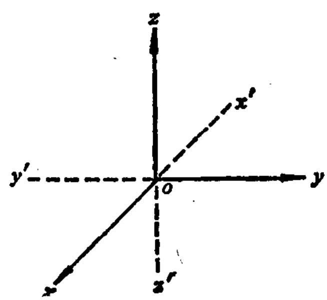

图　6.1

三条坐标轴决定三个平面：xOy 面、yOz 面和 xOz 面，总称为**坐标面**．它们将空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，共八卦．在 xOy 坐标面上方与平面直角坐标系相应的，含 z 轴正向的有四部分，其中含 xOy 面的第一象

* 卦限不含坐标轴和坐标面．

限部分叫第一卦限*，含 xOy 的第二象限部分叫第二卦限，余类推；在 xOy 面下方，含 z 轴负向，与上述一、二、三、四卦限相对的四个部分，相应的叫第五、六、七、八卦限．再在三条轴上取一个共同的单位长度．于是在空间内有公共原点而且互相垂直的三条数轴，就构成了**空间直角坐标系**．

在空间直角坐标系中，空间内任意点都能用一组有序实数和它对应．规定这个对应的方法是：过空间任意一点 M 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面．它们与三条轴的交点分别为 A、B、C，而 A、B、C 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z，这时，就令点 M 与有序实数组 (x, y, z) 相对应．反之，给一有序实数组 (x, y, z)，在三条数轴上可以分别确定三个点 A、B、C，以 OA、OB、OC 作为三条垂直的棱就能定出一个正平行六面体，这个正平行六面体上和原点 O 相对的顶点 M 就是与 (x, y, z) 相对应的点(如图 6.2)．

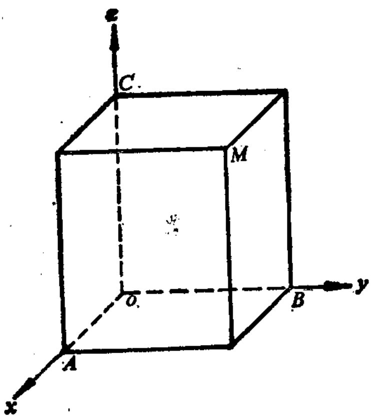

图 6.2

如果点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，在 xOz 面上的点，$y=0$；在 xOy 面上的点，$z=0$．如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，$x=z=0$；在 z 轴上的点，$x=y=0$．最后，如果 M 为原点，则 $x=y=z=0$．这样，空间内的点和有序实数组之间存在一一对应关系．因此，我们将有序实数组 (x, y, z) 称为点 M 的直角坐标，x 叫横坐标，y 叫纵坐标，z 叫立坐标．记为 $M(x, y, z)$．原点的坐标是 $O(0, 0, 0)$．

另外要说明的是，空间坐标系的规定，不一定要求坐标轴互相

垂直，它们间也可以是两两斜交的，这时所成的坐标系叫斜角坐标系．不过，我们在此只讨论直角坐标系；在学习多元函数积分学时，还要遇到柱面坐标系和球面坐标系．

习　　题　　6.1

1．在空间直角坐标系中作出下列各点

$$(4, 3, 3);\ (-1, 0, 2);\ (1, 2, -1);$$
$$(3, 0, 0);\ (0, -2, -1);\ (-4, -1, 1).$$

2．求点$M(a,b,c)$关于各坐标轴、坐标面和坐标原点对称的点的坐标．

§2　向量及其线性运算

一、向量的概念

量可分为两类，一类完全由数值的大小决定，如温度、长度、质量等称为**标量**；另一类量则不同，除知道其数值的大小外，还必须指出它的方向，如速度、位移、力等．这种既有数值大小又有方向的量叫做**向量**．

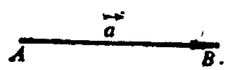

图　6.3

在几何上，用带箭头的线段表示向量(如图 6.3)，箭头指出向量的方向，而在选定了单位长度后，线段的长度表示向量的数值．起点为 A 终点为 B 的向量记为 $\overrightarrow{AB}$．在不需要指出向量的起点和终点时，也常用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 或 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 等一个带箭头的字母表示．起点和终点重合的向量叫零向量，记为 0． 零向量是唯一没有确定方向的向量，或说是唯一可以任意确定方向的向量．

如果两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 数值相同、互相平行或在同一条直线上，且方向相同，就说 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是相等的，记为 $\vec{a}=\vec{b}$．

由两个向量相等的定义可知，一个向量平行移动后仍为与原来向量相等的向量. 因此,为了讨论的方便,常将所讨论的向量移到一个共同的起点. 在空间直角坐标系中，一般都把原点作为所有向量的公共起点. 如果向量的起点是 O,终点是M,这个向量就简记为$\vec{M}$,即$\overrightarrow{OM}=\vec{M}$,也称为点$M$对于原点$O$的向径,简称为**向径**.

向量的长度叫向量的**模**,$\overrightarrow{AB}$ 的模用$|\overrightarrow{AB}|$表示. 向径$\vec{M}$的模用$|\vec{M}|$表示. 模为 1 的向量叫**单位向量**，向量 $\vec{a}$ 的单位向量是指长度为 1 且与 $\vec{a}$ 同向的向量，$\vec{a}$ 的单位向量记为 $\vec{a}^0$.向量的模总是一个非负数. 只有零向量的模是零.

二、向量的加法

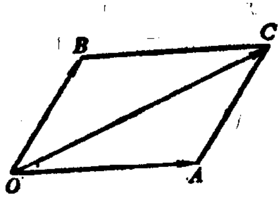

图 6.4

根据物理学中有关力的合成和分解法则,我们定义两个向量的和,亦叫向量的加法: 两个向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和是以这两个向量做边的平行四边形的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$（如图 6.4).记作$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

这个方法叫做平行**四边形法则**.

若 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 在同一直线上,此时 $\overrightarrow{OC}$ 是这样的向量: 当 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 同向时，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 都同向,且$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|$; 当 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 反向时，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 中模较大的同向,即 $|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OB}|$时，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 同向,反之与 $\overrightarrow{OB}$ 同向. 且在第一种情况下，$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OB}|$,第二种情况下$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|-|\overrightarrow{OA}|$. 特别,当 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 反向,且$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$时,$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的和为零向量,这时称 $\overrightarrow{OA}$ 为 $\overrightarrow{OB}$ 的**负向量**. 并记为

$$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}.$$

当然,$\overrightarrow{OB}$ 也是 $\overrightarrow{OA}$ 的负向量. 即凡模相等,方向相反的两个向量互为负向量.

显然,两个向量的加法是满足交换律的,即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.$$

从图 6.4 看出，向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{OB}$是相等的，因此，上述平行四边形法则还可以换成另一个说法，即在第一个向量的终点 A 引第二个向量 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，封闭第一个向量的起点和第二个向量的终点，所得向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的和．这也叫两个向量相加的**三角形法则**．它可以运用到任意有限个向量相加的运算中去． 设 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、……、$\vec{a}_n$ 为 n 个已知向量，我们这样来规定它们的和：即以第一个向量 $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$ 的终点 A_1 为起点引第二个向量 $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2$，再以第二个向量的终点为起点引第三个向量 $\vec{a}_3$……，最后，以 $\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}=\vec{a}_{n-1}$ 的终点 A_{n-1} 为起点，引向量 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$，封闭第一个向量 $\vec{a}_1$ 的起点 O 和最后一个向量 $\vec{a}_n$的终点 A_n 所得向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 就是向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、……、$\vec{a}_n$ 的和(如图 6.5)．记为

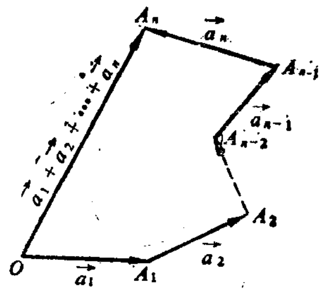

图 6.5

$$\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n.$$

可以证明，这样规定的向量的加法都满足结合律、交换律．在图 6.6 中是三个向量相加的情况． 所以，有限个向量相加时，它们可以任意的结合，次序也可以任意的交换，而和不变．特别记 n 个 $\vec{a}$ 的和为 $n\vec{a}$，即 $\vec{a}+\vec{a}+\cdots+\vec{a}=n\vec{a}$.

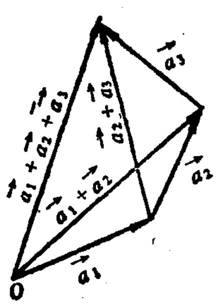

图 6.6

三、向量的减法

与数的减法一样，向量的减法也是由加法来定义的．

若两个向量 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的和是向量$\overrightarrow{OA}$，那么，向量 $\overrightarrow{OC}$ 就称为向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的差．

即若

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}.$$

则

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

如图 6.7，向量 $\overrightarrow{OC}$ 也是向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的和，而向量 $\overrightarrow{AC}$ 是向量 $\overrightarrow{OB}$ 的负向量．于是要从 $\overrightarrow{OA}$ 减去 $\overrightarrow{OB}$，只要把 $\overrightarrow{OB}$ 的负向量 $\overrightarrow{AC}$ 加到向量 $\overrightarrow{OA}$ 上去就可以了．由于 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$，从而可以看出，两个有公共起点的向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的差，就是由 $\overrightarrow{OB}$ 的终点到 $\overrightarrow{OA}$ 的终点所作的向量 $\overrightarrow{BA}$.

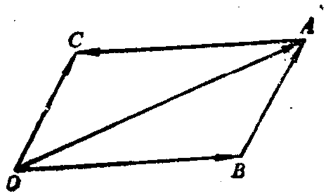

图　6.7

四、数量与向量的乘积

数量 m 与向量 $\vec{a}$ 的乘积仍为一个向量，记为 $m\vec{a}$，它的模是

$$|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|.$$

$m\vec{a}$ 与向量 $\vec{a}$ 平行，且 $m>0$ 时，$m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；$m<0$ 时，$m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；$m=0$ 时，$m\vec{a}$ 是零向量．特别，当 $m=-1$ 时，$m\vec{a}=(-1)\vec{a}$，记为 $-\vec{a}$，$m=1$ 时，$m\vec{a}=1\vec{a}$，记为 $\vec{a}$．即 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$，$1\vec{a}=\vec{a}$.

如　$\vec{a}=m\vec{b}$，$m\neq 0$，规定

$$\vec{b}=\frac{\vec{a}}{m}=\frac{1}{m}\vec{a}.$$

这样，对一切向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和一切实数 λ、μ，都有以下性质

1)　$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，　2)　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，

3)　$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$.

第一个性质可以用相似图形来说明．如向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 以 O 为公共起点，则 $\vec{a}+\vec{b}$ 就是以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线向量．当 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$ 各乘以 λ 时，便得到与原平行四边形相似的平行四边

形(如图 6.8)．且 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})$ 就是这个以 $\lambda\vec{a}$ 和 $\lambda\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线，所以

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

以上是假定 λ 为正数的情况，当 λ 为负数时，只要把图 6.8 中的 $\lambda\vec{a}$、$\lambda\vec{b}$、$\lambda(\vec{a}+\vec{b})$ 换成它们的负向量，同样可以看到性质 1) 仍然成立．$\lambda=0$，显然．至于性质 2)、3) 可以从数量和向量的乘积定义直接得到．

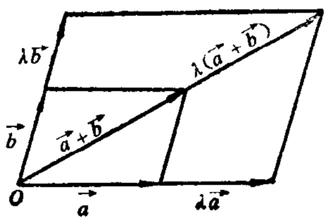

图 6.8

由数量和向量的乘法可知，$\vec{a}$ 和它的单位向量有以下关系，即

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0.$$

当 $|\vec{a}|\neq 0$ 时，

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}^0.$$

例 1 证明两个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行*的充分必要条件是存在实数 λ，使

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}.$$

证 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行，$\vec{a}^0$、$\vec{b}^0$ 分别是 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的单位向量．于是

$$\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a},\quad \vec{b}^0=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}.$$

若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向相同，则

$$\vec{a}^0=\vec{b}^0,$$

从而 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$，即 $\vec{a}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$，又 $\lambda=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$，

则

$$\vec{a}=\lambda\vec{b}.$$

* 因为向量可以平行移动．所以，说二向量平行和说二向量共线是一样的．

若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向相反，则

$$\vec{a}^0 = -\vec{b}^0.$$

从而 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$，即 $\vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$，取 $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$，

则

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}.$$

反之，设 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$，因为 $\vec{a}$ 不是零向量，所以 $\lambda \neq 0$，由数量和向量乘积的定义，$\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 平行，而 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$，所以 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行。

例 2 证明任何三角形两边中点的连线，平行且等于第三边的一半。

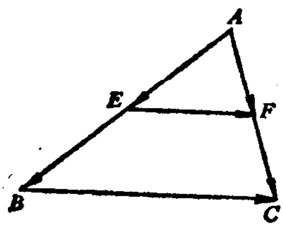

图 6.9

证 如图 6.9，E、F 是任意三角形 ABC 的边 AB，AC 的中点，其中

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE},$$
$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF},$$

而

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AE}$$
$$= 2(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{EF}.$$

由例 1 可知 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行．且 $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{EF}|$，

即

$$|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

习 题 6.2

1．把三角形 ABC 的一边 BC 五等分，并把分点 D_1、D_2、D_3、D_4 各与对角顶点 A 连接，试以向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$，$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$。

2．若四边形的对角线互相平分，证明它是平行四边形。

3．证明梯形两腰中点的连线平行底边且等于两底和的一半。

4．证明自圆心向圆内接正三角形三顶点所引三向量的和为零向量，而自空间任一定点向上述三角形三顶点所引三向量的和为定向量。

§3 向量的分解与向量的坐标

一、向量在轴上的投影

首先要确定空间二轴间的夹角概念．设在空间有相交于 S 的二轴 u_1、u_2，在 u_1、u_2 所决定的平面内，将其中一条轴绕交点 S 旋转，使它的正向与另一轴的正向重合时所需要旋转的角度，称为这二轴之间的夹角，记为 $(\widehat{u_1, u_2})$，或 $(\widehat{u_2, u_1})$．一般规定二轴间的夹角在 0 到 π 之间，且不区分轴的顺序．

若二轴 u_1'、u_2' 不相交，则自空间内任一点 S 作二轴 u_1、u_2，顺次与 u_1'、u_2' 平行而且同方向，那么，规定

$$(\widehat{u_1', u_2'}) = (\widehat{u_1, u_2}).$$

两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 间的夹角规定为与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 正方向相同的二轴 u_1，u_2 间的夹角．记为 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$，而轴 u 与向量 $\vec{a}$ 的夹角规定为轴 u 与另一和 $\vec{a}$ 正方向相同的轴 u' 之间的夹角，记为 $(\widehat{\vec{a}, u})$．

其次，设 A 为空间内任一点，u 为一轴，过 A 作轴 u 的垂直平面 α，α 与 u 的交点为 A'，A' 叫做点 A 在轴 u 上的**投影**（如图 6.10）．

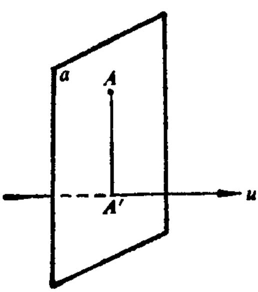

图 6.10

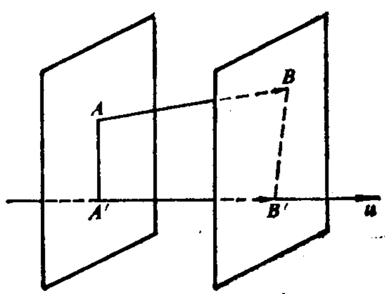

图 6.11

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点和终点在轴 u 上的投影分别是A'、B'.那么，向量$\overrightarrow{A'B'}$称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的**分向量**,而有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值$A'B'$称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影(如图 6.11),记为

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'.$$

关于向量在轴上的投影有以下

定理 1 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在任意轴 u 上的投影等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模乘以向量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u 间的夹角 φ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

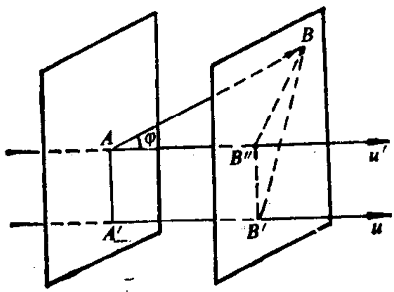

图 6.12

证 过向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A，引一与轴 u 同向的轴 u'(图 6.12). 则 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u'的夹角 φ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u 的夹角. 且

$$\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}.$$

而

$$\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}=AB''=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi=A'B'.$$

所以

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

由此可知,当 φ 为锐角时投影为正，当 φ 为钝角时投影为负，当 φ 为直角时投影为零.

由定理 1 还可以推得，相等的向量在同一轴上的投影相等.

定理 2 有限个向量的和在任何轴上的投影等于各向量在同一轴上的投影之和. 即

$$\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\vec{a}+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_n.$$

这个定理的证明我们把它略去.

二、向量的分解与向量的坐标

设$\vec{M}$是一向径，终点M的坐标是(x, y, z)。如图 6.13

$$OA = x,$$
$$OB = y,$$
$$OC = z.$$

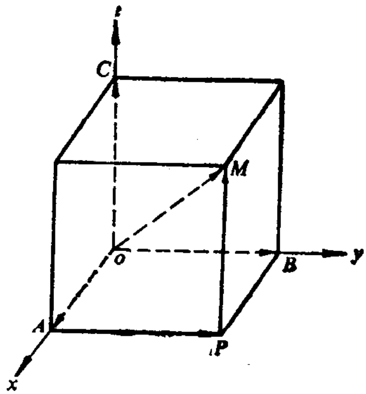

图 6.13

考查折线 $OAPM$ 和它的封闭折线 OM，由向量加法法则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$分别是$\vec{M}$在三坐标轴上的分向量，现取与三坐标轴同向的三个单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$. 它们叫**基本单位向量**.因为 x, y, z 也正是向径$\vec{M}$在三坐标轴上的投影. 于是，

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i},\quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j},\quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}.$$

所以

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

可见，向径$\vec{M}$在坐标轴上的投影就是向径$\vec{M}$终点M的坐标.

由于两个相等的向量在坐标轴上的投影是相等的，因此，不管向量在空间的位置怎样，它在坐标轴上的投影总是不变的. 反之，如果两个向量在三坐标轴上的投影都相等，这两个向量也一定是相等的. 如果向量$\vec{a}$在三坐标轴上的投影依次为 x、y、z，那么，$\vec{a}$在三坐标轴上的分向量就依次为 $x\vec{i}$、$y\vec{j}$、$z\vec{k}$，且

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

这样将一个向量表示为三坐标轴上分向量之和的方法，称为**向量在三坐标轴上的分解**，而$\vec{a}$在三坐标轴上的投影分别为 x, y, z 就叫**向量 $\vec{a}$ 的坐标**，记为

$$\vec{a} = \{x, y, z\} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

零向量且只有零向量，在三坐标轴上的投影都是零。

利用向量的坐标，向量的运算性质可表示如下：

设

$$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\},\ \vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}.$$

即

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},$$

则

$$\begin{aligned}\vec{a}\pm\vec{b}&=(x_1\pm x_2)\vec{i}+(y_1\pm y_2)\vec{j}+(z_1\pm z_2)\vec{k}\\&=\{x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2\}.\end{aligned}$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}=\{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.$$

λ 是数量. 至于交换律、结合律、数量与向量乘法的分配律等都可以用坐标表示，这在应用中十分方便.

例 1 设两个定点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标。

解 作向量 $\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_2}$（如图 6.14）.

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\\&=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\\&=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}.$$

例 2 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$. 若 M 分线段 $\overline{M_1M_2}$ 成定比 λ. 试求分点 M 的坐标.

解 如图 6.15，由题意

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda,$$

即