目　录

第一章　不同模量弹性理论的基本方程

在这里，引出抗拉与抗压不同的连续变形体弹性理论的初始假设和基本方程。我们把符合连续弹性介质力学基本原理的这种不同模量物体理论，称为不同模量弹性理论。

第一节　引　　言

在各向同性体的经典弹性理论中〔1—3〕，材料的力学特性用拉梅系数

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

来表示。拉梅系数只包含两个弹性系数，E是弹性模量和ν是泊松系数。用E和ν可完全描述经典弹性体的弹性性质。

但是，正如大量研究所表明的那样，在现代技术中应用的新材料以及某些传统的结构材料，它们都不具有最优的几何方向，而随主应力符号表现出不同的力学性质。

不同阻抗材料的物理性质尚未完全透彻地弄清楚，也没有描述这类材料的正确方程。当然，可以提出根据物理力学的理论概念进行研究工作，但是十分复杂，并超出了本专题学术著作的范围。

在这里，从对有不同抗拉与抗压性能的各种材料的宏观试验出发，建立描述不同模量材料性质的唯象理论，并给出

有效的方法以解算由抗拉与抗压性能不同的材料所制造的结构构件的强度和变形等问题。

分析大量的试验资料（关于这些资料将在后面叙述）使我们获得以下重要结论。首先，对具有不同弹性模量的大部分材料在拉伸和压缩时的应力-应变图用两条直线来表示，其σ-ε图〔4—7〕的零点是在原点上（图1），在零点切线是不连续的，用这种分段直线函数表示，是足够精确的近似。实际上应力和应变之间的关系并不这样简单。在相应拉伸、压缩的两条明显表示的直线段之间，存在一个带有连续切线的狭窄的非线性过渡段〔8—10〕。

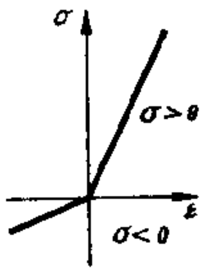

图 1

严格地说，当我们采用双直线图来表示应力-应变曲线时，实际上是把在区段$\sigma\geqslant 0$和$\sigma\leqslant 0$上应力和应变之间的非线性关系，用相应的线性关系来近似。在本书中，对具有不同拉压弹性模量的材料将用双直线模型来确定其受拉和受压时的关系。

还应该指出，此处所建议的理论可成功地应用于研究某些非弹性课题。事实上，在连续变形体力学中，许多非弹性问题往往按弹性问题求近似解。在不同模量问题中用这种方法求解时，在大多数情况下，弹性近似解可使问题得到很精确的解答。

当研究柔性壳体时，其材料只承受拉力而不承受压力，不同模量弹性理论显示其一定的重要性。

当然，在这里所建议的不同模量弹性理论还可能有其它的一些应用。

第二节 初始假定和基本概念〔5—7〕*

假定所研究的物体是固体、变形体和连续体。认为该物体是均匀的和各向同性的。但是，对所研究的不同模量材料的均匀性和各向同性表现出一些特殊性，即：材料各点的性质相同，同时根据给定点的主应力符号又可能表现出不同的弹性性质；材料没有最优方向，也就是它的弹性性质在各方向是同样的，同时它根据主应力符号在不同方向可表现出不同的弹性性质。

其次，认为在主应力有相同符号（或拉应力$\sigma_i>0$，或压应力$\sigma_i<0$，$i=\alpha$，β，γ；α，β，γ为主方向）的给定点或物体的一个区域上，弹性常数组归结为经典弹性理论的弹性常数组。但是，根据主应力符号将有两组不同的弹性常数组〔6，7，11〕。

此后，我们假设已经知道，当纯（一维的）拉伸时在所研究材料的任何方向有弹性模量E^+，而当纯（一维的）压缩时在任何方向有模量E^-。设泊松系数为：ν^+——描述受拉时的横向收缩，ν^-——描述受压时的横向膨胀。当在不同的主方向上同时有拉伸和压缩时，假设弹性模量仍然分别为E^+和E^-，并且相应的泊松系数值不变。

假设沿全部三个主方向同时拉伸时，弹性模量和泊松系数分别为E^+和ν^+；当沿全部三个主方向同时压缩时，相应地为E^-和ν^-。

还假定，所研究的材料在任意应力状态下只发生弹性小变形并服从连续弹性介质的一般规律〔1—11〕。经典弹性理论的许多基本方程和关系式保持不变。其中包括平衡方程，

* 在本节和以后各节中，如果把所引用的文献列在章节的标题上，那就意味着本节是根据这些文献撰写的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

纯几何关系式，变形连续性方程及其他关系式[1—3]。显然，经典弹性理论与不同模量弹性理论之间的差别仅包含在建立问题的静力学与几何学之间的关系，也就是建立应力与应变之间的物理关系中。

第三节 应力状态和应变状态，平衡方程和应变连续性方程[1，2]

在这里，对一些众所周知的内容不作详细介绍，我们只从经典弹性理论中引入在不同模量弹性理论中也是正确的一些必要的知识。

1. 给定点的应力状态用对称应力张量表示为

$$T_\sigma=\left\|\begin{matrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xy} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{matrix}\right\| \tag{3.1}$$

其中，$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z;\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$——垂直于笛卡尔坐标系$x,y,z$轴的截面上的法向应力和剪应力。

在通过给定点的三个相互垂直的截面上，当已知该点的三个应力分量时，容易确定作用在通过该点的任意斜截面上的应力投影

$$\begin{aligned}X_n&=\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z\\ Y_n&=\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z\\ Z_n&=\tau_{xz}n_k+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z\end{aligned} \tag{3.2}$$

式中，n_x，n_y，n_z是该截面上法线单位向量的分量，它们分别等于相应的方向余弦$\cos(n,x)$，$\cos(n,y)$，$\cos(n,z)$。

已知全应力投影（X_n，Y_n，Z_n），容易求得作用在所研究的任意斜截面上的法向应力和剪应力。

在物体中的每一点上，当其应力状态为已知时，存在这

样三个相互垂直的截面，在该截面上只有法向应力作用，而剪应力等于零。这些截面的法线称为应力张量主轴，它们和初始坐标系 x，y，z 无关，而把该截面上的法向应力称为主应力。

设α，β，γ为主方向，相应的应力为σ_α，σ_β，σ_γ（显然，剪应力$\tau_{\alpha\gamma}$，$\tau_{\beta\gamma}$，$\tau_{\alpha\beta}$等于零）。

对应于初始的笛卡尔坐标系x，y，z，主方向α，β，γ的位置用9个方向余弦l_i，m_i，n_i($i=1, 2, 3$）来表示，它们可依据所列表格来确定，并满足下列型式的已知关系式

$$
\begin{aligned}
&l_1^2+l_2^2+l_3^2=1\\
&l_1^2+m_1^2+n_1^2=1\\
&l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\
&l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

	α	β	γ
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

根据所引入的表达式，

应力分量从一个坐标系（主坐标系）向另一个坐标系（初始坐标系）转化的变换公式为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x=\sigma_\alpha l_1^2+\sigma_\beta m_1^2+\sigma_\gamma n_1^2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tau_{yz}=\sigma_\alpha l_2l_3+\sigma_\beta m_2m_3+\sigma_\gamma n_2n_3
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

轮换下标l，m，n可求得应力张量的其余4个分量。

由初始坐标系x，y，z的公式转化为主坐标系α，β，γ的公式，其形式（此处只写出这些公式中的两个）为

$$
\begin{aligned}
\sigma_\alpha=&\sigma_x l_1^2+\sigma_y l_2^2+\sigma_z l_3^2+2(\tau_{yz}l_2l_3\\
&+\tau_{zx}l_1l_3+\tau_{xy}l_1l_2)\\
\tau_{\beta\gamma}=&\sigma_x m_1n_1+\sigma_y m_2n_2+\sigma_z m_3n_3\\
&+\tau_{yz}(m_2n_3+m_3n_2)+\tau_{zx}(m_1n_3\\
&+m_3n_1)+\tau_{yx}(m_1n_2+m_2n_1)=0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

轮换方向余弦，可写出其余4个公式。

其次，根据式（3.3）—（3.5），容易得到不变的关系式

$$\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma \tag{3.6}$$

2． 在不同模量弹性理论中主应力符号是起决定性作用的。根据各主应力符号的组合我们将有不同类型的弹性关系式，它们可能严重地改变所研究对象的应力-变形状态的图形。显然，在一般情况下我们只能遇到下列4种主应力符号的组合：а）在给定点上或在给定区域上各主应力都是拉应力，即$\sigma_\alpha>0$，$\sigma_\beta>0$，$\sigma_\gamma>0$；б）在给定点上或在给定区域上各主应力都是压应力，即$\sigma_\alpha<0$，$\sigma_\beta<0$，$\sigma_\gamma<0$；в）一个主应力是压应力，其余两个是拉应力，即例如，$\sigma_\alpha>0$，$\sigma_\beta<0$，$\sigma_\gamma>0$；г）一个主应力是拉应力，其余两个是压应力，即例如，$\sigma_\alpha<0$，$\sigma_\beta>0$，$\sigma_\gamma<0$。

以后，将把全部主应力有相同符号（情况а）和б））的物体的各点或区域称为第一类点或区域；把一个主应力符号与另外两个主应力符号不同的物体的那些点或区域称为第二类点或区域。最后指出，由上所述在不同模量弹性理论问题中，对所研究的整个物体，根据主应力符号在一般情况下可以分为第一或第二类分立的区域，当分析分立的问题时，我们将多次碰到整个地确定不同类型应力状态区域边界的问题。

3． 以后，当研究某些不同模量弹性理论问题时，我们将利用各种量的张量记号[3，13]。其中包括，用x_1，x_2，x_3，即$x_i(i=1,2,3)$表示初始的笛卡尔坐标系x,y,z，用$x_i^0(i=1,2,3)$表示主方向及其坐标系；用$\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$表示应力张量的各分量，σ_{ii}是法向应力，$\sigma_{ij}(i\neq j)$是剪应力；用$\sigma_{ij}^0(i=j)$表示在主应力坐标中应力张

量的各分量。

在张量记号中方向余弦l_i，m_i，n_i用c_i^j表示，满足条件

$$c_k^i c_k^j=\delta_{ij} \tag{3.7}$$

其中，δ_{ij}是克隆纳喀（Кронекер）符号（$\delta_{ij}=0$，$i\neq j$和$\delta_{ij}=1$，$i=j$）。式（3.7）中的函数c与坐标系x_i和x_i^0的各元素，以及与各方向余弦有下列关系

$$c_i^j=\frac{\partial x_j^0}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0},\quad c_i^1=\frac{\partial x_1^0}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_1^0}=l_i$$

$$c_i^2=\frac{\partial x_2^0}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_2^0}=m_i,\ c_i^3=\frac{\partial x_3^0}{\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_3^0}=n_i \tag{3.8}$$

根据式（3.7）和（3.8），式（3.4）和式（3.5）的变换公式可用下列形式写出：

$$\sigma_{ij}=c_i^p c_j^q \sigma_{pq}^0,\quad \sigma_{ij}^0=c_p^i c_q^j \sigma_{pq} \tag{3.9}$$
$$(p=1,2,3;\quad q=1,2,3)$$

此时，因为坐标系x_i^0与主方向一致，所以，当$i\neq j$时，$\sigma_{ij}^0=0$。

4． 介质的变形状态用对称的应变张量表示

$$T_e=\left\|\begin{matrix} e_x & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{xz} \\ \frac{1}{2}e_{xy} & e_y & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{zx} & \frac{1}{2}e_{yz} & e_z \end{matrix}\right\| \tag{3.10}$$

其中，e_x，e_y，e_z是相对伸长，e_{xy}，e_{yz}，e_{zx}是相对剪变形，它们通过位移分量u_x，u_y，u_z用下式表示：

$$e_x=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad e_y=\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$e_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x},\quad e_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y},\tag{3.11}$$

$$e_{xz}=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

应变分量应当满足下列6个变形连续性方程：

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\cdots\cdots$$

$$2\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\cdots\cdots\tag{3.12}$$

轮换下标从所引出的方程中可得到其余4个方程。

我们引入从一个正交坐标系到另一个正交坐标系的应变变换公式。此时，我们将考虑到这样一个事实，方向α,β,γ是主方向，因此$e_{\alpha\beta}=0$，$e_{\beta\gamma}=0$，$e_{\gamma\alpha}=0$。应变变换公式是

$$e_x=e_\alpha l_1^2+e_\beta m_1^2+e_\gamma n_1^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_{yz}=2(e_\alpha l_2 l_3+e_\beta m_2 m_3+e_\gamma n_2 n_3)\tag{3.13}$$

$$\cdots\cdots$$

以及反变换公式是

$$e_\alpha=e_x l_1^2+e_y l_2^2+e_z l_3^2+e_{yz}l_2 l_3+e_{zx}l_1 l_3+e_{xy}l_1 l_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_{\beta\gamma}=2(e_x m_1 n_1+e_y m_2 n_2+e_z m_3 n_3)+e_{yz}(m_2 n_3+m_3 n_2)+e_{zx}(m_1 n_3+m_3 n_1)$$

$$+e_{xy}(m_1n_2+m_2n_1)=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.14)$$

轮换下标 l，m，n（在公式（3.13）中）和方向余弦本身(在公式（3.14）中)可得到其余的变换公式。

5． 我们对位移分量引进新的符号u_i（$u_x=u_1$，$u_y=u_2$，$u_z=u_3$，$i=1$，2，3）和对应变张量的分量引进新的符号$e_{ij}(i,j=1,2,3)$ 时，可得到联系这些量的表达式：

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.15)$$

在主坐标系x_i^0中用$e_{ij}^0(i=j)$（$e_{ij}^0=0$，当$i\neq j$时）表示应变张量的分量时，用张量记号表示的式(3.13)和(3.14)的变换公式为：

$$e_{ij}=c_i^p c_j^q e_{pq}^0,\quad e_{ij}^0=c_p^i c_q^j e_{pq} \qquad (3.16)$$

$$(p=1,2,3,\quad q=1,2,3)$$

6． 最后，我们引入连续介质的平衡和运动微分方程，一般地对不同模量材料也是正确的。

用ρ表示介质的密度，用P_x，P_y，P_z表示单位体积力在坐标x，y，z方向上的投影，用$w_x=\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$，$w_y=\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$，$w_z=\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$表示介质质点的加速度分量。

现在，在笛卡尔坐标系中可得到下列介质运动方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+P_x-\rho w_x=0\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+P_y-\rho w_y=0\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+P_z-\rho w_z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在张量记号中，这些方程采用下式

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+P_i-\rho w_i=0 \tag{3.18}$$

7. 在这一节中，所引入的某些结果是今后用圆柱坐标和球坐标表示时所用的。为方便读者，以下列出这些结果。

圆柱坐标r，θ，z。

应变分量：

$$\left.\begin{aligned}
&e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_\theta=\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\ ,\ e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
&e_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_z}{\partial\theta},\ e_{rz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z},\\
&e_{r\theta}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}
\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+\Theta=0\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+Z=0
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

球坐标ρ,θ,φ。

应变分量：

$$\begin{aligned}
&e_\rho=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho},\quad e_\theta=\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\rho}{\rho}\\
&e_\varphi=\frac{1}{\rho\sin\theta}\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{\rho}\mathrm{ctg}\,\theta+\frac{u_\rho}{\rho}\\
&e_{\theta\varphi}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\mathrm{ctg}\,\theta\right)+\frac{1}{\rho\sin\theta}\ \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\\
&e_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\ \frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$e_{\rho\theta}=\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial\rho}-\frac{u_\theta}{\rho}$$

平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\ \frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}(2\sigma_\rho-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{\rho\theta}\mathrm{ctg}\,\theta)+P=0\\
&\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\ \frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\mathrm{ctg}\,\theta+3\tau_{\rho\theta}]+\Theta=0\\
&\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\ \frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}(2\tau_{\theta\varphi}\mathrm{ctg}\,\theta+3\tau_{\rho\varphi})+\Phi=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3.22)$$

在平衡方程式（3.20）和（3.22）中，符号 R，Θ，Z 和 P，Θ，Φ，是单位体积力在相应坐标方向的投影。

第四节　广义弹性定律[5—7]

一般地说，上述公式和关系式，对任何连续变形体都是正确的，其中也包括对拉伸和压缩具有不同力学特性的物体。现在，根据基本假定，解析地描述反映不同模量物体变形性质的模型，并建立应变分量与应力分量的关系式〔6，7〕。

1．假定从物体中分解出一个以三对界面与坐标平面 $\alpha=\mathrm{const}$，$\beta=\mathrm{const}$，$\gamma=\mathrm{const}$ 相平行的无限小平行六面体（微元体），并沿三个主方向 α，β，γ 拉伸该微元体。于是，根据假定，广义弹性定律是

$$
\begin{aligned}
e_\alpha &= \frac{1}{E^+}\sigma_\alpha - \frac{\nu^+}{E^+}(\sigma_\beta+\sigma_\gamma), \quad e_{\alpha\gamma}=0 \\
e_\beta &= \frac{1}{E^+}\sigma_\beta - \frac{\nu^+}{E^+}(\sigma_\alpha+\sigma_\gamma), \quad e_{\beta\gamma}=0 \qquad (4.1) \\
e_\gamma &= \frac{1}{E^+}\sigma_\gamma - \frac{\nu^+}{E^+}(\sigma_\alpha+\sigma_\beta), \quad e_{\alpha\beta}=0
\end{aligned}
$$

由此，根据式（3.6）将得到体积应变

$$
e^+ = e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = \frac{1-2\nu^+}{E^+}(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma) = \frac{1-2\nu^+}{E^+}\sigma \qquad (4.2)
$$

同样，假如沿三个主方向压缩该微元体（$\sigma_\alpha<0$，$\sigma_\beta<0$，$\sigma_\gamma<0$），那么广义弹性定律的形式为

$$
\begin{aligned}
e_\alpha &= \frac{1}{E^-}\sigma_\alpha - \frac{\nu^-}{E^-}(\sigma_\beta+\sigma_\gamma), \quad e_{\alpha\gamma}=0 \\
e_\beta &= \frac{1}{E^-}\sigma_\beta - \frac{\nu^-}{E^-}(\sigma_\alpha+\sigma_\gamma), \quad e_{\beta\gamma}=0 \qquad (4.3) \\
e_\gamma &= \frac{1}{E^-}\sigma_\gamma - \frac{\nu^-}{E^-}(\sigma_\beta+\sigma_\alpha), \quad e_{\alpha\beta}=0
\end{aligned}
$$

而体积应变为

$$
e^- = \frac{1-2\nu^-}{E^-}\sigma \qquad (4.4)
$$

研究弹性定律（4.1）—（4.4），就容易发现在物体的三个主应力全为拉或压的各点或区域上，其广义弹性定律（4.1）—（4.4）与已知的均匀各向同性物体的经典公式是相同的。这就意味对所指出的区域类型（第一类区域），经典弹性理论〔1—3〕是可以接受的，不必附加任何条件，当然，此时弹性常数应取E^+，ν^+，或取E^-，ν^-。

2. 现在，假定微元体承受两个主拉应力，而第三个是主压应力。或者相反，两个主压应力，而第三个是主拉应

力。显然，其它的承载情况是不可能的。那么，根据连续变形介质力学的一般原理和适应不同模量弹性理论初始假定，广义弹性定律在主方向α，β，γ上，可写成下列方式〔5—7〕：

$$
\begin{aligned}
e_\alpha &= a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma, \quad e_{\alpha\gamma}=0\\
e_\beta &= a_{12}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\sigma_\gamma, \quad e_{\beta\gamma}=0\\
e_\gamma &= a_{13}\sigma_\alpha + a_{23}\sigma_\beta + a_{33}\sigma_\gamma, \quad e_{\alpha\beta}=0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

在这里，根据初始假定弹性系数a_{ik}，在各种普遍的应力状态情况下，有：

1）如果$\sigma_\alpha>0$，$\sigma_\beta<0$，$\sigma_\gamma>0$，

那么 $a_{11}=a_{33}=\dfrac{1}{E^+}$，　$a_{22}=\dfrac{1}{E^-}$，

$$
a_{ik}=-\frac{\nu^-}{E^-}=-\frac{\nu^+}{E^+}; \tag{4.6}
$$

2）如果$\sigma_\alpha>0$，$\sigma_\beta<0$，$\sigma_\gamma<0$，

那么 $a_{11}=\dfrac{1}{E^+}$，　$a_{22}=a_{33}=\dfrac{1}{E^-}$，

$$
a_{ik}=-\frac{\nu^+}{E^+}=-\frac{\nu^-}{E^-}; \tag{4.7}
$$

3）如果$\sigma_\alpha<0$，$\sigma_\beta>0$，$\sigma_\gamma<0$，

那么 $a_{11}=a_{33}=\dfrac{1}{E^-}$，　$a_{22}=\dfrac{1}{E^+}$，

$$
a_{ik}=-\frac{\nu^+}{E^+}=-\frac{\nu^-}{E^-} \tag{4.8}
$$

等等。

研究式（4.1）—（4.8）可发现，广义弹性定律(4.5)对主应力符号组合的所有可能情况均保持不变。其中，例如对式（4.1）和（4.3）的情况容易得到，如为第一种情况，

则设 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{1}{E^+}$, $a_{ik}=-\frac{\nu^+}{E^+}$,因而有$\sigma_\alpha>0$, $\sigma_\beta>0$,$\sigma_\gamma>0$; 在第二种情况,如果设 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{1}{E^-}$, $a_{ik}=-\frac{\nu^-}{E^-}$, 因此就有$\sigma_\alpha<0$, $\sigma_\beta<0$, $\sigma_\gamma<0$。

最后,我们指出,根据应力状态,各向同性的不同模量材料将可当作经典的各向同性材料,或经典的横观的(трансвЕрсално)各向同性材料。

3. 利用上述公式,容易得到在初始坐标系x, y, z中写出的广义弹性定律。相对于该坐标系,被研究点的主方向位置用式(3.3)提供的9个方向余弦来确定。利用应力和应变分量的变换公式,当从一个坐标系向另一个坐标系转化而用式(3.13),(3.14)时,容易建立所求的关系式。例如,

$$
\begin{aligned}
e_x &= l_1^2 e_\alpha + m_1^2 e_\beta + n_1^2 e_\gamma = l_1^2(a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{12}\sigma_\gamma) \\
&\quad + m_1^2(a_{22}\sigma_\beta + a_{12}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\gamma) + n_1^2(a_{33}\sigma_\gamma + a_{12}\sigma_\beta \\
&\quad + a_{12}\sigma_\alpha) = a_{11}(l_1^2\sigma_\alpha + m_1^2\sigma_\beta + n_1^2\sigma_\gamma) \\
&\quad + (a_{22}-a_{11})m_1^2\sigma_\beta + (a_{33}-a_{11})n_1^2\sigma_\gamma \\
&\quad + a_{12}[(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma) - (l_1^2\sigma_\alpha + m_1^2\sigma_\beta \\
&\quad + n_1^2\sigma_\gamma)] = a_{22}(l_1^2\sigma_\alpha + m_1^2\sigma_\beta + n_1^2\sigma_\gamma) \\
&\quad + (a_{11}-a_{22})l_1^2\sigma_\beta + (a_{33}-a_{22})n_1^2\sigma_\gamma + a_{12}[(l_1^2+m_1^2 \\
&\quad + n_1^2)(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma) - (l_1^2\sigma_\alpha + m_1^2\sigma_\beta + n_1^2\sigma_\gamma)] \\
&= a_{33}(l_1^2\sigma_\alpha + m_1^2\sigma_\beta + n_1^2\sigma_\gamma) + (a_{11}-a_{33})l_1^2\sigma_\alpha \\
&\quad + (a_{22}-a_{33})n_1^2\sigma_\beta + a_{12}[(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma) \\
&\quad - (l_1^2\sigma_\alpha + m_1^2\sigma_\beta + n_1^2\sigma_\gamma)]
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

或剪切变形,

$$
\begin{aligned}
e_{yz} &= 2l_2l_3(a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{12}\sigma_\gamma) + 2m_2m_3(a_{22}\sigma_\beta + a_{12}\sigma_\alpha \\
&\quad + a_{12}\sigma_\gamma) + 2n_2n_3(a_{33}\sigma_\gamma + a_{12}\sigma_\beta + a_{12}\sigma_\alpha) \\
&= 2a_{11}(l_2l_3\sigma_\alpha + m_2m_3\sigma_\beta + n_2n_3\sigma_\gamma) + 2(a_{22}-a_{11})m_2m_3\sigma_\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2(a_{33}-a_{11})n_2n_3\sigma_\gamma+2a_{12}[(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)\\
&\quad\cdot(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma)-(l_2l_3\sigma_\alpha+m_2m_3\sigma_\beta+n_2n_3\sigma_\gamma)]\\
&=2a_{22}(l_2l_3\sigma_\alpha+m_2m_3\sigma_\beta+n_2n_3\sigma_\gamma)+2(a_{11}-a_{22})l_1l_3\sigma_\alpha\\
&\quad+(a_{33}-a_{22})n_1n_3\sigma_\gamma+2a_{12}[(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)\\
&\quad\cdot(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma)-(l_2l_3\sigma_\alpha+m_2m_3\sigma_\beta+n_2n_3\sigma_\gamma)]\\
&=2a_{33}(l_2l_3\sigma_\alpha+m_2m_3\sigma_\beta+n_2n_3\sigma_\gamma)+2(a_{11}-a_{33})l_2l_3\sigma_\alpha\\
&\quad+2(a_{22}-a_{33})m_2m_3\sigma_\beta+2a_{12}[(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)\\
&\quad\cdot(\sigma_\alpha+\sigma_\beta+\sigma_\gamma)-(l_2l_3\sigma_\alpha+m_2m_3\sigma_\beta+n_2n_3\sigma_\gamma)]
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

用类似的方式处理其余的应变分量并考虑到表达式(3.3)—(3.6)，最后我们得到下列与广义弹性定律关系式相等价的公式〔6,7〕：

$$
e_x=\begin{cases}
a_{11}\sigma_x+a_{12}(\sigma_y+\sigma_z)+B_3m_1^2\sigma_\beta+B_2n_1^2\sigma_\gamma\\
a_{22}\sigma_x+a_{12}(\sigma_y+\sigma_z)-B_3l_1^2\sigma_\alpha+B_1n_1^2\sigma_\gamma\\
a_{33}\sigma_x+a_{12}(\sigma_y+\sigma_z)-B_2l_1^2\sigma_\alpha-B_1m_1^2\sigma_\beta
\end{cases}
\tag{4.11$'$}
$$

$$
e_y=\begin{cases}
a_{11}\sigma_y+a_{12}(\sigma_x+\sigma_z)+B_3m_2^2\sigma_\beta+B_2n_2^2\sigma_\gamma\\
a_{22}\sigma_y+a_{12}(\sigma_x+\sigma_z)-B_3l_2^2\sigma_\alpha+B_1n_2^2\sigma_\gamma\\
a_{33}\sigma_y+a_{12}(\sigma_x+\sigma_z)-B_2l_2^2\sigma_\alpha-B_1m_2^2\sigma_\beta
\end{cases}
\tag{4.11$''$}
$$

$$
e_z=\begin{cases}
a_{11}\sigma_z+a_{12}(\sigma_x+\sigma_y)+B_3m_3^2\sigma_\beta+B_2n_3^2\sigma_\gamma\\
a_{22}\sigma_z+a_{12}(\sigma_x+\sigma_y)-B_3l_3^2\sigma_\alpha+B_1n_3^2\sigma_\gamma\\
a_{33}\sigma_z+a_{12}(\sigma_x+\sigma_y)-B_2l_3^2\sigma_\alpha-B_1m_3^2\sigma_\beta
\end{cases}
\tag{4.11$'''$}
$$

$$
e_{yz}=\begin{cases}
2A_1\tau_{yz}+2B_3m_2m_3\sigma_\beta+2B_2n_2n_3\sigma_\gamma\\
2A_2\tau_{yz}-2B_3l_2l_3\sigma_\alpha+2B_1n_2n_3\sigma_\gamma\\
2A_3\tau_{yz}-2B_2l_2l_3\sigma_\alpha-2B_1m_2m_3\sigma_\beta
\end{cases}
\tag{4.12$'$}
$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com