概率统计

（第二版）

耿素云　张立昂

北京大学出版社

概 率 统 计

第 二 版

耿素云 张立昂 编

北京大学出版社
北 京

书　　　名：概率统计（第二版）
著作责任者：耿素云　张立昂
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-03927-1/O・424
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中村关北京大学校内　100871
网　　　址：http：//cbs. pku. edu. cn/cbs. htm
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62753160
电 子 信 箱：zpup@pup. pku. edu. cn
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　10.875 印张　260 千字
1986 年 12 月第一版　2000 年 2 月第二版第二次印刷
定　　　价：16.00 元

再版前言

这次再版除进行必要的文字修改和勘误之外，在内容上主要做了下述变动：

1. 删去“特征函数”一章。这部分内容超出使用本书的多数读者的需要。

2. 按照中华人民共和国国家标准，对正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布统一使用(下侧)分位数表(附表 2～5)。在本书第一版和其他一些书中，对正态分布和 t 分布使用双侧分位数表，对 χ^2 分布和 F 分布使用上侧分位数表，请读者注意两者的区别。

阅读本书只需要具备高等数学和线性代数的知识。本书是北京市高等教育自学考试计算机软件专业“概率论与数理统计”的教材，也完全适合作为普通高校非数学专业(特别是理工科专业)的本科教材和参考书。

在编写本书和这次修订过程中，我们参考了许多有关教材和著作，并且从中摘取了一些例题和习题，书中没有一一注明，在此一并向有关作者致谢！

由于作者的水平所限，不妥与谬误难免，恳请读者批评指正。

作　　者

1996 年夏于燕北园

目　　录

第一章　随机事件与概率

§1　随机事件的直观定义及其运算

一、必然现象与随机现象

在自然界里，在生产实践和科学试验中，人们所观察到的现象大体上可分为两类. 有一类现象，在一定的条件下必然发生（或必然不发生），例如，上抛的石子必然下落；在一定条件下，氢和氧化合成水；人总是要死的；太阳从东方升起等等. 我们将上述诸现象称之为**确定性现象**或**必然现象**. 微积分学、线性代数等就是研究必然现象的数学工具. 与此同时，在自然界，在人们的社会实践和科学试验中，人们还发现具有不同性质的另一类现象. 例如，在相同的条件下，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（我们常把有币值的一面称作正面）朝上，也可能是正面朝下；一个射手向同一个目标连射几发子弹，各次弹着点的位置不尽相同，并且每颗子弹弹着点的准确位置都是无法事先预测的. 这一类现象我们称之为**偶然性现象**或**随机现象**. 起初，人们把这种现象称之为“不正常的”、“出乎意料的”、“原因不明”的现象，并且认为这些现象是无规律的现象，人们长时期的观察和实践的结果表明，这些现象并非是杂乱无章的，而是有规律可寻的. 例如，大量重复抛一枚硬币，得正面朝上的次数，与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半. 同一射手射击同一目标，弹着点按着一定的规律分布，等等. 这种在大量地重复试验或观察中所呈现出的固有的规律性，就是我们以后所说的统计规律性. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

二、随机试验与随机事件

我们将对自然现象的一次观察或进行一次科学试验统称为**试验**. 如果试验可以在相同条件下重复进行,并且每次试验的结果是事先不可预言的,则称这样的试验为**随机试验**. 以下我们所说的试验均指随机试验.

进行一次试验总有一个需要观察的目的,根据这个目的,试验可能被观察到各种不同的结果. 例如,抛一枚硬币,我们的目的是观察哪面朝上,这里当然只有两种可能的结果:正面朝上或背面朝上. 至于硬币落在桌面的哪个位置以及朝哪个方向滚动等都不在我们的目的之列,不将它们算作结果.

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**,简称**事件**. 常用字母 $A,B,C,\cdots$表示事件.

例 1.1 抛一枚质地均匀的硬币,可有两种不同的结果:"正面朝上","背面朝上",这两种结果都是随机事件. 可用 A 和 B 分别表示它们,写成:$A=$"正面朝上";$B=$"背面朝上".

例 1.2 袋中装有 10 个大小相同的小球,编号为 $0,1,2,\cdots,9$. 每次从袋中取出一球,看过编号后再放回袋中. 取出一球,它的编号有 10 种可能的结果:"编号为 0","编号为 1",…,"编号为 9". 这 10 种结果的每一种都是随机事件,我们可用 $A_i=$"编号为 i"$(i=0,1,\cdots,9)$表示它们. 除了以上 10 个事件外,还可以考虑另外的事件. 例如,$B=$"编号为奇数",$C=$"编号为偶数",$D=$"编号$\leqslant 4$"都是随机事件. 但事件 $A_i(i=0,1,\cdots,9)$与事件 B,C,D 是有所不同的. A_0 到 A_9 这 10 个事件中,每个事件中只含一个试验结果,而在事件 B 和 C 中,各含 5 个可能的试验结果. 我们称只包含一个试验结果的事件为**基本事件**,由两个或两个以上基本事件复合而成的事件为**复合事件**.

例 1.3 连续投掷两颗质地均匀的骰子,观察每颗骰子朝上的一面的点数,这是一个随机试验. 事件"第一颗骰子出现 i 点,第

二颗骰子出现 j 点”($1\leqslant i\leqslant 6, 1\leqslant j\leqslant 6$)是基本事件. 本例中共有 36 个基本事件. “第一颗骰子出现偶数点”,“第二颗骰子出现奇数点”,“两颗骰子出现的点数之和为 10”等事件均为复合事件.

三、事件的集合表示,样本空间

为了研究事件之间的关系及运算,用集合表示事件是方便的,又是相当直观的,为此先给出样本点的概念:称随机试验中每一种可能的结果为一个**样本点**,用 ω 表示之. 由全体样本点组成的集合称作**样本空间**或**基本空间**,用 Ω 表示. 有了样本点及样本空间的概念之后,我们前面所定义的随机事件及基本事件都可以用集合表示了. 随机事件是 Ω 的子集,基本事件是一个样本点组成的单元集.

在例 1.1 中,样本点有两个:正面朝上,背面朝上;基本事件也为两个:{正面朝上},{背面朝上};样本空间为{正面朝上,背面朝上}. 若用 ω_0 与 ω_1 分别表示正面朝上和背面朝上,则基本事件为 $\{\omega_0\}$ 和 $\{\omega_1\}$,样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}$.

在例 1.2 中,样本点为 0 号,1 号,2 号,…,9 号;基本事件为{0 号},{1 号},{2 号},…,{9 号};样本空间为 $\Omega=${0 号,1 号,2 号,…,9 号}. 随机事件“编号为奇数”={1 号,3 号,…,9 号},“编号为偶数”={0 号,2 号,…,8 号}.

在例 1.3 中,样本点为 $(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,6),\cdots,(6,6)$,共 36 个;基本事件也为 36 个:$\{(1,1)\},\{(1,2)\},\{(1,3)\},\cdots,\{(1,6)\},\cdots,\{(6,6)\}$;样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(6,6)\}$. 随机事件“两颗骰子出现的点数之和为 10”$=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$.

例 1.4 陀螺的形状为旋转体,在它的长为 3 的圆周上均匀地刻上刻度. 在桌面上旋转陀螺,当它停止转动后,观察它的圆周与桌面的触点的刻度,这是一个随机试验. 在这个试验中:

样本点为:$x, 0\leqslant x<3$, x 为实数.

基本事件：$\{x\}$，$0\leqslant x<3$.

样本空间：$\Omega=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$.

将随机事件表示成由样本点组成的集合，就可以将事件间的关系及运算归结为集合之间的关系和运算，这不仅对研究事件的关系和运算是方便的，而且对研究随机发生的可能性大小的数量指标——概率的运算也是非常有益的.

四、事件之间的关系及运算

1. 必然事件与不可能事件

我们称不可能发生的事件为**不可能事件**，用符号 $\varnothing$ 表示；称必定要发生的事件为**必然事件**. 在上一段中，我们给出了样本空间的概念. 在每次试验中，如果将样本空间也看成是事件的话，则这个事件必然发生，因而样本空间是必然事件. 所以我们仍用 Ω 表示必然事件.

在例 1.1 中，"正面朝上且背面也朝上"为不可能事件 $\varnothing$. "正面朝上或背面朝上"为必然事件 Ω. 在例 1.2 中，"编号 $\geqslant 10$"为不可能事件 $\varnothing$，"编号 $\geqslant 0$"为必然事件 Ω.

2. 子事件（事件的包含关系）

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的**子事件**，或称**事件 B 包含事件 A**，记作 $A\subseteq B$. 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**，用 $A=B$ 表示.

如果将事件用集合表示，则 A 是 B 的子事件即为 A 是 B 的子集（集合 B 包含集合 A），因而可用图表示事件之间的包含关系，如图 1.1(a) 所示. 这样的图叫做文氏图.

在例 1.2 中，设 $A=$"编号为 1 或 3"，$B=$"编号为奇数"，则 A 是 B 的子事件. 事实上，$A=\{1,3\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，所以 $A\subseteq B$.

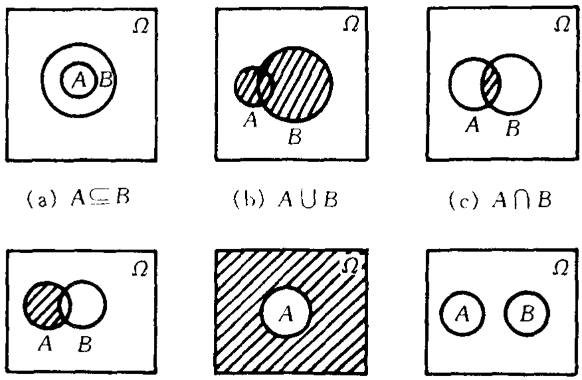
设 A,B,C 为任意三个事件，事件间的包含关系有下列性质：

(a) $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$；

(b) $A\subseteq A$（自反性）；

(c)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$（传递性）；

(d)若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$（反对称性）.



(a) $A\subseteq B$　(b) $A\cup B$　(c) $A\cap B$

(d) $A-B$　(e) $\bar{A}$　(f) A,B 不相容

图 1.1

3. 和事件

设事件 C 表示“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件，则称 C 为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记作 $C=A\cup B$.

如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的和事件 C 即为集合 A 与 B 的并，如图 1.1(b)所示.

在例 1.2 中，$A_1=$“编号为 1”，$A_2=$“编号为 2”，则 $A_1\cup A_2=$“编号为 1 或 2”.

事件的和可以推广到有限个或可数个事件的情况. 用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生其一这一事件；用 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少发生其一这一事件.

4. 积事件

设事件 D 表示“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件，则称 D 为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记作 $D=A\cap B$，或 $D=AB$.

如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的积事件 D 即为集合 A 与 B 的交，如图 1.1(c)所示.

在例 1.2 中，“编号为 1 或 2 或 3”与“编号为偶数”的积事件为{编号为 2}.

也可以将事件的积推广到有限个或可数个事件的情况. 用 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生这一事件；用 $A_1\cap A_2\cap\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生的事件.

5. 差事件

设事件 E 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件，则称 E 为 A 与 B 的**差事件**，记作 $E=A-B$. 如图 1.1(d)所示.

由差事件的定义可知，对于任意的事件 A，

$$A-A=\varnothing,\quad A-\varnothing=A,\quad A-\Omega=\varnothing.$$

6. 互不相容事件

如果两事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B 是**互不相容事件**，或称**互斥事件**，记作 $A\cap B=\varnothing$.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的.

在任意一个随机试验中，基本事件都是互不相容的. 还容易看出，事件 A 与 $B-A$ 是互不相容的.

若用集合表示事件，则 A,B 互不相容即为 A 与 B 是不交的. 如图 1.1(f)所示.

7. 逆事件(对立事件)

在一次试验中，事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有

一个发生，即事件 A 与 B 满足条件

$$A \cup B = \Omega, \quad A \cap B = \varnothing,$$

则称事件 A 与事件 B **互逆**，又称 A 是 B 的**对立事件**，或**逆事件**（B 是 A 的对立事件，或逆事件），记成 $A=\overline{B}(B=\overline{A})$. 显然，$\overline{B}=\Omega-B$.

在例 1.2 中，$B=$“编号为奇数”，$C=$“编号为偶数”，则 $\overline{B}=C$，$\overline{C}=B$，B，C 互为逆事件.

若 A，B 两事件互逆，则 A，B 必互不相容，但反之不真.

在例 1.2 中，$A_1=$“编号为 1”，$C=$“编号为偶数”，A_1 与 C 互不相容，但 A_1 与 C 并不是互逆事件，因为 $A_1 \cap C=\varnothing$ 但 $A_1 \cup C \neq \Omega$.

不难验证事件间的运算满足如下关系：

1）交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

2）结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3）分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4）德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

可推广到有限个和可数个的情况：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

5) $A-B=A\cap\overline{B}$.

6) $\overline{\overline{A}}=A$.

§2 随机事件的概率

本节先介绍概率的统计定义、古典定义和几何定义，最后概略地介绍概率的公理化体系及其性质.

一、概率的统计定义

对于随机试验，就其一次具体的试验而言，其结果带有很大的偶然性，似乎没有规律可言. 但是在大量的重复试验中，就可能会呈现一定的规律性. 有些事件发生的可能性大些，有些事件发生的可能性小些，我们将刻画事件发生的可能性大小的数量指标称作该事件发生的**概率**，并用 $P(A)$表示事件 A 发生的概率.

让我们回到例 1.1 抛掷硬币的试验，这种试验是在一定的条件下做的. 比如，“硬币是匀称的，放在手心上，在一定的高度上，用一定的动作向上抛，让它自由落在具有弹性的桌面上，等等”. 我们称这些条件为条件组 S. 于是，在条件组 S 下做一次实验，事件 A =“正面朝上”是否发生是不能预先确定的，然而在条件组 S 下重复实验时，事件 A 发生的次数，也即频数却有一定的规律性，就是约占总数的一半.

历史上，有人作过成千上万次抛掷硬币的试验，寻找事件 A 发生的规律性. 表 1.1 列出了 4 次试验结果. 我们发现，频率都在 0.5 的附近. 因此，我们可以认为“正面朝上”的概率等于 0.5.

著名的数学家拉普拉斯对男婴和女婴的出生规律作了详细的研究. 他研究了伦敦、彼得堡、柏林、全法兰西在 10 年间婴儿出生的统计资料，惊人地发现男婴出生数和婴儿总出生数的比值总摆动于同一数值的左右，这个数大约等于 22/43.

表 1.1

试验者	抛掷次数 n	出现"正面朝上"的次数 μ（即频数）	频率 $=\frac{\mu}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

根据上述统计现象，我们给出下述概率的定义.

定义 在不变的一组条件 S 下，重复做 n 次试验. 记 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数. 当试验的次数 n 很大时，如果频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度越变越小，则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**，记作

$$P(A) = p. \tag{1.1}$$

称由(1.1)给出的事件 A 的概率 p 为**统计概率**.

根据前面叙述的试验结果，在抛掷硬币的试验中，事件"正面朝上"的概率等于 1/2；而"生男婴"的概率等于 22/43.

概率的统计定义是在总结统计资料的基础上给出的，反映了概率的统计性质. 但是，这个定义不便于计算. 下面介绍的古典概率和几何概率是对某种特殊类型的问题的概率定义，根据这些定义可以方便地计算出一大类问题的概率.

二、概率的古典定义

在有些随机试验中，每次试验可能发生的结果是有限的（样本空间中样本点的个数有限），并且每种试验结果发生的可能性是相等的（基本事件发生的可能性相等）.

例如，在例 1.1 抛掷硬币试验中，样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}$ 中有两个样本点 ω_0（正面朝上）和 ω_1（背面朝上），且 ω_0 与 ω_1 发生的可能性是相等的，因而可以规定 $P(\{\omega_0\})=P(\{\omega_1\})=1/2$.

在例 1.2 中，样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}$，$\Omega$ 中有 10 个样本

点，且基本事件发生的可能性都相等.因而可以规定

$$P(\{0\}) = P(\{1\}) = \cdots = P(\{9\}) = 1/10.$$

一般情况下，我们给出古典概型及古典概率定义如下：

定义 如果随机试验满足下述三条：

(1) 试验结果的个数是有限的，即样本空间可以写成如下形式：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\};$$

(2) 基本事件$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \cdots, \{\omega_n\}$两两互不相容；

(3) 基本事件$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \cdots, \{\omega_n\}$发生的可能性相等，

则称这个问题为**古典概型**.随机事件 $A \subseteq \Omega$ 的概率定义为

$$P(A) = \frac{|A|}{n}, \tag{1.2}$$

其中，$|A|$表示 A 中的元素(样本点)个数，n 为 Ω 中元素个数.

我们称由(1.2)给出的概率为**古典概率**.

按照这个定义，在例 1.2 中，P(“编号$\leqslant 2$”)$=\frac{3}{10}$，P(“编号为偶数”)$=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

在例 1.3 中，$P(\{(1,1)\})=P(\{(1,2)\})=\frac{1}{36}$，$P$(“两颗骰子出现的点数之和为 10”)$=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

我们不能用(1.2)定义的概率去计算例 1.4 中事件的概率，因为例 1.4 不是古典概型.

下面再举一些用(1.2)计算概率的例子.

例 1.5 袋中有 10 个小球，4 个红的，6 个白的，今按下述两种取法连续从袋中取 3 个球，分别求下列事件的概率：

$A=$“3 个球都是白的”；

$B=$“2 个红的，1 个白的”.

取法 1：每次抽取一个，看后放回袋中，再抽取下一个.这种取