现代经济管理人员进修丛书

实用运筹网络

傅家琪 迟成文 编著

安徽教育出版社

实用运筹网络

傅家琪　迟成文　编著

安 徽 教 育 出 版 社

实用运筹网络

傅家琪　迟成文

安徽教育出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：6.25　字数：150,000

1986年11月第1版　1986年11月第1次印刷

印数：2,000

统一书号：7276·312　定价：1.05元

出 版 说 明

随着我国四化建设的发展，加速培养大批经济管理人员并不断提高科学管理水平，是推动企业管理现代化的迫切需要，为此，本社组织编写出版了这套《现代经济管理丛书》。

这套丛书以实际应用为主，兼顾理论，目的在于使读者既掌握现代经济管理所必需的基本理论和数学方法，又能在应用实例的启迪下改进实际工作。

这套丛书力求以建立数学模型、探讨方法及其在电子计算机上实现为主要线索进行编写，它的内容涉及图论、规划、控制、统计和最优化等各个领域，分册编写，读者可根据需要选读。

这套丛书可供大专院校管理专业及各种类型的管理专业短训班用作教材，也可供从事企业管理的工程技术人员、经济管理人员为知识更新作自学用书。

前　言

运筹网络是本世纪中叶发展起来的一门新兴科学，近年来被广泛应用于管理科学的各个领域。它的目的是为各种管理问题提供最优方案，供管理人员作决策时参考。

我国从五十年代开始重视运筹网络的研究和应用，三十多年来在理论与实践方面都有很大的进展。随着形势的发展，出版了不少有关运筹网络的著作，但在这些图书中，一类偏重于数学理论，而对如何应用运筹网络解决工业企业及公用事业管理的实际问题重视不够；另一类则偏重于普及，只介绍运筹网络的一般常识，也难以直接应用于管理的实际过程。编写出版一种使读者既能掌握运筹网络的基本理论又能指导管理工作实践的书，是从事管理专业的教育工作者与实际应用人员共同关心的问题。为了适应我国经济改革的需要，帮助从事管理工作的同志提高业务水平，作者从我国近年来的管理现状出发，结合多年在高等院校从事管理科学的教学实践，并在实际工作中收集了有关企业生产、经营与管理的运筹网络实例，吸取了国内外有关书籍及文献的成果，编写成这本《实用运筹网络》，供广大读者参考。

本书在论述上力求深入浅出，文字上力求通俗易懂，方法上着重思路及直观解释。在每种算法后面均有实例，力求便于教学和自学。

本书第一章除介绍网络图论的一般知识外，还突出如何应用这些知识去建立最优的管道网络及交通网络，这些都是管理实践中常见的问题。第二章除介绍著名的Ford—Fulkerson最大流标号法及Dijkstra最短路计算法外，还突出如何应用Dijkstra算法原理制定企业固定资产最优更新方案，这是当前经济管理中一个十分值得探讨的问题。第三章除介绍网络计划技术(PERT)的原

理和方法外，还在附录中汇集了某些工矿企业近年推广这些技术所取得的成果资料。

考虑到当前我国工矿企业关于电子计算机推广使用的现状，因此本书各章在介绍有关算法时，均从图算着手阐述各种问题的解法思路，在不依赖计算机的情况下，简易地求出其最优解。为了方便具有电子计算机的单位，在研究类似问题时，迅速求出最优解，还考虑到电子计算机技术将迅速在我国工矿企业推广使用，本书专列一章介绍关于最小部份树、最短路、最大流、最优费用最大流及关键线路法等各类问题的计算机程序，使用的是在国内被广泛采用的BASIC语言。上述算法都附有框图，读者在实际应用时可以引用和移植到不同机型上。

本书可供大专院校管理专业及该专业的干部培训班教学用，也可供工矿企业、事业单位的工程师、经济师、技术员及管理人员参考。

本书第一至三章及附录由傅家琪同志编写。第四章由迟成文同志编写。

限于作者水平，书中不妥之处，敬请批评指正。

傅家琪　迟成文

一九八五年元月于安徽大学

目　　录

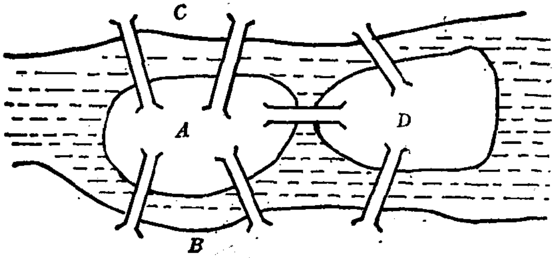
第一章 图　论

第一节 图论简史

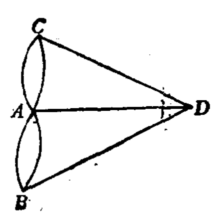
图论是运筹学中发展很快的一个分支。在自然科学与社会科学的各个领域中应用极为广泛。近年来应用图论与网络方法来处理信息传递、交通运输及经济管理方面的问题都取得了卓越的成果。

根据历史记载，图论的奠基者是欧拉（Euler)。他在1736年解决了当时闻名的哥尼兹堡七桥问题(Kӧnisberg Bridge Prob-lems)。

哥尼兹堡(今加里宁格勒)被环绕克里荷夫岛的普雷格尔河所分隔，城里有七座桥将河中两个小岛及岛与河岸联结起来，如图1-1(a)所示。当时有人提出这样一个问题：能否从四块陆地（两个小岛及两条河岸)的任何一块开始，通过每一座桥一次且仅一次，又回到原来的出发点？这就是著名的“七座桥问题”。这个问题直到1736年由欧拉用“图论”的方法解决，证明这个问题是没有解的。



(a)



(b)

图1—1

为了证明这个问题无解，欧拉将每一块陆地用一个点（称为节点）代替。每一座桥用联结相应的两个点的一条线（称为边）代替，从而得到一个如图1-1(b)所示的“图”，称为“线图”。“图”中的每一个点代表一块陆地，于是问题归结为：能否从A、B、C、D中任一点出发通过每条边一次且仅一次，最后回到原出发点的问题，即能否从某点出发用“一笔画出”图1-1(b)最后回到原出发点而不重复的问题。欧拉证明了对于一个给定的图，不重复地“一笔画出”成为可能的判别法是这个图必须是连通的（即从图中任意一点出发，通过某些边一定能达到其他任意一点），且与图中每一个节点（可能有两点例外）相连的边必须是偶数条。由于图1-1(b)所示的“图”中，与四个顶点相连的边都是奇数条，因而不可能存在通过每边一次且仅一次的画法，即七座桥问题是无解的。

1847年基尔赫夫(Kirchhoff)在研究电网络时奠定了“树”的的概念及其理论。后来克罗斯克(Kruskal)解决了最小部分树的求法。近年来最小部分树在最优决策方面得到了广泛应用，例如在若干城镇间修筑最小公路网等。

1868年若当(Jordan)第一次从数学上考虑了树的问题。

早在十九世纪中叶，人们就发现用四种颜色可以染出平面或球面上的任何一张地图，而且可使相邻两个国家着上不同的颜色。这就是著名的四色问题。1969年奥瑞(Ore)与斯泰姆普(Stemple)证明了对于40个节点以下的平面图四色定理成立。1976年美国伊黎诺安(Illinoise)大学的凯·阿派尔(K. Appel)与屋·哈肯(W.Haken)在介·考贺（J.Koch）协作下利用高速电子计算机解决了四色问题。他们使用100亿个逻辑判定，花费1200机时证明了四色定理对于任意多个节点的平面或球面图都能成立，于是解决了几个世纪来图论中的一个大难题。

近年来，图论在最优化方面的发展尤为迅速。

1956年，Ford-Fulkerson 提出了最大流标号法解决了寻求已知网络的最大流问题，例如已知供水系统中对某用水点的最大

供水量及已知输电系统中对某个用户的最大供电量．在交通运输网络中 Ford-Fulkerson 标号法解决了从甲地可能运往乙地的最大物资数量(参见本书第二章第二节)。

1959年， E.D.Dijkstra 提出了最短路的算法，解决了在有向图中任意两点间的最短路问题。后来国外的经济管理工作者又用 Dijkstra 算法原理解决了固定资产的最优更新方案（参见本书第二章第一节)等等．

此外，我国著名化学家唐敖庆教授应用图论中的某些方法于化学研究也取得了显著成果．随着科学技术的发展，图论将在自然科学与社会科学的各个领域中大放异彩，为我国的四化作出卓越贡献．

第二节　图的一般知识

§1.图的概念

图是一种数学的抽象。与一般所说的几何图形不同，它是用一些“节点”的集合与一些“边”的集合来反映离散事物间的联系与组合关系．例如图1-2表示某个地区的交通图，图中A、B、C、D表示该地区的四个城镇．两城之间的连线(边)：〔A，B〕、〔A，C〕，〔B，C〕、〔C、D〕，〔D，A〕表示公路，如连线〔A，B〕表明了A、B之间有一种特定关系，即A、B之间有公路可通达．

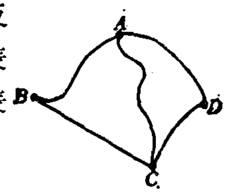


图1—2

图论中的重要条件是图中两节点之间是否有连线，即是否存在特定关系．至于图中各节点的相互位置及连结方式则可随意．因此图1-2所示的交通图也可以画成图1-3．

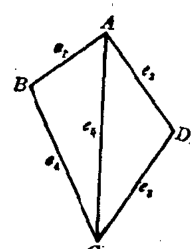


图1—3

由于图中的点用来表示离散事物，它可以

是城镇，可以是电话机，可以是电子元件，也可以是自来水开关等等.而边可以表示公路、电话线、导线、自来水管道等等。这种图绘制比较简便，因此自然科学与管理科学中事物之间的联系都可用这种简单易画的图直观地表示出来，便于从事理论与实际方面的分析与研究.

现在我们用集合的观点给出图的较严密的定义。设V是节点集合，E是边的集合.若对每个$e\in E$，V中有一个节点对$[v,v']$与之对应，则称由V及E组成的集合为一个图，记作$G=(V,E)$.例如在图1-3中

$$V=\{A,B,C,D\}$$

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$$

$$e_1=[A,\ B]$$

$$e_2=[A,\ D]$$

$$e_3=[D,\ C]$$

$$e_4=[C,\ B]$$

$$e_5=[A,\ C]$$

§2. 图论的基本术语

为了便于阅读，首先有必要介绍图论中的一些基本术语，请读者结合实例图形反复思考并予记忆.

端点　若$e=[A,B]\in E$则称节点A, B是边e的端点，并称e是A(及B)的关联边. 若A与B相同，则相应边$e=[A,B]$称为自回路或环.如图1-4中$e_6=[B,B]$为一个环.

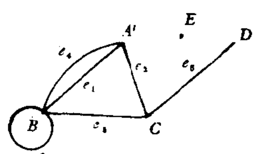


图1—4

相邻　(1)点相邻　若节点A和B与同一条边相关联则称节点A和节点B是相邻的.

(2)边相邻　若两条边e_i与e_j有一个公共端点，则称边e_i和e_j是相邻的.

多重边　若两个节点之间多于一条边，则称为多重边. 如图

1-4中，A与B间的两条边e_1与e_4即为多重边.

多重图　含有多重边的图称为多重图.

简单图　无环无多重边的图称为简单图. 后面各节中所提及的图一般都是指简单图。

孤立点　无边与之关联的节点称为孤立点，如图 1-4 中的节点E.

悬挂点　仅有一条边与之关联的点称为悬挂点，如上图中的节点D.

悬挂边　与悬挂点关联的边称为悬挂边。如上图中的边$[C,D]$.

节点的次(或度)　以节点A为端点的边的个数称为节点A的次(或度)，记作$d(A)$. 如上图中$d(A)=3$，$d(B)=5$，$d(C)=3$，$d(D)=1$，$d(E)=0$.

零图　只有节点而无边的图称为零图.

完备图　在简单图中若每两个不同节点间都存在一条边与之关联，则称为完备图. 显然完备图的节点数p与边数q间存在下列关系：$q=C_p^2=\frac{p!}{2!(p-2)!}=\frac{1}{2}p(p-1)$

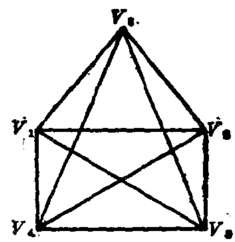


图1—5

例如在图 1-5 中节点数 $p=5$，于是边数

$q=\frac{1}{2}p(p-1)=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$.

下面的定理给出了任何图中节点的次与边数的关系.

定理　图中所有节点的次的总和等于边数的二倍.

证明　设图中有p个节点q条边，则本定理可写成$\sum_{i=1}^{p}d(v_i)=2q$. 这是显然的,因为每条边有两个端点(环有两个相同的端点). 因此在计算图中节点次的总和时，每条边都算了两次，所以节点的次的总和当然是边数的二倍.

推论　图中次为奇数的节点的个数必为偶数.

注本章所有图中的顶点V_i均表示正文中节点v_i，$i=1,2$

证明 令 V_1 为图 G 中次为奇数的节点集合，

V_2 为图 G 中次的偶数的节点集合，

则由上述定理可得 $\sum\limits_{v\in V_1} d(v)+\sum\limits_{v\in V_2} d(v)=\sum\limits_{v\in V} d(v)=2q$，由 V_2 的定义知 $\sum\limits_{v\in V_2} d(v)$ 必为偶数，以 $2m$ 表示，于是有：

$\sum\limits_{v\in V_1} d(v)=2q-2m=2(q-m)=$ 偶数. 故 V_1 中的节点个数必为偶数.

例 下面数列中的各项是某个简单图的节点的次吗？

(a) 5,4,3,3,7,6,2 (b) 5,4,1,3,6,6,3 (c) 5,5,6,4,2,2,1

解 (a)不是. 因图为简单图且只有 7 个节点. 故任一节点的次不能超过 6，即 $\max\limits_i d(v_i)=6$. 而数列中的第 5 项为 7，故与简单图的定义矛盾.

(b)不是. 令节点 v_1，v_2，……v_7 分别与数列中的各项相对应. $\because d(v_5)=6$，$\therefore v_5$ 与所有的其他节点关联，必有边 $[v_3,v_5]$. 同理 v_6 也与所有的其他节点关联，必有边 $[v_3,v_6]$. 因此与 v_3 相关联的边至少有两条，即 $d(v_3)\geqslant 2$. 但这与数列中的 $d(v_3)=1$ 相矛盾.

(c)不是. 因图中次为奇数的节点个数为 3，不是偶数.

除了上面的一些最基本的概念外，在图论中还经常要用到"链"与"圈"等概念：

链 若图中的某些节点可以排列成 $\{v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots\cdots v_{i_k}\}$，并且其中任意两个相邻的节点 $v_{i_{t-1}}v_{i_t}$ 之间均有边关联，则由这些节点及关联边组成的序列构成一条从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的链. 记作链 $\mu=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots\cdots v_{i_k}\}$. 如在图1-6中 $\mu=\{v_1,v_2,v_5,v_4,v_6\}$ 即为一条从 v_1 至 v_6 的链.

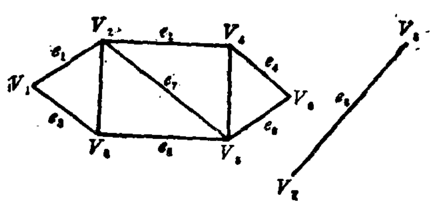


图1-6

圈 在链 $\mu=\{v_{i_1},\ v_{i_2},\ \cdots\cdots v_{i_k}\}$ 中若 $v_{i_1}=v_{i_k}$ 则称之为圈，显然圈是一条闭链. 如上图中 $\mu=\{v_1,v_2,v_5,v_3,v_1\}$ 即为一条闭链.

简单链(圈)　若链(圈)中边均不相同则称为简单链(圈).

初等链(圈)　若简单链(圈)中的节点也不相同，则称之为初等链(圈). 显然初等链(圈)必为简单链(圈).

如在图1-6中，$\mu_1=\{v_1,v_2,v_4,v_6,v_2,v_3\}$为简单链，但并非初等链. $\mu_2=\{v_1,v_2,v_4,v_5,v_3\}$是初等链，当然也是简单链.

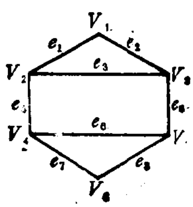
连通图　若图中任意两节点间至少有一条链，则这个图称为连通图。否则称为不连通图. 如图1-6中，因v_7或v_8与其他各点间没有链，所以不是连通图.

§3. 子图

在研究图的性质与结构时，我们经常用到“子图”及与之有关的一些概念。现用集合知识将有关定义分述如下：

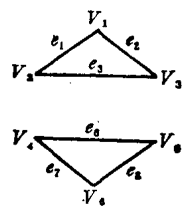
子图　设$G'=(V',E')$　$G=(V,E)$. 如果$V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$则称G'是G的子图.

部分图　设$G'=(V',E')$，$G=(V,E)$如果$V'=V$，$E'\subseteq E$则



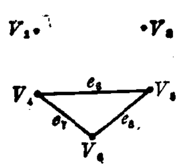
(a)图G

$G=(V,\ E)$，$V=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$，$E=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8\}$。



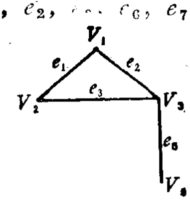
(b)图G′

$G'=(V',\ E')$，$V'=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$，$E'=\{e_1,\ e_2,\ \ldots\ e_6,\ e_7,\ e_8\}$.



(c)图G′

$G'=(V',\ E')$，$V'=\{v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$，$E'=\{e_6,\ e_7,\ e_8\}$.



(d)图G′

$G'=(V',\ E')$，$V'=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_5\}$，$E'=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_5\}$。

称G'是G的一个部分图.如图1-7中的(b)为(a)的一个部分图.

真子图　设$G'=(V', E')$，$G=(V, E)$，如果$V'\subset V$，$E'\subset E$则称G'是G　真子图　如图1—7中的(c)为(a)的一个真子图。

生成子图　设$G'=(V', E')$，$G=(V, E)$。如果$V'\subseteq V$，$E'=\{[u, v] \mid [u, v]\in E, u\in V' \cap v\in V'\}$则称$G'$是$G$中由$V'$生成的子图，记作$G(V')$。如上图中的($d$)为($a$)的一个生成子图。

例　设$G=(V, E)$如图所示，其中

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$。

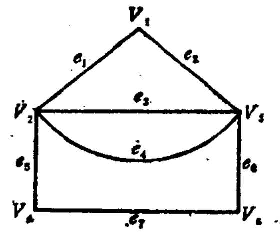


图1—8

(1) 若$V'=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，
$E'=\{e_4, e_3\}$则$G'=(V', E')$为图G的什么子图?(真子图及生成子图)

(2) 若$V'=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$，
$E'=\{e_4, e_7\}$，则$G'=(V', E')$为图G的什么子图?)真子图及生成子图)

(3) 若$V'=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，
$E'=\{e_4, e_7\}$，则$G'=(V', E')$为图G的什么子图?(部分图及生成子图)

由此可知一个图的部分图及真子图等均为该图的生成子图。

第三节　树

§1.树的概念

在日常生活、组织管理与分析决策中经常要遇到一种简单而极其有用的图，那就是“树”.所谓树是一种特殊的连通图，即任何两点间都存在链但又不存在圈.

例1　工业企业的“直线—职能制”结构图便是一棵树，如图1-9.