中学数学建模教与学

主编　卜月华

编者　卜月华　金明烈

吴国建　周建峰

东南大学出版社

内 容 提 要

《中学数学建模教与学》是一本全新的中学数学建模活动教学辅导用书。本书汇集了几位作者的丰富经验，在此基础上，对数学建模作了系统地归纳、整理、总结，通过对来自生产、生活中的实际问题的剖析，建立一般中学生可望又可及的数学模型，并按中学数学知识体系分章，同时也把中学数学教材中没有涉及但在数学建模活动中又经常遇到的图论模型单列一章。本书力求在理论上有所升华，在实践上可供广大师生借鉴，是中学数学建模活动与数学课堂教学整合的典型教材。

本书可作为中学数学建模活动的参考书，也可用作学生课外参与数学建模活动与高中数学应用题教学的辅导材料，还可作为中学数学教师的继续教育材料。

图书在版编目(CIP)数据

中学数学建模教与学/卜月华等主编. —南京:东南大学出版社,2002.3

ISBN 7-81050-912-8

Ⅰ.中... Ⅱ.卜... Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆(CIP)数据核字(2002)第000169号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编 210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:11.5 字数:306千字
2002年4月第1版 2002年4月第1次印刷
印数:1-6000 定价:15.00元
(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-3792327)

序

浙江师范大学数学系的卜月华老师主持编写了一本书:《中学数学建模教与学》。受卜老师之托,让我为他编写的书作序。

目前我国正在开展教育改革,涉及大、中、小学,其中,中小学教育改革是以课程改革为核心,涵盖了教学内容、学习方式、教学方法和教育技术等方方面面。在中小学课程中加入和渗透数学建模和数学实验等方面的内容和思想,是本次数学课程改革的突破点和增长点之一。

在中小学的数学课程中介绍一些数学建模和数学实验的思想和内容,对学生是很有益处的:可以让学生了解数学与其他学科以及日常生活的相互联系,了解数学的广泛应用;可以亲身感受数学知识的产生、形成和应用的过程;帮助学生形成多样的学习方式,让学生体会到“做中学”也是一种很好的方式;最后能使学生逐渐形成对数学的一个比较完整、全面而正确的看法。在数学建模、数学实验的学习和实践中,常常需要使用现代信息技术,例如,计算器、计算机、数学软件等等,这对学生适应时代的发展是非常重要的。数学是科学的语言,是思维的体操,是其他学科的基础,同时数学也是技术、工具,它有着广泛和直接的应用,可以使学生如虎添翼。

卜老师他们编写这本书的目的在于对数学建模的推广作一尝试,提供丰富的涉及知识应用的具体实例,从中提出教学中存在的一些问题,引发师生的共同思考。这本书的一大特色是结合生活中的问题加以展开,让知识生动地融于现实,对师生很有参考和指导价值。

数学建模和数学实验开展的时间毕竟不长,特别是在中小学

起步较晚，还是一个新鲜事物，需要研究人员、教师与学生的共同努力，创造出更多、更好的范例、事例和课例。《中学数学建模教与学》一书的作者通过不断地积累经验，在数学教育理论方面为我们提出了一系列重要的问题，例如，评价问题、课内外结合的问题、教学模式问题等等。这些都需要我们认真地思考，使之更加完善，逐步成熟。相信经过大家的努力，将会创造出更多成功的经验。

王尚志

2002 年 3 月

前　言

"下个世纪科学技术的发展、竞争将更加激烈，一个关键便是数学技术的竞争。""数学，确实是关乎综合国力的强弱的。"这是1997年7月9日发表于《人民日报》上的文章"数学——撬起未来的杠杆"中的结束语。

将数学与综合国力的强弱联系起来，寥寥数语，透彻说明了数学的地位与作用。二十世纪后半叶，科学技术迅猛发展，尤其是计算机的广泛应用，撩开了数学神秘的面纱，为数学的直接应用铺平了道路。"数学是人类理性思维的基本形式"，"数学可以解释其他科学，而其他科学却不能解释数学"[1]，数学方法已成了人类科学研究的第三种主要方法。这些恰如其分的评价，揭示了数学的真实面目。

早在1991年10月，我国著名的科学家钱学森教授在一封信中指出："我想我国数学界的同仁必须看到科学技术以至世界的新变化——电子计算机的出现和将来的普遍使用，到21世纪人类对数学的要求将有根本性的变化"[2]。十年来的进程完全证明了此预言的正确性。

随着社会的发展，对数学的地位作用的正确评价逐渐被人们所接受，数学将深入各个领域，作用日益得以显示，作为潜在资源的数学，将发挥巨大的潜能。这无疑对中学数学教学提出更新更高的要求：彻底改变数学教学的封闭状态，为社会输送更多的具有良好数学素养的中学生。还是钱学森教授说得好："数学科学的研究和教学也将有相应的根本性变化"[2]。中学数学教学面临着巨大的压力，也面临着变革。

《国务院关于基础教育改革与发展的决定》(2001 年 5 月 29 日)中指出:“重视培养学生的创新精神和实践能力,为学生的全面发展和终身发展奠定基础。”这指明了基础教育教学改革的方向。新的高中数学教学大纲(试验修订版)及其配套的数学教材的全面施行,义务教育阶段的“数学课程标准”的颁布及其配套教材的开始实验,都是中学数学教育、教学改革的重大步骤。尤其是把数学实验课、数学建模、研究性课题等列入新的高中数学教材,为中学数学教育改革提供了强有力的保证,拉开了新一轮中学数学教育改革的序幕。中学数学界面临着机遇与挑战并存的局面。

战斗在中学数学教学第一线的老师们更深感改革的必要,也在千方百计寻求改革的方法与途径。从 1998 年底开始,我省的一些学校紧密结合中学数学教学,开展中学数学建模活动,就是有力的佐证。几年来,这些学校的数学教师冲破重重阻力,克服了种种困难,取得了可喜的成果,积累了丰富的经验,形成一些理论上的共识。这些学校的共同感受是:“在中学数学教学过程中,加强数学知识应用的教学、有机地开展数学建模活动是培养学生数学实践能力及创新精神的不可替代的途径。要求学生具有坚实的数学基础知识,还要求学生有较强的数学实践能力及创新精神,这两者不但不矛盾,而且可以相辅相成,促使数学教学质量的全面提高。

何谓数学实践?已形成的共识认为,以数学知识、方法、思想为指导解决问题(包括数学问题本身及实际问题)或为数学问题研究开展的实践活动,可称之谓数学实践。数学实践有直接、间接之分,接受数学知识、解数学题等应属于间接实践。数学建模就是典型的、直接的数学实践活动,数学建模的过程就是数学实践能力培养的过程。

已形成的共识还认为数学实践能力是观察能力、分析能力、概括能力、抽象能力、应用知识能力等的综合表达,直接数学实践能力大约应包括以下几个方面:

(一) 捕捉信息、搜集数据的能力

信息是问题研究的基础，而许多信息是通过数据反映出来的。因此学会捕捉信息、搜集数据是数学实践中第一位的工作。

捕捉信息、搜集数据，先要指导学生制订计划，明确目的、目标及所需的信息、数据。这样可以少走弯路，避免无效劳动。捕捉信息、搜集数据主要依赖于对周围环境、事物的留心观察，甚至一些街头巷尾的议论都可提供信息的线索。如桌子、椅子的比例问题，一般人都不会去注意，有的同学却对此展开了研究，写了论文。

捕捉信息、搜索数据还要讲究方法。除了可以运用已有的诸如报纸、杂志、报表上刊登的信息、数据外，也可采用定点调查、个别访问及随机问卷调查等，获取信息、数据；有些信息、数据还需通过实地测试及通过实验获得。

再者要指导学生善于处理搜集来的信息、数据。因为搜集来的信息、数据充其量是一些“实际素材”，要上升为“实际问题”还得经过一次“飞跃”。先要区别信息、数据的有效性，而后对有效的信息、数据进行分类、整理、抽象、归纳，形成一个实际问题。

(二) 简化问题、合理假设的能力

数学要研究的对象总是非常复杂的，因此必须对其作出适当简化及合理假设，才能适合数学研究的要求。如“哥尼斯堡七桥问题”，欧拉将其简化、抽象成“四点七线”(如图1)。使问题转化为“从某一点出发，不重复地经过每条线段一次而返回原出发点，是否可能？”其简化抽象和假设妙不可言，一直被数学界所传颂。

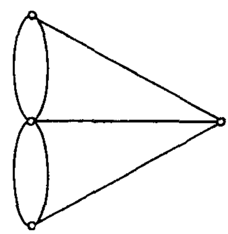

图 1

如何简化问题、合理假设呢？除了必须遵循数学中的抽象性原则(即撇开事物的物理属性、化学属性)外，一般来说还应符合几条基本原则：

1. 多数的原则。即“少数”服从“多数”。如在曲线拟合时,由已给条件描出的总是一些离散的点,用何种曲线拟合较为合适?可以根据多数点的分布趋势来确定曲线或用多种曲线拟合,经验证后,选择误差少的曲线。

2. 发展的原则。即观察事物的发展方向。如江河防洪堤迎水面与河床的交线,由于水流的侵蚀,总是凹凹凸凸,极不规则。但对某段河堤,由于总的走向是直线的一部分,故将迎水面与河床交线假设为直线。又如水库放水,由于围成水库的山体均为斜坡,每次放水量相同时,其水位下降每天不一定相同,但总的来说水位下降速度每天在加快,因此在解决某些问题时,可假设水位成等差数列下降,这无碍水位下降的总趋势及问题解决。

3. 主导性的原则。分析何种因素起主导作用。如修建一条盘山公路,从山脚到山上的某部位,其主导性的因素是公路坡度在一个合理范围内,使汽车能顺利上坡。因此在建立数学模型时,主要考虑在三角形(或圆锥形)的坡面上,公路呈“之”字形的折线行进即可,而其他一些非主导性因素如转弯处需提前或坡度需适当调整等可在具体设计时再行考虑。

4. 相对性原则。即根据具体情况具体分析后作出决定。如高速公路、城市等在局部上是一带状区域或块状区域,但相对于地球就可将其简化,假设为直线、点了。

(三) 数学基础知识的应用能力

数学基础知识正如一座大厦中的一砖一瓦。每一基础知识都有其实际背景,搞清楚这些问题,并能应用于解决某些实际问题,这不但有利于基础知识的巩固,且也有益于综合性的解决实际问题,如利用勾股定理即可确定二直线垂直,利用射影定理可确定直线与平面的垂直等等。

(四) 将实际问题转化为数学问题的能力

即使实际问题与量或形之间建立一一映射,进而找出量的关

系式或形中各部分之间的联系,最终使问题得以解决。这就是在假设、简化的基础上进一步抽象成数学问题。

这是数学建模中最为关键也是较难把握的一步,这需要多实践,善总结。同时在数学实践活动中,还要特别注意确立实事求是、尊重科学的意识。

实事求是、尊重科学是数学教学中反复强调的一个问题。但在数学实践活动中,由于多种因素干扰,难免会出现一些不良现象,如凑数据、没有依据盲目下结论、甚至抄袭他人成果等。尽管不良现象出在个别人、个别问题上,但其危害甚大,是数学实践活动之大忌。因此,对这些现象绝不能掉以轻心,要及时教育学生,防止蔓延扩散。实事求是、尊重科学的意识是数学实践的“灵魂”,失去了这一点,就没有数学实践可言。

在中学开展数学建模活动决非易事,既有主观原因,又有客观因素,还有长期的传统观念的束缚。更何况,中学数学建模是中学数学教学中具有深远意义的一项开创性工作,没有经验可供借鉴,不但要有坚韧不拔的探索勇气,而且还要有一丝不苟的科学精神。为了在探索中加强交流,在浙江师范大学数理信息学院卜月华副教授的组织、策划下,我们将《中学数学建模教与学》奉献给中学数学界的同仁。本书以数学知识划块为章,每章除了基础知识回顾、建模提示外,通过大量的实例分析,使中学数学知识的应用得以生动地展示,并介绍了中学数学建模的基本步骤、方法及注意事项。书中集中了各地作者所在学校及作者本人在中学数学建模中的成果;在问题的具体解决以后,尽可能作出一般性的结论及推广。本书可供中学教师、学生参考,也可作为选修课教材使用。

本书是集体创作的成果,尽管作者地处不同,但多次会聚研究修改书纲,数易其稿。每章作者(以本书章次为序)分别为:周建峰(浙江师范大学附中,第一章)、金明烈(浙江省江山中学,第二、三章)、吴国建(浙江省东阳中学,第四章)、卜月华(浙江师范大学,第

五章)，全书由卜月华定稿。在书稿形成过程中，得到了首都师范大学王尚志教授、浙江师范大学傅克昌教授的大力支持和悉心指导，在此谨表真诚的谢意。书中缺点与错误虽非本意所致，但水平有限，总是难免。谨请各位同仁赐教。

编　者

2001年11月于金华

目　　录

1 函数、不等式

1.1 概 述

函数、不等式是高中数学知识中最重要的工具性知识，其涉及的内容十分广泛。在生产、生活实际中，有大量的实际问题必须依赖函数与不等式模型加以解决。

1.1.1 基础知识及应用

(1) 函数

一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数；函数的定义域、值域、解析式、图像；函数的单调性、奇偶性、周期性。

(2) 不等式

不等式的基本性质、不等式的证明、不等式的解法；基本不等式、排序不等式、柯西不等式；最优化问题及线性规划等。

1.1.2 建模(或知识应用)提示

(1) 实际问题中的数量关系是模糊的，数据往往是孤立的，要将其转化为实际问题，必须在对有关数据作适当处理之后借助于其内在规律或你的经验将其理想化、函数模型化。

(2) 实际问题中的变量很多，有相关变量也有无关变量，有主要参变量与次要参变量，在建立函数或不等式模型时，必须抓住其相关变量中的主要参变量关系展开分析与讨论。

(3) 实际问题中的量往往具有特殊的含义，在建立函数或不等式关系时必须注意其有意义的变化范围，而不能只考虑纯数学关系。

(4) 问题所研讨的结果最好具有范式，具有可推广性，这样更

便于研究结果的广泛应用。

1.1.3 常用建模方法

在函数与不等式部分,建模方法很多,最常见的有:经验函数法、最小二乘法、模型比较法、基本不等式法、线性规划法等。比如乘坐出租车问题,我们凭经验可以建立分段函数模型;人口问题可以利用最小二乘法建模以寻找回归方程;定和(或定积)最值问题可用基本不等式法解决;某些特定线性约束条件下的规划问题(如污水治理),可以借助于线性规划加以解决。

1.2 一次函数模型

从实际问题中观测得到的数据间存在线性关系时,我们可以用一次函数模型加以解决,这一模型能够较理想化地描述生活中许多问题的变量之间的关系。但是由于组建这一类模型时缺乏有关因素之间作用机制的细致讨论,模型的使用和分析的深度往往受到一定的限制。

中学中常见的组建一次函数模型的方法有两种:经验判断法(亦称随手画法)和最小二乘法。

(1) 经验判断法

经验判断法就是凭借个人的主观判断能力以及对数据的某种悟性,选择出一条直线来反映变量之间的内在规律,并且尽可能使这些散点通过这条直线或均匀分布在直线两侧。显然,这种方法会因个人的判断能力不同,所求得的直线方程也不尽相同。

(2) 最小二乘法

最小二乘法实质上是在观察处误差的平方和达到极小的前提下,使用简单直线拟合观测值的一种方法。假设(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、…、(x_n, y_n)是一组观测所得数据,如果变量y与x之间有线性模型$y = a + bx$的话,则对每一组观测值(x_i, y_i)将有关系:$y_i = a +$

$bx_i + \varepsilon_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i$，其中 $\hat{y}_i = a + bx_i$ 为观测点的模型值，ε_i 为观测值 y_i 的误差。当然，最理想的结果应该是 $y_i = \hat{y}_i, i = 1,2,\cdots,n$，即 $\varepsilon_i = 0$。但对于实际问题来说，实际的观测值 y_i 与 $\hat{y}_i$ 是不尽相同的，它们之间会有误差，令 $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ 为第 i 个点的误差。设

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \qquad (1.1)$$

它就是所有观测点处误差的平方和。显然，Q 值越小，对应的直线方程就越理想。因此，我们可以把 Q 的值作为拟合线性模型效果的一个标准。于是问题就变成了已知一组数据 $(x_i, y_i), i = 1,2,\cdots,n$，求使得 Q 值最小时的线性模型的系数 a 和 b，这种拟合方法称为最小二乘法。

一次函数经常被用于线性拟合、物资调配、地点设置等问题中。其中简单线性拟合与物资调配常用经验函数法解决，较复杂的线性拟合常用最小二乘法解决。

一次函数模型分析时常采用的方法有列表法和图像法。列表法常用来分析关系较复杂的物资调配问题，图像法常用来分析与点的坐标相关的问题。

问题 1：动物的种类

燕隼和红隼是属于隼形目隼科的鸟类，它们的体形大小如鸽，形略似燕，身体的形态特征比较相似，红隼的体形比燕隼略大。通过抽样测量已知燕隼的平均体长约为 31 cm，平均翅长约为 27 cm；红隼的平均体长约为 35 cm，平均翅长约为 25 cm。近日在某地发现了两只形似燕隼或红隼的鸟，经测量，知道这两只鸟的体长和翅长分别为 A(32.65 cm，25.2 cm)，B(33.4 cm，26.9 cm)。你能否设计出一种近似的方法，利用这些数据判断这两只鸟是燕隼还是红隼？

模型 1　距离分析法

我们假定燕隼与红隼的分类以该隼类鸟的体长与翅长所构成的二维坐标对应的点与平均体长与翅长所构成的二维坐标对应的

点的距离大小来判断，则

燕隼的平均体长与翅长对应点为 $P(31,27)$，红隼的平均体长与翅长对应点为 $Q(35,25)$，

$$|AP| = \sqrt{(32.65-31)^2+(25.2-27)^2} \approx 2.442$$

$$|AQ| = \sqrt{(32.65-35)^2+(25.2-25)^2} \approx 2.358$$

由于 $|AP|>|AQ|$，可判断 A 为红隼，同样可判断 B 为燕隼。

模型 2 垂直平分线法

将燕隼与红隼平均体长与翅长对应的点看作是两个基准点 P、Q，这两个基准点的垂直平分线将属于隼类的鸟分为两类，规定靠近 P 点一侧的为燕隼，靠近 Q 点一侧的为红隼，则垂直平分线方程为：

$$y = 2x - 40$$

即

$$2x - y - 40 = 0$$

则燕隼类为

$$2x - y - 40 < 0$$

红隼类为

$$2x - y - 40 > 0$$

可判断：A 为红隼，B 为燕隼。

问题 2：桌椅的高度模型

【问题】 配套的桌子、椅子之间是否存在着一定的比例关系？

【分析】

(1) 生活常识

在现实生活中，大家都会体会到坐在相应的课桌椅上，觉得比较舒服；而当你坐在高度相差很大的桌子和椅子上学习时，会觉得容易疲劳。说明配套的课桌椅之间存在着一定的比例关系。

(2) 数据收集

测量两套不同的课桌椅，相应的高度为：

组一：课桌高：75.0 cm，　　椅子高：40.5 cm

组二：课桌高：70.2 cm，　　椅子高：37.5 cm

(3) 模型建立与解决

假设课桌高 y(cm) 与椅子高 x(cm) 之间存在一次线性关系

$$y = ax + b$$

则由上两组数据可求得

$$a = 1.57, \qquad b = 11.35$$

故

$$y = 1.57x + 11.35$$

(4) 模型推广与应用

以上关系式是从教室中桌子与椅子的高度粗略推算得到的，实际上，用于书写或办公的桌子与椅子之间都近似存在着这一关系。

例如，测得一套办公桌椅，其中椅子高为 44 cm，办公桌高为 80.5 cm，将 $x = 44$ 代入 $y = 1.57x + 11.35$，可求得 $y = 80.3$(cm)，与实际基本相符。

我们可以通过桌子与椅子的高度关系，粗略地推导出配套的桌椅的高度，这样设计，对青少年的身心健康发展很有好处。

问题 3：高跟鞋问题

女孩子都爱美，你知道你穿鞋跟多高的鞋子看起来最美吗？

设某人下肢躯干部分长为 x cm，身高为 l cm，鞋跟高 d cm，我们知道黄金分割比为 0.618，当人下肢与身高比为 0.618 时应该看起来最美，即

$$\frac{x + d}{l + d} = 0.618$$

则

$$d = \frac{0.618l - x}{1 - 0.618} = \frac{0.618l - x}{0.382}$$

由此模型，可计算出任何一个女孩子应该穿多高鞋跟的鞋子。